

## ANEXO B

### Tensiones en un cilindro debidas a la presión hidráulica.

#### B.1 Tensiones en un anillo circular y en un cilindro de pared gruesa

Si se somete un anillo circular delgado a la acción de fuerzas radiales uniformemente distribuidas por su circunferencia, se producirán fuerzas anulares a lo largo de su espesor que actuarán tangencialmente. Si las fuerzas que actúan son radiales hacia fuera se producirá un engrandecimiento uniforme del anillo, mientras que si son radiales hacia dentro se producirá una contracción uniforme.

La magnitud de la fuerza  $F$  sobre el anillo puede hallarse cortando el anillo por una sección diametral horizontal, obteniendo el cuerpo mostrado en la Fig. B.1.

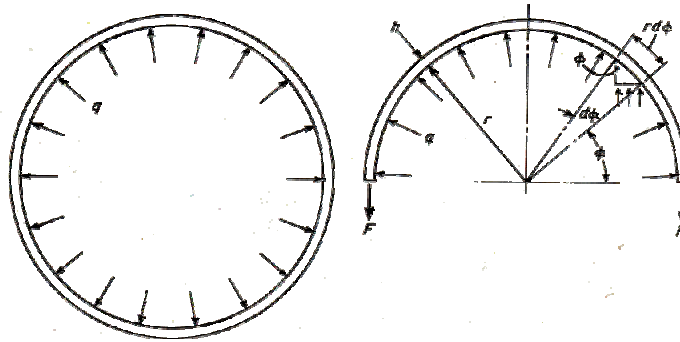


Fig. B.1 Tensiones radiales y anulares en un anillo delgado

Si la fuerza por unidad de longitud de circunferencia es  $q$ , y el radio del anillo es  $r$ , la fuerza que actúa en un elemento del anillo es  $qrd\phi$ .

Sumando las componentes verticales de todas las fuerzas que actúan sobre el anillo semicircular obtenemos la ecuación de equilibrio.

$$2F = 2 \int_0^{\pi/2} qr \sin \phi d\phi = 2qr \quad (B.1)$$

$$F = qr \quad (B.2)$$

La tensión unitaria en el anillo puede obtenerse dividiendo la fuerza  $F$  por el área  $A$  de la sección recta del anillo.

$$\sigma_2 = \frac{qr}{A} \quad (B.3)$$

Si se considera que el anillo es una sección de longitud unidad constante de un recipiente cilíndrico de espesor  $h$  sujeto a una presión interna  $p$ , tendremos que en la ecuación (B.3)  $q=p$  y  $A=h$ , y que la tensión anular en el recipiente cilíndrico es

$$\sigma_2 = \frac{pr}{h} \quad (B.4)$$

La tensión longitudinal puede calcularse igualando la presión total ejercida contra el extremo del cilindro con las fuerzas longitudinales que actúan en una sección transversal del cilindro, como se indica en la Fig. B.2.

$$\sigma_1 h 2\pi r = p \pi r^2 \rightarrow \sigma_1 = \frac{pr}{2h} \quad (B.5)$$

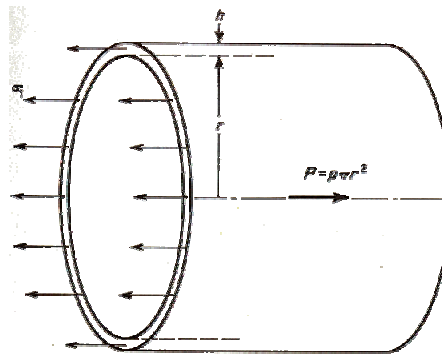


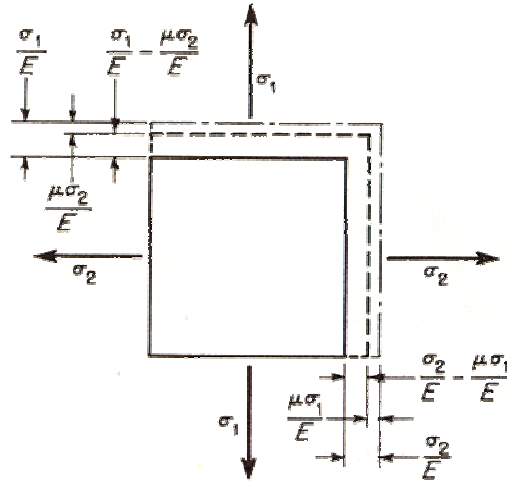
Fig. B.2 Tensión longitudinal en un cilindro

## B.2 Módulo de Poisson

Si una barra se somete a tracción pura, ésta no sólo se estira en la dirección axial sino que se produce una contracción lateral al mismo tiempo. Se ha observado que, para un material dado, el ratio entre la contracción lateral unitaria y la elongación axial unitaria es constante dentro del límite elástico.

Esta constante se llama módulo de Poisson y se denota por  $\mu$ . Su valor típico para materiales isotrópicos como los aceros para recipientes a presión es 0,3.

El mismo fenómeno aparece en el caso de compresión. La compresión axial viene acompañada por una expansión lateral, utilizándose el mismo valor de  $\mu$  para calcularlas. En un bloque de material rectangular sometido a tensiones de tracción en dos direcciones perpendiculares (Fig. B.3), la elongación en una dirección no sólo depende de la tensión en esa dirección sino también de la tensión en la dirección perpendicular.



**Fig. B.3 Deformación debida a dos tensiones principales**

La elongación unitaria o alargamiento en la dirección del esfuerzo de tracción  $\sigma_1$  es  $\sigma_1/E$  (ley de Hooke). Al mismo tiempo, la tensión de tracción  $\sigma_2$  produce una contracción lateral en la dirección de  $\sigma_1$  de valor  $\frac{\mu\sigma_2}{E}$ . Por lo tanto, la elongación en la dirección de  $\sigma_1$  será

$$e_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \quad (B.6)$$

Análogamente, en la dirección de  $\sigma_2$

$$e_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} \quad (B.7)$$

Si una o ambas tensiones son de compresión en lugar de tracción, al determinar los alargamientos en las ecuaciones (B.6) y (B.7) sólo será necesario considerarlas negativas.

Similarmente, cuando actúan tres tensiones de tracción  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , sobre un cubo de material isotrópico, la elongación en la dirección de  $\sigma_1$  es

$$e_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \quad (B.8)$$

Con las ecuaciones (B.6) y (B.7) se pueden obtener las tensiones en función de las elongaciones:

$$\sigma_1 = \frac{(e_1 + \mu e_2)E}{1 - \mu^2} \quad (B.9)$$

$$\sigma_2 = \frac{(e_2 + \mu e_1)E}{1 - \mu^2} \quad (B.10)$$

### B.3 Dilatación de recipientes a presión

La dilatación o crecimiento radial de un recipiente a presión puede observarse, integrando el alargamiento anular desde un eje que pasa por el centro de rotación y es paralelo al radio. Así, y según la Fig. B.4, la dilatación es

$$\delta = \int_0^{\pi/2} e_2 r \cos \phi d\phi = e_2 r \quad (\text{B.11})$$

Sustituyendo el valor de  $e_2$  en la ecuación (B.7) y posteriormente los valores de  $\sigma_1$  de (B.3) y  $\sigma_2$  de (B.4) se tiene:

$$\delta = r \left( \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu \sigma_1}{E} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$\delta = \frac{pr^2}{2hE} (2 - \mu) \quad (\text{B.13})$$

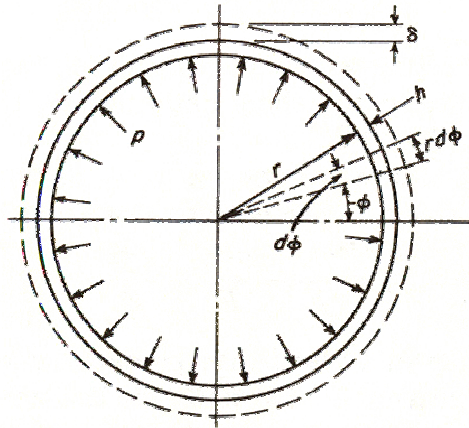


Fig. B.4 Dilatación de un recipiente debida a presión interior

### B.4 Cilindro de pared gruesa

Un cilindro se considera de paredes gruesas si el espesor de su pared es mayor que una décima parte de su radio medio. En estos casos, las variaciones de tensión entre la superficie interior y exterior se hacen apreciables, y las fórmulas ordinarias de tensión media no son aceptables.

Veamos un cilindro de paredes gruesas solicitado por una presión interior  $p_i$  y una exterior  $p_o$ . A consecuencia de la simetría axial del cilindro y de las cargas, las tensiones y deformaciones en el cilindro serán también simétricas con respecto a su eje.

Separaremos mediante dos secciones perpendiculares al eje del cilindro un anillo de longitud unitaria de dicho anillo cortamos un elemento  $mn_1n_1$  por medio de dos planos que pasan a través del cilindro y que forman entre sí un ángulo  $d\phi$  y dos superficies cilíndricas de radios  $r$  y  $r+dr$ .

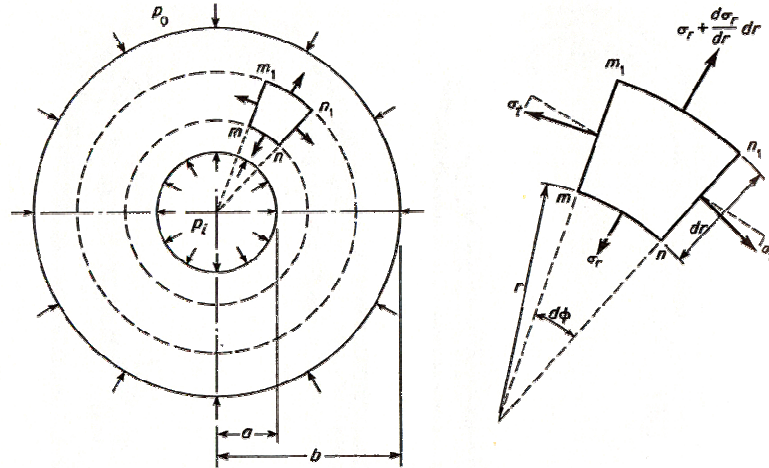


Fig. B.5 Tensiones en un cilindro de paredes gruesas

Por las caras de ese elemento actuarán las tensiones radiales  $\sigma_r$  y tangenciales  $\sigma_t$  que sustituyen la acción de la parte eliminada del cilindro y satisfacen las condiciones de equilibrio del elemento. Es evidente que  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  serán las tensiones principales. La tensión radial normal a la cara  $mn$  es  $\sigma_r$ , y varía con el radio a lo largo de una distancia  $dr$  una cantidad  $(d\sigma_r/dr)dr$ . Por lo tanto, la tensión radial en la cara  $m_1n_1$  es

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \tag{B.14}$$

La ecuación de equilibrio para el elemento se obtiene sumando las fuerzas en la dirección de la bisectriz del ángulo  $d\phi$ , entendiéndose que para ángulos pequeños el seno y el ángulo en radianes son sustancialmente iguales. Entonces

$$\sigma_r r d\phi + \sigma_t dr d\phi - (\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr)(r + dr) d\phi = 0 \tag{B.15}$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$\sigma_r r d\phi + \sigma_t dr d\phi - \sigma_r r d\phi - \sigma_r dr d\phi - r \frac{d\sigma_r}{dr} dr d\phi - \frac{d\sigma_r}{dr} dr^2 d\phi = 0 \tag{B.16}$$

Despreciando los infinitésimos de segundo orden y simplificando se obtiene:

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \tag{B.17}$$

La ecuación da una relación entre las tensiones  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$ . Se puede obtener una segunda relación de la deformación del cilindro y de suponer que la deformación longitudinal de todas las fibras es igual. Entonces la deformación del cilindro es simétrica respecto del eje y consiste en un desplazamiento radial de todos los puntos de la pared del cilindro.

Este desplazamiento es constante en la dirección circunferencial, pero varia con la distancia a lo largo del radio. Si  $u$  denota el desplazamiento radial de una superficie cilíndrica de radio  $r$ , el desplazamiento radial de una superficie de radio  $r+dr$  es

$$u + \frac{du}{dr} dr \quad (B.18)$$

Por lo tanto, un elemento  $mn_1n_1$  sufre una elongación total en la dirección radial de  $(du/dr)dr$ , o una elongación unitaria de

$$e_r = \left( \frac{du}{dr} \right) \frac{dr}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (B.19)$$

En la dirección circunferencial, la elongación unitaria del mismo elemento es igual a la elongación unitaria del correspondiente radio, parágrafo 1.3, o:

$$e_t = \frac{u}{r} \quad (B.20)$$

De este modo, si sustituimos estas expresiones de la elongación unitaria en las ecuaciones (B.9) y (B.10) obtenemos las tensiones en términos de elongaciones:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) \quad (B.21)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right) \quad (B.22)$$

Introduciendo estas expresiones en (B.17) hallamos la ecuación diferencial de los desplazamientos:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (B.23)$$

Cuya solución general es 
$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (B.24)$$

Sustituimos la ecuación (B.24) en las ecuaciones (B.21) y (B.22), y teniendo en cuenta que  $\frac{du}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$ :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ C_1(1+\mu) - C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right] \quad (B.25)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ C_1(1+\mu) + C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right] \quad (B.26)$$

Las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  se determinan con las condiciones de contorno en las superficies interior y exterior del cilindro:  $\sigma_{ra} = -p_i$  y  $\sigma_{rb} = -p_o$ .

El signo negativo denota que la tensión es de compresión.

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E} \left[ \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} \right] \quad C_2 = \frac{1+\mu}{E} \left[ \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{b^2 - a^2} \right] \quad (B.27)$$

Introduciendo el valor de las constantes en las ecuaciones (B.25) y (B.26) obtenemos las expresiones generales para determinar las tensiones:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} - \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \quad (B.28)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} + \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \quad (B.29)$$

Esta solución se conoce como las fórmulas de Lamé, o fórmulas para cilindro grueso. De ellas se deduce que el valor máximo de  $\sigma_t$  se da en la superficie interior, y la  $\sigma_r$  máxima siempre será la mayor de las dos presiones,  $p_i$  y  $p_o$ .

También se puede notar que la suma de las dos tensiones se mantiene constante:  $\sigma_r + \sigma_t = cte$ . Es decir, que las secciones transversales del cilindro durante la deformación siguen siendo planas después de la deformación, y la deformación de todos los elementos en la dirección axial es la misma.

Las fórmulas de Lamé son justas para un cilindro infinitamente largo y para la utilización en las secciones del cilindro bastante alejadas de los fondos, si estos existen. Cuando hay fondos, en las paredes del cilindro aparecen tensiones axiales debidas a las cargas axiales N:

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi(b^2 - a^2)} \quad (B.30)$$

Y en la fórmula de Lamé del desplazamiento aparecerá el sumando  $\Delta u = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r$ , siendo las tensiones  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  las mismas que sin  $\sigma_z$ .

La tensión cortante máxima en cualquier punto del cilindro es igual a la mitad de la diferencia algebraica de las tensiones principales máximas y mínimas en ese punto. Como la tensión longitudinal (axial) es un valor intermedio entre  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$ :

$$\tau = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{p_i - p_o}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} \quad (\text{B.31})$$

#### B.4.1 Cilindro bajo presión interna solamente

Como  $p_o = 0$ , las fórmulas de Lamé se reducen a:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (\text{B.32})$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (\text{B.33})$$

Y muestran que ambas tensiones son máximas en la superficie interior, donde  $r$  tiene valor mínimo.

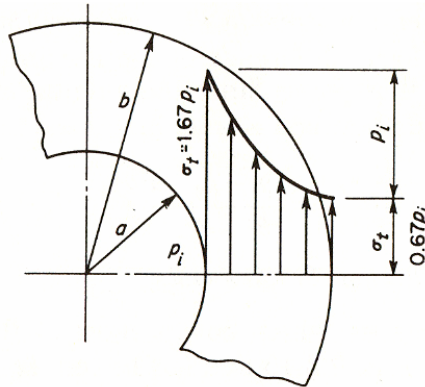
$\sigma_r$  siempre es una tensión de compresión, y menor que  $\sigma_t$ , mientras que  $\sigma_t$  siempre es una tensión de tracción cuyo valor máximo (que se da en la superficie interior) es igual a:

$$\sigma_{t_{\max}} = \frac{p_i (a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \quad (\text{B.34})$$

De la última ecuación se obtiene que  $\sigma_{t_{\max}}$  siempre es numéricamente mayor que la presión interior, pero se aproxima a medida que  $b$  aumenta.

La Fig. B.6 ilustra la variación de la tensión tangencial  $\sigma_t$  a lo largo de la pared de un cilindro cuya relación entre radio exterior e interior es 2 ( $K=b/a=2$ ). Si comparamos la tensión máxima obtenida por las fórmulas de Lamé y la obtenida por las fórmulas de tensión media para cilindros delgados veremos que para paredes delgadas ( $K \sim 1$ ) los valores obtenidos mediante una o mediante otra son similares, mientras que para  $K$  alejados de 1 se diferencian significativamente.





**Fig. B.6 Variación de la tensión tangencial a través de la pared de un cilindro grueso,  $K = b/a = 2$**

Al diseñar cilindros para presiones muy elevadas aparece la necesidad de utilizar materiales con un punto de fluencia muy elevado, o utilizar métodos de diseño y construcción que creen una tensión residual inicial de compresión en la superficie interior, para que soporte las elevadas tensiones aplicadas en este punto. La tensión cortante es máxima en la superficie interior, de la ecuación (B.31) para  $r = a$ , se obtiene

$$\tau = \frac{p_i b^2}{b^2 - a^2} \quad (B.35)$$

#### B.4.2 Deformación de un cilindro de pared gruesa

El desplazamiento radial de cualquier punto de la pared del cilindro puede hallarse con la ecuación (B.24) sustituyendo los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  de las ecuaciones (B.27), resultando:

$$u = \frac{1-\mu}{E} \left[ \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} r \right] + \frac{1+\mu}{E} \left[ \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{r (b^2 - a^2)} \right] \quad (B.36)$$

En el caso de un cilindro sometido únicamente a presión interior, el desplazamiento radial de la superficie interior ( $r = a$ ) y en la superficie exterior ( $r = b$ ) son:

$$u_a = \frac{p_i a}{E} \left( \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \mu \right) \quad (B.37)$$

$$u_b = \frac{2 p_i a^2 b}{E (b^2 - a^2)} \quad (B.38)$$