UNIVERSITAT DE BARCELONA

Contribuciones a la teoría abstracta de modelos

Enrique Casanovas Ruiz-Fornells

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

FACULTAD DE FILOSOFIA Y CIENCIAS DE LA EDUCACION

SECCION DE FILOSOFIA

CONTRIBUCIONES

A LA TEORIA ABSTRACTA DE MODELOS

Tesis Doctoral presentada por

ENRIQUE CASANOVAS RUIZ-FORNELLS

Dirigida por el

Dr. Ignacio Jané Palau

Barcelona, 1987

Agradezco al Dr.
IGNACIO JANE PALAU su
dirección en la realización
de esta tesis doctoral, así
como sus constantes enseñanzas.

Agradezco al Dr.
JESUS MOSTERIN HERAS su
apoyo y aliento. A él le
debo mi interés por la lógica.

INDICE

INTRODUCCION

El tema de esta tesis lo constituyen ciertas extensiones de la lógica de primer orden y, particularmente, las posibles generalizaciones de los teoremas de compacidad y completud a estas extensiones. Durante décadas, la lógica clásica ha sido teoría de tipos o determinados fragmentos de teoría de tipos, esencialmente lógica de primer orden y lógica de segundo orden. Si bien prácticamente la totalidad de las estructuras y clases de estructuras matemáticas usualmente consideradas son caracterizables mediante la lógica de segundo orden, ello no constituye garantía de progreso. Conocemos muy poco la teoría de modelos de la lógica de segundo orden, y no podemos sacar partido de las caracterizaciones que se obtienen con ella. La situación en la lógica de primer orden es diametrálmente opuesta. Poseemos muchos resultados de amplia aplicación que garantizan la existencia de modelos con propiedades especiales e informan sobre la complejidad o simplicidad de las consecuencias de una teoría de primer orden. Sin embargo, muchos otros resultados expresan las propias limitaciones de la lógica de primer orden y la mayoría de las estructuras matemáticas interesantes no son caracterizables mediante ella. Así pues, los dos fragmentos principales de la lógica clásica resultaban ser, por distintas razones, insuficientes.

Esta situación condujo a la búsqueda de extensiones de la lógica de primer orden que poseyeran mayor poder expresivo pero conservaran el mayor número posible de propiedades de la lógica de primer orden. Es natural que la ganancia en poder expresivo o potencia lógica redunde en pérdida de simplicidad de la lógica y , en definitiva, en merma de resultados de amplia aplicación. Pero también es posible que existan lógicas lo suficientemente potentes y simples como para merecer adecuada atención. Mostowski formuló (en Mostowski (1957)) con claridad esta pretensión de encontrar extensiones manejables de la lógica de primer orden, y propuso estudiar la posibilidad de añadir nuevos cuantificadores a la lógica de primer orden para poder expresar conceptos tales como infinitud o numerabilidad. Así, por ejemplo, es posible introducir un cuantificador Q_0 con el cual se puedan construir fórmulas del tipo $Q_0 x\ \varphi(x)$, análogamente a como se obtienen $\exists x \varphi(x)$ o $\forall x \varphi(x)$, y cuyo significado sea que hay infinitos objetos que verifican $\varphi(x)$. De modo independiente, Tarski (véase Tarski (1958)) , llamó la atención sobre la posibilidad de aumentar el poder expresivo de la lógica de primer orden permitiendo el uso de sentencias de longitud infinita. De este modo surgieron las lógicas infinitarias . $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, por ejemplo, posee dos conectores generalizados $\bigwedge$, $\bigvee$ para la conjunción y la disyunción, respectivamente . Si Σ es un conjunto numerable de fórmulas de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, tanto $\bigwedge\Sigma$ como $\bigvee\Sigma$ son fórmulas de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Este recurso de construcción de fórmulas se suma, entonces, a los habituales de la lógica de primer orden. El significado de $\bigwedge\Sigma$ y $\bigvee\Sigma$ es el heredado de la conjunción y de la disyunción de primer orden : $\bigwedge\Sigma$ es verdadero en una estructura cuando son verdaderas todas las sentencias de Σ y $\bigvee\Sigma$ es verdadero cuando alguna de las sentencias de Σ lo es.

Así surgió una pluralidad de lógicas cuyas propiedades y aplicaciones fueron, y son todavía, objeto de gran interés en lógica matemática. Ciertos teoremas lógicos de primer orden se formularon con generalidad de manera que tuviera sentido preguntarse si otras lógicas los verificaban. El teorema de compacidad, por ejemplo, que garantiza que todo conjunto de sentencias de primer orden es satisfacible si todos sus subconjuntos finitos lo son, o el teorema de Löwenheim-Skolem, que asegura que toda sentencia de primer orden satisfacible posee un modelo numerable, son aplicables a otras lógicas. La lógica $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ cumple el teorema de Löwenheim-Skolem , pero no el teorema de compacidad (véase Keisler (1971)). La extensión de la lógica de primer orden, $\mathcal{L}_{Q_1}$, que se obtiene al agregar un cuantificador que exprese la innumerabilidad ($Q_1 x\ \varphi(x)$ significa que el conjunto de los objetos que satisfacen $\varphi(x)$ es no numerable) , cumple el teorema de compacidad (para conjuntos numerables de sentencias) pero no el teorema de Löwenheim - Skolem (véase Bell & Slomson (1969)). Pero junto a los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem, muchos otros teoremas de la lógica de primer orden, como teoremas de interpolación, teoremas de definibilidad, teoremas de completud, etc., se enunciaron con la generalidad necesaria para poder ser teoremas de otras lógicas.

Se produjo un natural interés en determinar qué tienen en común todas las lógicas conocidas y qué otras lógicas pueden ser halladas . Lindström (en Lindström (1969)) precisó el concepto general de lógica de manera que bajo él cayeran las diversas lógicas conocidas y , simultáneamente, introdujo un concepto comparativo entre lógicas (comparación respecto a poder expresivo) . Mostró que no es posible obtener ninguna extensión propia de la lógica de primer orden que cumpla los teoremas de compacidad y Löwenheim - Skolem o los teoremas de completud y Löwenheim - Skolem . Así surgió la teoría abstracta de modelos. Es el estudio del concepto de lógica abstracta, concepto que pretende ser lo bastante amplio como para acoger a las diversas manifestaciones genuinas y , al mismo tiempo, lo bastante estricto como para rechazar casos patológicos. El objetivo es obtener resultados que permitan conocer mejor las lógicas que ya poseen carta de naturaleza y obtener nuevas lógicas con propiedades adecuadas para tratar ciertos temas o ámbitos matemáticos.

Hay otra manera de generalizar la lógica de primer orden, manera que se ejemplifica fundamentalmente en la llamada ω -lógica. La ω -lógica es, simplemente, lógica de primer orden reforzada con nuevos conceptos lógicos relativos a los números naturales. Hay diversas versiones de ω-lógica, pues hay diversas maneras de conceptualizar los números naturales. Consideremos ahora la versión asociada al modelo

$$\mathbb{N} = \langle \omega , 0 , S , + , \cdot \rangle \quad .$$

La ω-lógica posee un predicado N para el conjunto ω de los números naturales, signos funcionales $\mathbf{S}$, $\mathbf{+}$, $\bullet$ para las correspondientes operaciones S, +, $\cdot$ y una constante , $\mathbf{0}$, para denotar al número **0** . Con los signos $\mathbf{0}$ y $\mathbf{S}$ podemos obtener un nombre , $\bar{n} = \mathbf{S} \ldots \mathbf{S0}$ (n veces) , para cada número natural n . En lógica de primer orden, cualquier teoría consistente formulada en un lenguaje que contenga al menos los signos N, $\mathbf{0}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{+}$, $\bullet$, posee modelos en los que estos signos se interpretan definiendo una estructura no isomorfa a $\mathbb{N}$. Concretamente posee modelos en los que N no se interpreta como el conjunto de las denotaciones de los términos $\{ \bar{n} : n \in \omega \}$. En ω-lógica no se toman en consideración estos modelos. A diferencia de lo que ocurre en lógicas abstractas, la relación de satisfacción no se establece entre todas las estructuras de un determinado tipo de semejanza y las correspondientes sentencias del lenguaje de la lógica, sino que se tienen en cuenta únicamente aquellas estructuras en las que los signos N, $\mathbf{0}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{+}$, $\bullet$, se interpretan determinando un submodelo isomorfo a $\mathbb{N}$. Estas estructuras se llaman ω-modelos. No tener en cuenta las estructuras en las que estos signos poseen interpretaciones anómalas , significa admitir que estos signos son lógicos, es decir, con significado fijo. La relación de consecuencia propia de ω-lógica, $\models_{\omega}$, se define en términos de ω-modelos, de manera que $\Sigma \models_{\omega} \sigma$ cuando todo ω-modelo de Σ es modelo de σ .

La ω-lógica puede ser tratada como un caso particular de lógica abstracta, pero a costa de desnaturalizarla. Su objeto no es tanto caracterizar estructuras y clases de estructuras como potenciar la relación de consecuencia de primer orden en aquellos temas en los que los números naturales no son investigados sino usados como instrumento para estudiar otros ámbitos. Por ejemplo, posee especial interés su aplicación al análisis (a la aritmética de segundo orden).Las teorías del análisis se formulan, además de con los signos N , 0 , S , + , • , con un predicado ε para la relación de pertenencia entre números naturales y conjuntos de números naturales. Poseen diversos axiomas, como el principio de extensionalidad, el principio de inducción, el axioma de comprensión y , eventualmente, ciertas formas del axioma de elección. Estas teorías tienen modelos que no son ω-modelos, pero esto se considera un defecto irremediable debido a la utilización de la lógica de primer orden. Los modelos que interesan son aquellos en los que los signos N , 0 , S , + , • se interpretan, salvo isomorfía , como en $\mathbb{N}$. Pero éstos son precisamente los ω-modelos. Las consecuencias de las teorías del análisis que se intentan conocer son los enunciados verdaderos en todos los ω-modelos de las teorías, y éstas son las consecuencias en ω-lógica de las teorías. Estas consecuencias no son obtenibles en lógica de primer orden, ni siquiera añadiendo a la teoría como conjunto de nuevos axiomas todos los enunciados verdaderos en $\mathbb{N}$ (relativizados a N) . A esto puede replicarse que pueden obtenerse dichas consecuencias caracterizando el modelo $\mathbb{N}$ mediante la lógica de segundo orden. Pero esta no es una buena solución, pues no poseemos instrumentos para extraer las consecuencias deseadas de esa axiomatización. Y, sin embargo, sí poseemos dichos instrumentos en ω-lógica. Las consecuencias en ω-lógica son las obtenibles mediante las reglas de inferencia de primer orden y una regla adicional, la ω-regla, que permite inferir $\forall x(Nx \rightarrow \varphi(x))$ de las infinitas premisas $\varphi(\bar{0})$, $\varphi(\bar{1})$,...., $\varphi(\bar{n})$,... .

A cada estructura $\mathfrak{M}$ corresponde una lógica análoga a la ω-lógica : la $\mathfrak{M}$-lógica . Posee la misma sintaxis que la lógica de primer orden pero los signos propios de $\mathfrak{M}$ se consideran ahora como signos lógicos. Sólo se consideran en $\mathfrak{M}$-lógica los modelos en los que estos signos (y un predicado monádico U fijado de antemano) se interpretan definiendo un modelo isomorfo a $\mathfrak{M}$. Estos son los $\mathfrak{M}$-modelos. La $\mathfrak{M}$-lógica es la lógica apropiada para el estudio de temas en los que los conceptos relativos a $\mathfrak{M}$ se quieren usar con significado fijo.

Consideremos, por ejemplo, el estudio de los espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathfrak{R}$ de los números reales. La teoría de espacios vectoriales suplementada con la teoría completa de $\mathfrak{R}$ (relativizada a un predicado) posee modelos en los que el cuerpo base **no** es isomorfo a $\mathfrak{R}$. En la $\mathfrak{R}$-lógica los conceptos relativos a los números reales se consideran conceptos lógicos. Los modelos de la teoría de espacios vectoriales en $\mathfrak{R}$-lógica poseen siempre un cuerpo base isomorfo a $\mathfrak{R}$. Diferirán , únicamente, en cuestiones puramente vectoriales. Los modelos que se distinguen por su cuerpo base pueden ser interesantes a efectos de obtener información sobre $\mathfrak{R}$, pero no para el estudio específico de los espacios vectoriales sobre $\mathfrak{R}$.

Otra aplicación, posiblemente fructífera, de la lógica asociada al cuerpo de los números reales es el estudio de las teorías físicas, particularmente las teorías mecánicas . Si se formulan en lógica de primer orden, estas teorías poseen modelos en los que los conceptos relativos a $\mathfrak{R}$ se interpretan anómalamente, por ejemplo, como cuerpo no arquimediano. Sin embargo, tratadas en $\mathfrak{R}$-lógica , los modelos sólo pueden diferir en la interpretación de los conceptos puramente mecánicos.

De modo más general, no sólo a cada estructura $\mathfrak{M}$, sino también a cada clase de estructuras cerrada bajo isomorfía, K , corresponde una lógica : la K-lógica. Posee un predicado monádico, U , y los signos propios de K como signos lógicos, además de los usuales de la lógica de primer orden. Los K-modelos son las estructuras en las que la interpretación de U y las interpretaciones de los signos de K constituyen un modelo de K . La relación de consecuencia, $\models_K$, se define de modo análogo a $\models_\omega$: $\Sigma \models_K \sigma$ si y sólo si todo K-modelo de Σ es modelo de σ .

Por ejemplo, la clase WO de los buenos órdenes determina una lógica, $\mathcal{L}_{WO}$, en la que el signo de orden , $<$, es un signo lógico. Los WO-modelos, o modelos bien ordenados, son aquellas estructuras $\mathfrak{A}$ en las que la relación $<^{\mathfrak{A}}$ (restringida a $U^{\mathfrak{A}}$) es un buen orden del conjunto $U^{\mathfrak{A}}$. La relación de consecuencia correspondiente, $\models_{WO}$, se define en términos de modelos bien ordenados : $\Sigma \models_{WO} \sigma$ si y sólo si todo modelo bien ordenado de Σ es un modelo de σ . La clase WO no es caracterizable en lógica de primer orden, pero el conjunto de los enunciados verdaderos en todos los buenos órdenes posee un conjunto recursivo de axiomas, Δ . Pues bien, no es suficiente con agregar Δ^U (la relativización de los axiomas de Δ a U) a un conjunto T de premisas para obtener las consecuencias de T en $\mathcal{L}_{WO}$, es decir, el conjunto de enunciados verdaderos en todos los modelos bien ordenados de T . La razón es que si T es recursivamente enumerable, también es recursivamente enumerable el conjunto de consecuencias en primer orden de $T \cup \Delta^U$, pero ciertos conjuntos recursivamente enumerables poseen un conjunto de consecuencias en $\mathcal{L}_{WO}$ que no es recursivamente enumerable.

Las K-lógicas constituyen el tema de estudio de esta tesis y , de modo especial, las diversas versiones de los teoremas de completud y compacidad aplicadas a K-lógicas. En el primer capítulo se introducen las lógicas abstractas y las K-lógicas. Tras la introducción, en el segundo apartado, se definen las lógicas abstractas al modo generalmente aceptado y se discuten ciertas propiedades adicionales que conducen al concepto más restrictivo de lógica regular. Las lógicas regulares son lógicas abstractas que verifican ciertas condiciones de clausura sintáctica típicas de la lógica de primer orden. En el apartado tercero se introduce el concepto de comparación de poder expresivo de lógicas abstractas. En el cuarto apartado se definen los cuantificadores de Lindström, que permiten establecer un teorema de representación para lógicas regulares. En el quinto apartado se introducen las K-lógicas y las $\mathfrak{M}$-lógicas y se comparan con las lógicas abstractas. Finalmente, en el sexto apartado, se revisan los resultados conocidos sobre completud y compacidad para lógicas abstractas.

El interés específico por los teoremas de completud y compacidad proviene de la siguiente reflexión : en la medida en que entendemos las K-lógicas como un refuerzo de la lógica de primer orden en sus aplicaciones a ciertos temas, los problemas que más frecuentemente se pueden plantear son obtener condiciones para que un conjunto de sentencias tenga un K-modelo y obtener información sobre las consecuencias en K-lógica de un conjunto de premisas. El teorema de compacidad es el instrumento usual para resolver el primer tipo de problemas en lógica de primer orden y el teorema de completud otro tanto para el segundo tipo de problemas.

No es frecuente que las lógicas abstractas o las K-lógicas cumplan el teorema de compacidad en su versión irrestricta, pero sí verifican , en ocasiones, ciertas versiones más débiles del mismo, particularmente el teorema de ω -compacidad o compacidad para conjuntos numerables de sentencias.

El teorema de completud posee dos versiones ya en la lógica de primer orden : completud para validez y completud para consecuencia. En cualquiera de ambas versiones, su formulación abstracta aplicable a otras lógicas posee dos lecturas : existencia de un cálculo y existencia de un cálculo efectivo. La lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ posee un cálculo pero no se le aplican consideraciones de efectividad, pues el conjunto de sentencias de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ en cualquier tipo de semejanza numerable es no numerable. No hay un concepto general de cálculo aplicable a cualquier lógica. La generalización de los teoremas de completud se ha desarrollado de acuerdo con la segunda lectura, por criterios de efectividad. Así, el teorema de completud para validez se formula como la condición de que en todo tipo de semejanza recursivo el conjunto de sentencias válidas sea recursivamente enumerable, y el teorema de completud para consecuencia como la condición de que el conjunto de consecuencias de un conjunto recursivamente enumerable de premisas sea también recursivamente enumerable. Esta es la lectura del teorema de completud que aparece en los teoremas de Lindström.

En lógica de primer orden, las distintas versiones del teorema de completud tienen una estrecha relación con el teorema de compacidad, que puede resumirse en la ecuación :

(1) Completud para consecuencia = Compacidad + Completud para validez.

En la lectura efectiva de esta ecuación debería sustituirse "Compacidad " por "Compacidad recursiva " , es decir, compacidad para conjuntos recursivamente enumerables.

Esta ecuación rige también para cualquier lógica abstracta regular, pero además cierto tipo de lógicas abstractas regulares cumplen adicionalmente que en todo tipo de semejanza finito :

(2) Completud para consecuencia = Completud para validez.

Los argumentos empleados para establecer (1) para lógicas regulares dependen esencialmente del teorema de incompletud de Gödel y de una equivalencia entre compacidad recursiva y caracterizabilidad (RPC_d) del orden $\langle \omega, < \rangle$ de los números naturales. Para (2) se emplea adicionalmente una generalización de un teorema de Craig & Vaught según el cual todo conjunto recursivo de sentencias de tipo de semejanza finito y todos cuyos modelos sean infinitos es axiomatizable mediante una única sentencia que contiene ciertos predicados adicionales.

Los objetivos de esta tesis eran investigar la validez de (1) y (2) para K-lógicas y , adicionalmente, investigar también las relaciones entre las versiones recursiva y numerable del teorema de compacidad.

En el segundo capítulo se abordan directamente estos problemas. En primer lugar, se establece que los argumentos que se usan para justificar (1) y (2) para lógicas abstractas no son aplicables a K-lógicas, pues la equivalencia entre compacidad recursiva y caracterizabilidad de $\langle \omega, < \rangle$ no vale para K-lógicas. Se obtiene, sin embargo, una equivalencia entre compacidad recursiva y caracterizabilidad (APC_d) de las estructuras finitas. Esta equivalencia, así como otros resultados posteriores, se establecen mediante variaciones sobre la prueba original del teorema antes mencionado de Craig & Vaught. En virtud de esta nueva equivalencia y de un teorema de indecidibilidad de Trahtenbrot se muestra que la ecuación (1) es válidad para K-lógicas. Posteriormente se muestra que la ecuación (2) vale con toda generalidad (incluso para tipos de semejanza infinitos) en toda K-lógica cuyo tipo de semejanza básico (el tipo de semejanza de la clase K) sea finito. Se muestra a continuación que esto no es necesariamente así si el tipo de semejanza básico es infinito. Concretamente, una cierta versión de ω-lógica resulta ser completa para validez pero no para consecuencia. Finalmente, se obtiene un ejemplo de una K-lógica que verifica la versión recursiva del teorema de compacidad aunque no la versión numerable.

El tercer capítulo está destinado a las distintas versiones del teorema de compacidad para $\mathfrak{M}$-lógicas. Surgió de una pregunta sobre posibles mejoras en resultados ya obtenidos. En el segundo capítulo se muestra que hay una K-lógica que verifica la versión recursiva del teorema de compacidad pero no la versión numerable. Se trata, sin embargo, de un K-lógica que no es una $\mathfrak{M}$-lógica (en K no hay un sólo modelo salvo isomorfía). El interrogante planteado era entonces si existía alguna $\mathfrak{M}$-lógica con las mismas propiedades. La consideración del problema reveló un estrecho paralelismo entre compacidad de $\mathfrak{M}$-lógicas y saturación de los correspondientes modelos. Se ofrece en este tercer capítulo una caracterización de compacidad recursiva y ω-compacidad para $\mathfrak{M}$-lógicas asociadas a modelos numerables : corresponden, respectivamente, a la saturación recursiva y ω-saturación del modelo en cuestión. Ello resuelve la cuestión planteada : sí hay $\mathfrak{m}$-lógicas que verifican la versión recursiva del teorema de compacidad pero no la versión numerable. El resto del capítulo está dedicado a analizar otras versiones del teorema de compacidad para $\mathfrak{m}$-lógicas asociadas a modelos no numerables.

El cuarto y último capítulo trata tres casos particulares de K-lógicas : ω -lógica, lógica del buen orden y lógica de los números reales. Ninguna de ellas cumple el teorema de completud, pero en cada caso se puede afinar este resultado, caracterizando la complejidad de las consecuencias de un conjunto recursivamente enumerable de premisas en términos de definibilidad del conjunto de números naturales que representan a las consecuencias. Se aplican después los resultados obtenidos en capítulos previos para obtener también caracterizaciones de la complejidad del conjunto de las fórmulas válidas en cada una de las K-lógicas consideradas.

TERMINOLOGIA Y PRELIMINARES

1. Teoría de conjuntos

1.1 Nuestra metateoría será la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC). Las referencias a clases propias son siempre eliminables, pero facilitan la exposición.

1.2 Adoptamos la construcción de los ordinales de von Neumann. Un ordinal es, pues, un conjunto transitivo bien ordenado por la relación de pertenencia. Los números naturales son los ordinales finitos y el conjunto de los números naturales, ω, es el primer ordinal infinito. Usamos las variables n,m,k,i,j para números naturales y α, β, ξ, η para ordinales (η será también el tipo de orden de los racionales, pero no se mezclan los usos en ningún contexto). $\xi + 1$ es el sucesor del ordinal ξ, esto es, $\xi + 1 = \xi \cup \{\xi\}$. Un ordinal es límite si es distinto de 0 y no es sucesor de otro ordinal. Usamos en ocasiones suma y producto ordinal y también suma y producto de otros tipos de órdenes. ω^* es el tipo de orden de los enteros negativos, y así $\omega^* + \omega$ es el tipo de orden de los enteros.

1.3 Hacemos uso frecuente de la notación $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ para familias de conjuntos y, particularmente, de $\langle A_\eta \rangle_{\eta < \alpha}$ para secuencias con índices ordinales. Decimos que $\langle A_\eta \rangle_{\eta < \alpha}$ es una cadena si $A_\eta \subseteq A_\xi$ siempre que $\eta < \xi < \alpha$. El conjunto de las funciones con dominio B y valores en A es ${}^{B}A$ y el conjunto de las secuencias finitas de elementos de A es ${}^{\smile\omega}A = \bigcup_{n \in \omega} {}^{n}A$. Si s,t son secuencias finitas de elementos de A, entonces $s^\frown t$ es la concatenación de las secuencias s y t.

1.4 Los números cardinales son los ordinales iniciales, es decir, los ordinales no biyectables con ordinales menores. Usamos κ, λ, μ como variables de números cardinales. κ^+ es el cardinal siguiente a κ . Las notaciones ω_α y $\aleph_\alpha$ se usan indistintamente. Así, $\omega = \aleph_0$ y $\omega^+ = \omega_1 = \aleph_1$.

1.5 Si $\mathfrak{A} = \langle A, \leq_A \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado y $B \subseteq A$, decimos que B es cofinal en $\mathfrak{A}$ cuando para cada $a \in A$ hay un $b \in B$ tal que $a \leq_A b$. Todo orden total posee un suborden cofinal bien ordenado. La cofinalidad de $\mathfrak{A}$ es el menor ordinal que es el tipo de orden de algún subconjunto cofinal de A . Así, la cofinalidad de los números racionales y de los números reales es ω . La cofinalidad de un ordinal η es, entonces, el menor ordinal ξ que es cofinal en η . Un cardinal es regular si coincide con su cofinalidad, y es singular en otro caso.

1.6 El cardinal de un conjunto A es el único cardinal $|A|$ que es biyectable con A . Así, para cada ordinal η y cada cardinal κ , si $\kappa \leq \eta < \kappa^+$, $|\eta| = \kappa$. Usaremos en ocasiones suma, producto y exponenciación cardinal. El contexto diferenciará estas operaciones de las correspondientes operaciones ordinales, de manera que no es preciso introducir una notación especial.

1.7 Los resultados que usaremos pueden obtenerse en Levy (1979) .

2. Teoría de módelos

2.1 El texto de referencia permanente para cuestiones de teoría de modelos será Chang & Keisler (1977) .

2.2 Un tipo de semejanza es un conjunto de constantes, signos funcionales y predicados. Decimos que un tipo de semejanza τ es relacional si sólo contiene predicados. Una estructura $\mathfrak{A}$ de tipo τ es un par $\langle A, \mathfrak{I} \rangle$ donde $A \neq \emptyset$ (es el universo de $\mathfrak{A}$) e $\mathfrak{I}$ es una función que asigna a cada constante de τ un elemento de A , a cada signo funcional n-ádico de τ una función de A^n en A (donde $A^1 = A$ y $A^{n+1} = A^n \times A$) y a cada predicado n-ádico de τ un subconjunto de A^n. Usaremos las notaciones $c^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$, $P^{\mathfrak{A}}$ en vez de $\mathfrak{I}(c)$, $\mathfrak{I}(f)$, $\mathfrak{I}(P)$. Si $\tau = \{r_i : i \in I\}$, entonces las estructuras de tipo τ son de la forma

$$\mathfrak{A} = \langle A, r_i^{\mathfrak{A}} \rangle_{i \in I} \quad .$$

En particular, si $\tau = \{r_1, \ldots, r_n\}$,

$$\mathfrak{A} = \langle A, r_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, r_n^{\mathfrak{A}} \rangle$$

y si τ es el tipo de semejanza nulo ($\tau = \phi$) las estructuras de tipo τ son de la forma

$$\mathfrak{A} = \langle A \rangle \; .$$

Usaremos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$ para estructuras y $A, B, C, D, \ldots$ para los correspondientes universos. $\tau_{\mathfrak{A}}$ será el tipo de semejanza de la estructura $\mathfrak{A}$. Llamaremos indistintamente también modelos a las estructuras.

2.3 Los signos lógicos de primer orden serán los conectores $\neg$, $\wedge$, el igualador, $\approx$, el cuantificador existencial, $\exists$, los paréntesis, (,), y las variables. $\{v_n : n \in \omega\}$ es el conjunto de las variables, pero frecuentemente usaremos también $x, y, z, u, v, w, \ldots$ y $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ para referirnos a variables sin precisar sus índices. Los signos $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, se usarán como abreviaciones. Así, por ejemplo, $(\varphi \rightarrow \psi)$ es $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ y $\forall x \varphi$ es $\neg \exists x \neg \varphi$.

2.4 Las asignaciones en una estructura $\mathfrak{A}$ son las funciones que asignan a cada variable un elemento del universo A de $\mathfrak{A}$. Si s es una asignación en $\mathfrak{A}$, x una variable y $a \in A$, la asignación variante s_a^x se define por:

$$s_a^x(y) = \begin{cases} a \, , & \text{si } x = y \; . \\ s(y) \, , & \text{si } x \neq y \; . \end{cases}$$

2.5 Si s es una asignación en $\mathfrak{A}$ y t un término del tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$, $t^{\mathfrak{A}}[s]$ es la denotación de t en $\mathfrak{A}$ bajo s. La notación "$t(x_1, \ldots, x_n)$" indica que las variables del término $t(x_1,\dots,x_n)$ están entre $x_1,\dots,x_n$, en cuyo caso $t(x_1,\dots,x_n)^{\mathfrak{A}}[s]$ sólo depende de los valores $a_1,\dots,a_n$ de $x_1,\dots,x_n$ en s . Usamos, en ese caso, la notación

$$"t(x_1,\dots,x_n)^{\mathfrak{A}}[x_1/a_1,\dots,x_n/a_n]"$$

para referirnos a la denotación de t en $\mathfrak{A}$ bajo s . Si no hay ambigüedad sobre las variables escribimos simplemente

$$"t(x_1,\dots,x_n)^{\mathfrak{A}}[a_1,\dots,a_n]" .$$

En particular, si t no posee variables, $t^{\mathfrak{A}}$ será la denotación de t en $\mathfrak{A}$ (independiente de asignaciones).

Análogamente, si φ es una fórmula de tipo $\tau_{\mathfrak{A}}$, " $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ " significa que φ es satisfecha en $\mathfrak{A}$ bajo s y la notación " $\varphi(x_1,\dots,x_n)$" indica que las variables libres de $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ están entre $x_1,\dots,x_n$. En ese caso, el resultado $\mathfrak{A} \models \varphi(x_1,\dots,x_n)[s]$ únicamente depende de los valores $a_1,\dots,a_n$ de $x_1,\dots,x_n$ en s . Escribimos en ese caso

$$" \mathfrak{A} \models \varphi(x_1,\dots,x_n) \ [x_1/a_1,\dots,x_n/a_n] "$$

y , si no hay ambigüedad sobre las variables, ponemos

$$" \mathfrak{A} \models \varphi(x_1,\dots,x_n)[a_1,\dots,a_n] " .$$

Si φ no posee variables libres, es decir, si φ es una sentencia, escribimos simplemente " $\mathfrak{A} \models \varphi$ " .

2.6 La notación " $\varphi(x_1,\dots,x_n)^{\mathfrak{A}}$ " se usará para referirse a la relación n-ádica

$$\{ \langle a_1,\dots,a_n \rangle \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi(x_1,\dots,x_n) \ [x_1/a_1,\dots,x_n/a_n] \}.$$

Decimos, entonces, que una relación n-ádica R en A es definible en $\mathfrak{A}$ si hay una fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ tal que

$$R = \varphi(x_1,\dots,x_n)^{\mathfrak{A}} .$$

2.7 Consideraremos la sustitución de variables por términos definida como sustitución simultánea y sin colisión de variables (como en Ebbinghaus & Flum & Thomas (1978), pág. 63). Así, si $x_1,\dots,x_n$ son variables distintas y $t_1,\dots,t_n$ son términos , la fórmula sustituida,

$$\varphi\left(\begin{smallmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{smallmatrix}\right)$$

tiene la propiedad:

$$\mathfrak{A} \models \varphi\left(\begin{smallmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{smallmatrix}\right)[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi\left[s\begin{smallmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1^{\mathfrak{A}}[s] & \dots & t_n^{\mathfrak{A}}[s] \end{smallmatrix}\right].$$

Este último resultado es el teorema de la sustitución. Si no hay ambigüedad sobre las variables usamos la notación

" $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ "

para referirnos a la fórmula sustituida.

2.8 Si $\mathfrak{A}$ es una estructura de tipo τ y $\tau_0 \subseteq \tau$, la restricción de $\mathfrak{A}$ a tipo τ_0 es la estructura $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau_0$ de tipo τ_0 cuyo universo es A y que interpreta cada signo $r \in \tau_0$ del mismo modo que $\mathfrak{A}$, esto es,

$$r^{\mathfrak{A} \upharpoonright \tau_0} = r^{\mathfrak{A}} .$$

Y si $\mathfrak{A}$ es una estructura de tipo τ y $\mathfrak{B}$ es una estructura de tipo τ_1 y ocurre que $\tau \subseteq \tau_1$ y $\mathfrak{B} \upharpoonright \tau = \mathfrak{A}$, decimos que $\mathfrak{B}$ es una expansión de $\mathfrak{A}$ (a tipo τ_1) .

Admitiremos que toda estructura $\mathfrak{A}$ tiene asociado un conjunto de constantes distintas , $\{c_a : a \in A\}$, que no están en el tipo de semejanza τ de $\mathfrak{A}$. Entonces, si $X \subseteq A$, la estructura

$$\langle \mathfrak{A}\ a \rangle_{a \in X}$$

es la expansión de $\mathfrak{A}$ a tipo $\tau \cup \{c_a : a \in X\}$ en la que para cada $a \in X$,

$$c_a^{\langle \mathfrak{A}\ a \rangle_{a \in X}} = a .$$

Si $X = \{a_\eta : \eta < \xi\}$, usamos la notación " $\langle \mathfrak{A}\ a_\eta \rangle_{\eta < \xi}$ " para la expansión y " c_η " para la constante correspondiente a a_η . Así, para cada $\eta < \xi$,

$$c_\eta^{\langle \mathfrak{A}\, a_\eta \rangle_{\eta<\xi}} = a_\eta \ .$$

Si X es finito, digamos $X = \{a_1,\ldots,a_n\}$, la notación será

$$" \langle \mathfrak{A}\ a_1,\ldots,a_n \rangle " \ .$$

2.9 Los términos subestructura y extensión se usan con su significado habitual . La notación para expresar que $\mathfrak{B}$ es una subestructura de $\mathfrak{A}$ es " $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$" .

Si $\mathfrak{A}$ es una estructura de tipo τ , $\tau_0 \subseteq \tau$ y $B \subseteq A$, decimos que B es τ_0 -cerrado en $\mathfrak{A}$ si $B \neq \phi$, para cada constante $c \in \tau_0$, $c^{\mathfrak{A}} \in B$ y para cada signo funcional n-ádico $f \in \tau_0$ y cualesquiera $b_1,\ldots,b_n \in B$,

$$f^{\mathfrak{A}}(\langle b_1,\ldots,b_n\rangle) \in B \ .$$

En particular, si B es τ -cerrado , B es el universo de una subestructura de $\mathfrak{A}$, la subestructura $\mathfrak{A} \restriction B$. Si, adicionalmente, hay un predicado monádico $U \in \tau$ tal que $B = U^{\mathfrak{A}}$, a cada sentencia φ de tipo τ corresponde una relativización φ^U (donde $(\exists x\, \varphi)^U = \exists x(Ux \wedge \varphi^U)$) que verifica

$$\mathfrak{A} \models \varphi^U \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \restriction B \models \varphi \ .$$

2.10 Consideraremos no sólo relativizaciones a un predicado monádico, sino también relativizaciones a fórmulas . Esto puede precisarse como se indica a continuación :

Sea $\psi(y,x_1,\ldots,x_n)$ una fórmula de un tipo de semejanza τ y sea $\tau_0 \subseteq \tau$. La relativización de las fórmulas de tipo τ_0 a $\psi(y,x_1,\ldots,x_n)$ (respecto a la variable y) se define por recursión :

(i) $\varphi^{\psi(y,x_1,\ldots,x_n)} = \varphi$, si φ es atómica .

(ii) $(\neg\varphi)^{\psi(y,x_1,\ldots,x_n)} = \neg\varphi^{\psi(y,x_1,\ldots,x_n)}$.

(iii) Si $\varphi = (\Theta \wedge \chi)$,

$$\varphi^{\psi(y,x_1,\ldots,x_n)} = (\Theta^{\psi(y,x_1,\ldots,x_n)} \wedge \chi^{\psi(y,x_1,\ldots,x_n)}).$$

(iv) Si $\varphi = \exists u \Theta$,

$$\varphi^{(y,x_1,\ldots,x_n)} = \exists y(\psi(y,x_1,\ldots,x_n) \wedge \Theta\binom{u}{y}^{\psi(y,x_1,\ldots,x_n)}).$$

De este modo, si $\mathfrak{A}$ es una estructura de tipo τ, $\tau_0 \subseteq \tau$, $a_1,\ldots,a_n \in A$ y

$$B = \{a \in A : \mathfrak{A} \models \psi(y,x_1,\ldots,x_n)\,[a,a_1,\ldots,a_n]\}$$

es τ_0 -cerrado, tenemos que para cada sentencia φ de tipo τ_0:

$$\mathfrak{A} \models \varphi^{\psi(y,x_1,\ldots,x_n)}[a_1,\ldots,a_n] \text{ si y sólo si } (\mathfrak{A}\restriction\tau_0)|B \models \varphi.$$

2.11 La notación " $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ " significa que $\mathfrak{B}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{A}$ (y $\mathfrak{A}$ una extensión elemental de $\mathfrak{B}$) . Una cadena elemental es una secuencia $\langle \mathfrak{A}_\eta \rangle_{\eta<\alpha}$ de estructuras del mismo tipo de semejanza τ tales que

$$\mathfrak{A}_\eta \prec \mathfrak{A}_\xi \quad \text{siempre que} \quad \eta \leq \xi < \alpha .$$

La unión de la cadena es la estructura $\mathfrak{A} = \bigcup_{\eta<\alpha} \mathfrak{A}_\eta$ cuyo universo es $A = \bigcup_{\eta<\alpha} A$ y que interpreta los signos de de acuerdo con lo siguiente:

$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}_\eta}$ para cada constante c de τ con independencia de qué índice sea η .

$f^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{\eta<\alpha} f^{\mathfrak{A}_\eta}$ para cada signo funcional de τ .

$P = \bigcup_{\eta<\alpha} P^{\mathfrak{A}_\eta}$ para cada predicado de τ .

De acuerdo con un famoso resultado de Tarski, para cada $\eta < \alpha$,

$$\mathfrak{A}_\eta \prec \bigcup_{\eta<\alpha} \mathfrak{A}_\eta \quad .$$

2.12 Usaremos la notación " $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ " para indicar que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas. " $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{B}$ " significa que $\mathfrak{A}$ es isomorfa a una subestructura de $\mathfrak{B}$, es decir, que $\mathfrak{A}$ es inmersible en $\mathfrak{B}$. Similarmente, " $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$" significa que $\mathfrak{A}$ es isomorfa a una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$, es decir, que $\mathfrak{A}$ es elementalmente inmersible en $\mathfrak{B}$.

2.13 Usamos el mismo signo, como es habitual, para la relación de satisfacción , $\mathfrak{A} \models \sigma$, que para la consecuencia, $\Sigma \models \sigma$, y la validez , $\models \sigma$. La relación de equivalencia lógica entre sentencias y la relación de equivalencia elemental entre estructuras, se designará con " $\equiv$ " . Así, $\varphi \equiv \psi$ si y sólo si $\models (\varphi \longleftrightarrow \psi)$, y $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ satisfacen las mismas sentencias.

2.14 Si Σ es un conjunto de sentencias, decimos que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ si para cada $\sigma \in \Sigma$, $\mathfrak{A} \models \sigma$. Una teoría es un conjunto de sentencias cerrado bajo consecuencia. Una teoría Σ es completa si para cada sentencia σ , $\Sigma \models \sigma$ o $\Sigma \models \neg\sigma$. La teoría completa de una estructura $\mathfrak{A}$, Th($\mathfrak{A}$) , es el conjunto de sentencias verdaderas en $\mathfrak{A}$. De este modo,

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) .$$

2.15 Para conjuntos de fórmulas, la notación " $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ " tiene el mismo significado que para fórmulas, a saber , que las variables libres de las fórmulas de $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ están entre $x_1,\ldots,x_n$. Decimos que una estructura $\mathfrak{A}$ realiza $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ si hay una n-tupla $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \Sigma(x_1,\ldots,x_n)\ [a_1,\ldots,a_n] ,$$

es decir, si para cada $\sigma(x_1,\ldots,x_n) \in \Sigma(x_1,\ldots,x_n)$,

$$\mathfrak{A} \models \sigma(x_1,\ldots,x_n)\ [a_1,\ldots,a_n] .$$

En otro caso, decimos que $\mathfrak{A}$ omite $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$.

2.16 A menudo consideraremos teorías relacionadas con los números naturales . El tipo de semejanza numérico será

$$\tau_{\mathbb{N}} = \{ 0 , S , + , \cdot , < \}$$

donde 0 es una constante, S es un signo funcional monádico , $+$ y $\cdot$ son signos funcionales diádicos y $<$ es un predicado diádico . En $\tau_{\mathbb{N}}$ podemos obtener un nombre, $\bar{n}$, para cada número natural n de acuerdo con :

$$\bar{0} = 0$$

$$\overline{n+1} = S\,\bar{n} \ .$$

La estructura $\mathbb{N}$ de los números naturales posee el tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ y es

$$\mathbb{N} = \langle \omega, 0, S, +, \cdot, < \rangle$$

donde se entiende que $0^{\mathbb{N}} = 0$, $S^{\mathbb{N}} = S$ (S es la función de sucesión en ω) , $+^{\mathbb{N}} = +$, $\cdot^{\mathbb{N}} = \cdot$ y $<^{\mathbb{N}} = <$ (suma, producto y orden habituales de ω) .

La teoría completa de números, TCN , es el conjunto de las sentencias verdaderas en $\mathbb{N}$, esto es,

$$\mathrm{TCN} = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \ .$$

La aritmética de Peano , AP, es el conjunto de consecuencias de los siguientes axiomas :

(1) $\forall x \ \neg\, 0 \approx Sx$

(2) $\forall xy\, (Sx \approx Sy \longrightarrow x \approx y)$

(3) $\forall x \quad x + 0 \approx x$

(4) $\forall xy \quad x + Sy \approx S(x + y)$

(5) $\forall x \quad x \cdot 0 \approx 0$

(6) $\forall xy \quad x \cdot Sy \approx x \cdot y + x$

(7) $\forall xy(x < y \longleftrightarrow \exists z(\neg\, z \approx 0 \ \wedge\ x + z \approx y))$

Para cada fórmula $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$,

$(8)_{\varphi}$ $\forall x_1 \dots x_n(\varphi(0, x_1, \dots, x_n) \wedge \forall y(\varphi(y, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \varphi(Sy, x_1, \dots, x_n)) \longrightarrow \forall y \ \varphi(y, x_1, \dots, x_n)) .$

La teoría Q de Tarski & Mostowski & Robinson será el conjunto de consecuencias de los axiomas (1)-(7) de AP y el axioma :

$$(8)_Q \quad \forall x(\neg x \approx 0 \longrightarrow \exists y\, Sy \approx x\ )$$

Este axioma es consecuencia de AP , pero no del grupo de axiomas (1) - (7) .

2.17 En ocasiones usaremos la lógica de segundo orden o hablaremos sobre ella. Nos referiremos a la lógica de segundo orden con la notación " $\mathcal{L}_{II}$ " . Usaremos letras mayúsculas para las variables de segundo orden (de cualquier número ádico) y también aquí entenderemos que $\forall X \varphi$ es $\neg \exists X \neg \varphi$.

3. <u>Teoría de la recursión</u>

3.1 Los textos de referencia para cuestiones relativas a teoría de la recursión serán Shoenfield (1967) y Rogers (1967).

3.2 Para cuestiones de efectividad, supondremos que los signos lógicos de primer orden son números naturales (en particular, el conjunto de las variables será un conjunto recursivo de números naturales) y que contamos con un tipo de semejanza universal , τ_∞, (es decir, que contiene ω constantes, ω signos funcionales n-ádicos para cada número natural $n \geq 1$, y ω predicados n-ádicos para cada número natural $n \geq 1$) cuyos signos son números naturales y tiene las siguientes propiedades:

(1) El conjunto de las constantes de τ_∞ es recursivo.

(2) El conjunto de los signos funcionales de τ_∞ es recursivo y la relación

$\{ \langle n,k \rangle$: k es un signo funcional n-ádico de $\tau_\infty \}$

es recursiva.

(3) El conjunto de los predicados de τ_∞ es recursivo y la relación

$\{ \langle n,k \rangle$: k es un predicado n-ádico de $\tau_\infty \}$

es recursiva.

Diremos, entonces, que un tipo de semejanza es recursivo si es un subconjunto recursivo de τ_∞. De este modo, las fórmulas de un tipo de semejanza recursivo son secuencias finitas de números naturales.

3.3 Asignamos números naturales a las secuencias finitas (y no nulas) de números naturales, y así, en particular, a las fórmulas de un tipo de semejanza recursivo, mediante la función Gö definida por

$$Gö(s) = p_1^{s(0)+1} \cdot p_2^{s(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_{m+1}^{s(m)+1}$$

si $s \in {}^{m+1}\omega$ y $p_1, \ldots, p_{m+1}$ son los primeros números primos.

Diremos que $Gö(s)$ es el número de Gödel de s. Diremos también que un conjunto de fórmulas Σ de tipo de semejanza recursivo es recursivo si el conjunto de números naturales $\{ Gö(\sigma) : \sigma \in \Sigma \}$ es recursivo. Similarmente para recursivamente enumerable.

3.4 Usaremos las jerarquías aritmética y analítica de conjuntos de números naturales para medir la complejidad de conjuntos de sentencias.

Las siguientes definiciones son para fórmulas de segundo orden del tipo de semejanza numérico $\tau_{\mathbb{N}}$:

(1) Las fórmulas acotadas son las obtenibles de acuerdo con las siguientes reglas:

- Toda fórmula atómica es acotada.

- Si φ, ψ son fórmulas acotadas, $\neg\varphi$ y $(\varphi \wedge \psi)$ son fórmulas acotadas.

- Si φ es una fórmula acotada, $\exists x(x < y \wedge \varphi)$ y $\forall x(x < y \longrightarrow \varphi)$ son fórmulas acotadas.

(2) Las fórmulas Σ_n^0 y Π_n^0 son las obtenibles de acuerdo con :

- Las fórmulas Σ^0_0 y las fórmulas Π^0_0 son las fórmulas acotadas.

- φ es Σ^0_{n+1} si y sólo si hay una fórmula ψ tal que $\varphi = \exists x_1 \dots x_k \psi$ y ψ es Π^0_n.

- φ es Π^0_{n+1} si y sólo si hay una fórmula ψ tal que $\varphi = \forall x_1 \dots x_k \psi$ y ψ es Σ^0_n.

(3) Las fórmulas Σ^1_n y Π^1_n son las obtenibles como se indica:

- Las fórmulas Σ^1_0 y Π^1_0 son las que sólo poseen cuantificación de primer orden.

- φ es Σ^1_{n+1} si y sólo si hay una fórmula ψ tal que $\varphi = \exists X_1 \dots X_k \psi$, donde $X_1, \dots, X_k$ son monádicas y ψ es Π^1_n.

- φ es Π^1_{n+1} si y sólo si hay una fórmula ψ tal que $\varphi = \forall X_1 \dots X_k \psi$, donde $X_1, \dots, X_k$ son monádicas y ψ es Σ^1_n.

Así pues, las fórmulas Σ^0_n y Π^0_n sólo poseen cuantificación de primer orden. Ambos tipos de fórmulas poseen un prefijo de n alternancias de cuantificadores ante una fórmula acotada. Las fórmulas Σ^0_n comienzan con $\exists$ y las Π^0_n comienzan con $\forall$. Las fórmulas Σ^1_n y Π^1_n poseen un prefijo de n alternancias de cuantificaciones de variables monádicas de segundo orden ante una fórmula con sólo cuantificación de primer orden. Las fórmulas Σ^1_n comienzan con $\exists$ y las Π^1_n comienzan con $\forall$.

3.5 Las relaciones analíticas entre números naturales son las definibles en segundo orden en el modelo $\mathbb{N}$, y las aritméticas son las definibles en primer orden en $\mathbb{N}$.

Es bien sabido que las relaciones definibles en $\mathbb{N}$ mediante alguna fórmula de segundo orden son definibles mediante alguna fórmula Σ^1_n y mediante alguna fórmula Π^1_m (en particular, la cuantificación con variables de número ádico $n > 1$

es eliminable en favor de cuantificación con variables monádicas). Análogamente, las relaciones definibles en $\mathbb{N}$ mediante alguna fórmula de primer orden son definibles mediante alguna fórmula Σ^0_n y mediante alguna fórmula Π^0_n. De aquí la subclasificación siguiente:

Para $m \geqslant 1$, $R \subseteq \omega^m$ y $\Gamma = \Sigma^0_n, \Pi^0_n, \Sigma^1_n, \Pi^1_n$

(1) R es Γ si y sólo si R es definible en $\mathbb{N}$ mediante una fórmula Γ.

(2) R es Δ^0_n (Δ^1_n) si y sólo si R es Σ^0_n y Π^0_n (respectivamente, Σ^1_n y Π^1_n).

Resulta así que

(3) R es aritmética si y sólo si hay un $n \in \omega$ tal que R es Σ^0_n (Π^0_n)

(4) R es analítica si y sólo si hay un $n \in \omega$ tal que R es Σ^1_n (Π^1_n).

En particular, las relaciones recursivas son las Δ^0_1 y las recursivamente enumerables las Σ^0_1. Las relaciones Δ^1_1 son las hiperaritméticas. Si bien toda relación aritmética es hiperaritmética, hay relaciones hiperaritméticas que no son aritméticas. Así, por ejemplo, el conjunto de los números de Gödel de las sentencias de primer orden verdaderas en $\mathbb{N}$ es hiperaritmético pero no aritmético.

3.6 Extendemos las nociones Σ^0_n, Π^0_n, etc., a conjuntos de fórmulas de un tipo de semejanza recursivo de acuerdo con lo siguiente:

Para cualquier conjunto de fórmulas, T, de un tipo de semejanza recursivo y para $\Gamma = \Sigma^0_n, \Pi^0_n, \Delta^0_n, \Sigma^1_n, \Pi^1_n, \Delta^1_n$,

(1) T es Γ si y sólo si $\{\text{Gö}(\sigma) : \sigma \in T\}$ es Γ

(2) T es un conjunto aritmético (analítico) si y sólo si $\{Gö(\sigma) : \sigma \in T\}$ es aritmético (respectivamente, analítico).

3.7 Si τ es un tipo de semejanza recursivo, cada término t de tipo τ y cada fórmula φ de tipo τ es una secuencia finita de números naturales y $Gö(t)$, $Gö(\varphi)$ son números naturales . Dado que en el tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ poseemos un nombre , $\bar{n}$, para cada número natural n , podemos definir :

$$\ulcorner\varphi\urcorner = \overline{Gö(\varphi)}$$

$$\ulcorner t\urcorner = \overline{Gö(t)}$$

De acuerdo con esta notación, si , por ejemplo, un conjunto de sentencias T de un tipo de semejanza recursivo τ es Σ^0_n , hay una fórmula Σ^0_n , $\varphi(x)$, tal que para cada número natural m

$$\mathbb{N} \models \varphi(\bar{m}) \quad \text{si y sólo si} \quad m \in \{Gö(\sigma) : \sigma \in T\}$$

y,en particular, para cada sentencia σ de tipo τ ,

$$\mathbb{N} \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner) \quad \text{si y sólo si} \quad \sigma \in T .$$

Extenderemos la notación " $\ulcorner s\urcorner$ " de modo que se aplique también a los signos lógicos y signos de un tipo de semejanza recursivo mediante la convención :

$$\ulcorner\exists\urcorner = \overline{Gö(\langle\exists\rangle)} = \overline{2^{\exists+1}}$$

$$\ulcorner\simeq\urcorner = \overline{Gö(\langle\simeq\rangle)} = \overline{2^{\simeq+1}}$$

etc.

3.8 Toda relación recursiva es representable en la teoría Q de 2.16 (véase Tarski & Mostowski & Robinson (1953)). Esto significa que para cada relación recursiva $R \subseteq \omega^n$ hay una fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ tal que para cualesquiera $m_1,\dots,m_n \in \omega$,

$$\langle m_1,\dots,m_n\rangle \in R \quad \text{si y sólo si} \quad Q \models \varphi(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_n)$$

$$\langle m_1,\dots,m_n\rangle \notin R \quad \text{si y sólo si} \quad Q \models \neg\varphi(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_n) .$$

En particular, si T es un conjunto recursivo de fórmulas de un tipo de semejanza recursivo τ, hay una fórmula $\varphi(x)$ del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ tal que para cada fórmula ψ de tipo τ,

$$\psi \in T \quad \text{si y sólo si} \quad Q \models \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$$

$$\psi \notin T \quad \text{si y sólo si} \quad Q \models \neg\varphi(\ulcorner\psi\urcorner) .$$

En ocasiones nos interesará tratar la representación de conjuntos y relaciones recursivos en otras teorías. Si T es una teoría consistente cuyo tipo de semejanza incluye a $\tau_{\mathbb{N}}$ y posee un predicado monádico, N, y verifica:

(i) $T \models N0$

(ii) $T \models \forall x(Nx \longrightarrow NSx)$

(iii) $T \models \forall xy(\, Nx \wedge Ny \longrightarrow N\, x+y \,\wedge\, N\, x\cdot y\,)$

(iv) Para cada axioma ψ de Q, $T \models \psi^N$

entonces toda relación recursiva es también representable en T. Podemos suponer, además, que la fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ que representa a una relación recursiva R en T tiene todos los cuantificadores relativizados a N y cumple la condición:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) \models Nx_1 \wedge \ldots \wedge Nx_n .$$

3.9 El lema de diagonalización, o lema del punto fijo, establece que si $\varphi(x)$ es una fórmula del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$, hay una sentencia σ del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ tal que

$$Q \models (\,\sigma \longleftrightarrow \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)) .$$

Este lema es aplicable también a teorías T que verifican las condiciones (i) - (iv) de 3.8 y fórmulas $\varphi(x)$ del tipo de semejanza de T (en cuyo caso, σ será una sentencia del tipo de semejanza de T).

CAPITULO I : LOGICAS ABSTRACTAS Y K-LOGICAS

1. INTRODUCCION

La teoría abstracta de modelos, y con ella el concepto de lógica abstracta, surgió como un intento de sistematización de diversas lógicas ya conocidas. Además de la lógica de primer y segundo orden, los ejemplos principales eran las lógicas infinitarias $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ y las extensiones de primer orden mediante cuantificadores de cardinalidad $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ .Definimos a continuación estas lógicas:

1.1 A cada ordinal α corresponde una lógica $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$, la lógica que extiende a la lógica de primer orden mediante el cuantificador Q_α . Las fórmulas de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ en un tipo de semejanza τ son las secuencias finitas de signos obtenibles conforme a las siguientes reglas:

- Toda fórmula atómica de tipo τ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ de tipo τ .
- Si φ y ψ son fórmulas de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$, tanto $\neg\varphi$ como $(\varphi \wedge \psi)$ son fórmulas de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$.
- Si φ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ y x es una variable, tanto $\exists x\varphi$ como $Q_\alpha x\varphi$ son fórmulas de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$.

Hay, pues, una única regla adicional a las de primer orden, la que permite construir $Q_\alpha x\varphi$. Debe entenderse que la variable x está ligada en $Q_\alpha x\varphi$ del mismo modo que en $\exists x\varphi$. Ello permite definir las sentencias de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ con los mismos criterios que en la lógica de primer orden.

La relación de satisfacción $\models_{\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)}$, que abreviaremos con la notación "$\models_{L_\alpha}$" , se establece entre estructuras de tipo τ y sentencias de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ de modo análogo a como se define en la lógica de primer orden.Puede llevarse a cabo esta definición sirviéndose de asignaciones de elementos del universo a las variables con la siguiente regla adicional:

$$\mathfrak{A} \models_{L_\alpha} Q_\alpha x \varphi\ [s] \quad \text{si y sólo si} \quad \aleph_\alpha \leq |\{a \in A : \mathfrak{A} \models_{L_\alpha} \varphi\ [s^x_a]\}|$$

La lectura de $Q_\alpha x\ \varphi$ debe ser entonces : hay al menos $\aleph_\alpha$ objetos que satisfacen φ .

1.2 Los casos más conocidos son $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. En la lógica $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_0)$ el cuantificador Q_0 introduce el concepto de infinitud, pues

$$\mathfrak{A} \models_{L_0} Q_0 x \varphi(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \{a \in A : \mathfrak{A} \models_{L_0} \varphi(x)\,[a]\} \text{ es}$$

infinito.

La sentencia $Q_0 x\ x \approx x$ axiomatiza, entonces, la clase de las estructuras infinitas y $\neg Q_0 x\ x \approx x$ la clase de las estructuras finitas.

En la lógica $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_1)$ se introduce el concepto de no numerabilidad, y con él el de numerabilidad, pues

$$\mathfrak{A} \models_{L_1} Q_1 x \varphi(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \{a \in A : \mathfrak{A} \models_{L_1} \varphi(x)\,[a]\} \text{ es}$$

no numerable

y así

$$\mathfrak{A} \models_{L_1} \neg Q_1 x\ \varphi(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \{a \in A : \mathfrak{A} \models_{L_1} \varphi(x)\,[a]\}$$

es numerable.

1.3 Las extensiones infinitarias de la lógica de primer orden son las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ asociadas a cardinales infinitos κ, λ . El cardinal κ es una cota al tamaño de las conjunciones (y disyunciones) y el cardinal λ es una cota a la longitud de los prefijos de cuantificadores. Consideremos en primer lugar el caso $\lambda = \omega$.

Las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ poseen los mismos signos lógicos que la lógica de primer orden y ,adicionalmente, un conector generalizado $\bigwedge$ para conjunciones no necesariamente finitas (pueden tener también un correspondiente conector $\bigvee$ para disyunciones y es posible prescindir entonces de los conectores finitos $\wedge, \vee$).Poseen una regla sintáctica adicional a las de primer orden:

- Si Σ es un conjunto de menos de κ fórmulas de tipo τ de $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$

$\bigwedge\Sigma$ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$.

La relación de satisfacción, $\models_{L_{\kappa\omega}}$, tiene la siguiente regla semántica adicional:

- $\mathfrak{A} \models_{L_{\kappa\omega}} \bigwedge\Sigma\,[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_{L_{\kappa\omega}} \sigma\,[s]$ para cada $\sigma\in\Sigma$.

Tanto si se define $\bigvee\Sigma = \neg\bigwedge\{\neg\sigma : \sigma\in\Sigma\}$, como si se introduce la disyunción generalizada como signo lógico, se tiene:

$\mathfrak{A} \models_{L_{\kappa\omega}} \bigvee\Sigma\,[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_{L_{\kappa\omega}} \sigma\,[s]$ para alguna $\sigma\in\Sigma$.

En particular, $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ posee conjunciones y disyunciones $\bigwedge\Sigma$, $\bigvee\Sigma$ de conjuntos numerables Σ .Obsérvese que tanto la infinitud como la finitud son expresables en $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ mediante una sóla sentencia, pues si φ_n es la sentencia de primer orden que expresa que "hay al menos n objetos" resulta:

$\mathfrak{A} \models_{L_{\omega_1\omega}} \bigwedge\{\varphi_n : n\in\omega\}$ si y sólo si A es infinito

$\mathfrak{A} \models_{L_{\omega_1\omega}} \bigvee\{\neg\varphi_n : n\in\omega\}$ si y sólo si A es finito.

1.4 La lógica $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ necesita, en el caso $\lambda>\omega$, un conjunto $\{v_\eta : \eta<\lambda\}$ de λ variables. Posee, por lo demás, los mismos signos lógicos que $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ y la siguiente regla sintáctica adicional:

- Si φ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$, ξ es un ordinal menor que λ y $\langle x_\eta\rangle_{\eta<\xi}$ es una secuencia de variables distintas, $\exists\langle x_\eta\rangle_{\eta<\xi}\,\varphi$ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$.

Para la semántica hay que tener en cuenta que el dominio de las asignaciones en una estructura $\mathfrak{A}$ es ahora $\{v_\eta : \eta<\lambda\}$. Si $\langle x_\eta\rangle_{\eta<\xi}$ es una secuencia de variables distintas y $\langle a_\eta\rangle_{\eta<\xi}$ es una secuencia de elementos de A , las asignaciones variantes $s^{\langle x_\eta\rangle_{\eta<\xi}}_{\langle a_\eta\rangle_{\eta<\xi}}$ se definen con criterios análogos a los de s^x_a , de manera que

$$s^{\langle x_\eta\rangle_{\eta<\xi}}_{\langle a_\eta\rangle_{\eta<\xi}}(x) = \begin{cases} a_\eta & \text{si } x = x_\eta \\ s(x) & \text{si para cada } \eta<\xi,\ x\neq x_\eta \end{cases}$$

Entonces, la regla semántica correspondiente a $\exists\langle x_\eta\rangle_{\eta<\xi}\,\varphi$ es :

- $\mathfrak{A} \models_{L_{\kappa\lambda}} \exists\langle x_\eta\rangle_{\eta<\xi}\,\varphi\,[s]$ si y sólo si hay una secuencia $\langle a_\eta\rangle_{\eta<\xi}$ de elementos de A tal que $\mathfrak{A} \models_{L_{\kappa\lambda}} \varphi[s^{\langle x_\eta \rangle_{\eta<\xi}}_{\langle a_\eta \rangle_{\eta<\xi}}]$

El cuentificador $\forall$ puede introducirse mediante reglas análogas o bien mediante la definición: $\forall \langle x_\eta \rangle_{\eta<\xi} \varphi := \neg \exists \langle x_\eta \rangle_{\eta<\xi} \neg \varphi$

Obsérvese, finalmente, que en $\mathcal{L}_{\omega_1\omega_1}$ son caracterizables los buenos órdenes mediante la conjunción de la sentencia σ que caracteriza en primer orden los órdenes totales y la siguiente sentencia de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega_1}$:

$$\neg \exists \langle x_n \rangle_{n\in\omega} \bigwedge \{x_n < x_m : m < n\}$$

1.5 La lógica de primer orden , $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, puede tratarse como caso particular de lógica $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$. Posee conjunciones de conjuntos finitos de fórmulas y prefijos finitos de cuantificación.

2. LOGICAS ABSTRACTAS

Hay un cierto acuerdo sobre las propiedades básicas que caracterizan a las lógicas abstractas, pero también ciertas indecisiones y discrepancias acerca de otras propiedades. Exponemos en primer lugar las propiedades generalmente admitidas.

2.1 Definición : Lógica abstracta.

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{L} = \langle L, \models_L \rangle$ tal que:

(1) L es una función que asigna a cada tipo de semejanza τ una clase $L[\tau]$, la clase de las sentencias de tipo τ de $\mathcal{L}$.

(2) $\models_L$ es una relación, la relación de satisfacción entre estructuras y sentencias de $\mathcal{L}$. Verifica la siguiente condición:

Si $\mathfrak{A} \models_L \varphi$, entonces hay un tipo de semejanza τ tal que $\mathfrak{A}$ es una estructura de tipo τ y $\varphi \in L[\tau]$.

(3) Si τ_1, τ_2 son tipos de semejanza y $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces $L[\tau_1] \subseteq L[\tau_2]$

(4) Si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son estructuras del mismo tipo de semejanza τ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces para cada $\varphi \in L[\tau]$:

$$\mathfrak{A} \models_L \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models_L \varphi$$

(5) Si $\mathfrak{A}$ es una estructura de tipo de semejanza τ_2 y $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces para cada $\varphi \in L[\tau_1]$:

$$\mathfrak{A} \models_L \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \restriction \tau_1 \models_L \varphi$$

(6) Si τ_1, τ_2 son tipos de semejanza y $\rho : \tau_1 \longrightarrow \tau_2$ es una biyección que asigna

- a cada constante $c \in \tau_1$ una constante $\rho(c) \in \tau_2$
- a cada signo funcional n-ádico $f \in \tau_1$ un signo funcional n-ádico $\rho(f) \in \tau_2$
- a cada predicado n-ádico $P \in \tau_1$ un predicado n-ádico $\rho(P) \in \tau_2$

entonces, para cada $\varphi \in L[\tau_1]$ hay una correspondiente $\varphi^\rho \in L[\tau_2]$ tal que para cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo τ_1 :

$$\mathfrak{A}^{\rho} \models_{L} \varphi^{\rho} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models_{L} \varphi$$

donde $\mathfrak{A}^{\rho}$ es la estructura de tipo τ_2 que posee el mismo universo que $\mathfrak{A}$ e interpreta cada signo $\rho(r) \in \tau_2$ del mismo modo que $\mathfrak{A}$ interpreta r, esto es :

$$r^{\mathfrak{A}} = \rho(r)^{\mathfrak{A}^{\rho}} \qquad \text{para cada} \quad r \in \tau_1$$

Así, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}^{\rho}$ sólo difieren en los signos que llevan asociados, pero no en el significado de esos signos. φ^{ρ} es, entonces, la traducción de φ al tipo de semejanza τ_2 .

2.2 Observaciones

La razón de que en (1) digamos que $L[\tau]$ es una clase y no exijamos que sea un conjunto está en no excluir a ciertas lógicas aceptadas, como $\mathcal{L}_{\infty\omega}$. $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es la extensión de la lógica de primer orden que posee las siguientes reglas sintácticas y semánticas adicionales :

- Si Σ es un conjunto de fórmulas de tipo τ de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, entonces $\bigwedge\Sigma$ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$.

- $\mathfrak{A} \models_{L_{\infty\omega}} \bigwedge\Sigma\,[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_{L_{\infty\omega}} \sigma\,[s]$ para cada $\sigma \in \Sigma$

Resulta entonces que $L_{\infty\omega}[\tau]$ no es un conjunto, sino una clase propia. En la medida en que no interese considerar lógicas como $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, en la condición (1) se puede especificar que $L[\tau]$ es un conjunto.

La condición (3) establece que las sentencias se conservan al agrandar los tipos de semejanza. Así, si φ es una sentencia de tipo τ de $\mathcal{L}$, φ es una sentencia de cualquier otro tipo de semejanza que extienda a τ .Las condiciones (4) y (5) determinan que la relación de satisfacción debe ser invariante respecto a isomorfía y expansiones. La condición (6) exige una forma simple de sustitución de signos por signos en las sentencias.

Obsérvese, finalmente, que no poseemos, en base a esta definición de lógica abstracta, ninguna información sobre la estructura sintáctica de las sentencias. En particular, no tenemos ningún concepto de fórmula abierta. Como veremos, esto no representa ninguna dificultad para poder expresar generalizaciones de teoremas y construcciones usuales de la lógica de primer orden. El papel de las variables lo realizarán las constantes.

2.3 Definiciones

Ciertos conceptos familiares de la lógica de primer orden son fácilmente generalizables a cualquier lógica abstracta $\mathcal{L}$:

(1) Si $\varphi \in L[\tau]$, los modelos de φ de tipo τ en $\mathcal{L}$ son

$$\mathrm{Mod}_L^{\tau}(\varphi) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models_L \varphi \text{ y } \mathfrak{A} \text{ es de tipo } \tau\}$$

(2) Si $\Sigma \subseteq L[\tau]$, los modelos de Σ de tipo τ en $\mathcal{L}$ son

$$\mathrm{Mod}_L^{\tau}(\Sigma) = \bigcap_{\varphi \in \Sigma} \mathrm{Mod}_L^{\tau}(\varphi)$$

en el bien entendido de que para el caso $\Sigma = \phi$

$$\mathrm{Mod}_L^{\tau}(\Sigma) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ es de tipo } \tau\}$$

(3) Si $\varphi \in L[\tau]$, decimos que

φ es satisfacible en $\mathcal{L}$ si y sólo si $\mathrm{Mod}_L^{\tau}(\varphi) \neq \phi$

φ es válida en $\mathcal{L}$ si y sólo si $\mathrm{Mod}_L^{\tau}(\varphi) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ es de tipo } \tau\}$

Usamos la notación $\models_L \varphi$ para indicar que φ es válida en $\mathcal{L}$.

(4) La relación de consecuencia en $\mathcal{L}$ se deriva de la relación de satisfacción al modo usual. Utilizamos el mismo signo, "$\models_L$" , para la consecuencia que para la satisfacción:

Si $\Sigma \subseteq L[\tau]$ y $\varphi \in L[\tau]$,

$$\Sigma \models_L \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathrm{Mod}_L^{\tau}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}_L^{\tau}(\varphi)$$

Para la equivalencia lógica usamos la notación "$\equiv_L$" :

Si $\varphi, \psi \in L[\tau]$,

$$\varphi \equiv_L \psi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathrm{Mod}_L^{\tau}(\varphi) = \mathrm{Mod}_L^{\tau}(\psi)$$

(5) La relación de $\mathcal{L}$ -equivalencia entre estructuras también se designa mediante "$\equiv_L$"

Si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son estructuras del mismo tipo de semejanza τ ,

$\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$ si y sólo si para cada $\varphi \in L[\tau]$:

$$\mathfrak{A} \models_L \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models_L \varphi$$

2.4 Advertencia

Cualquiera de estos signos introducidos, si se usa sin subíndice L , refiere al correspondiente concepto de primer orden.

Así, por ejemplo, para cada sentencia φ de primer orden y de tipo de semejanza τ , $Mod^{\tau}(\varphi)$ es la clase de los modelos de tipo τ de φ .

2.5 Las propiedades expuestas en la definición 2.1 se juzgan a menudo insuficientes. Para muchos propósitos es preciso suponer que las lógicas abstractas tienen otras propiedades adicionales. Se denominan lógicas regulares a las lógicas abstractas que poseen estas otras propiedades. Son casi siempre propiedades de clausura respecto a alguna operación sintáctica: negación, conjunción, cuantificación existencial y ciertas formas de relativización y sustitución. Algunas de estas propiedades no las poseen lógicas abstractas que se consideran interesantes y, por tanto, no siempre se recogen todas en la definición de lógica regular. Las propiedades que aquí caracterizarán a las lógicas regulares difieren de las expuestas en Ebbinghaus(1985) en lo que afecta a la sustitución. Se justificará esta discrepancia en breve.

2.6 Definición : Atomicidad

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ es atómica, o tiene la propiedad de atomicidad, si toda sentencia atómica de primer orden tiene una traducción en $\mathcal{L}$, es decir, si para cada tipo de semejanza y cada sentencia atómica de primer orden y de tipo τ , φ , hay una $\psi \in L[\tau]$ tal que

$$Mod^{\tau}(\varphi) = Mod_L^{\tau}(\psi)$$

Aquí no se garantiza que la sentencia ψ de $\mathcal{L}$ que traduce a la sentencia atómica φ sea única. Obsérvese que, sin embargo, si ψ_1 y ψ_2 son traducciones de φ , entonces

$\psi_1 \equiv_L \psi_2$. Por tanto, ψ es única salvo equivalencia en $\mathcal{L}$. Usaremos entonces la misma notación que en primer orden para referirnos a ψ (más precisamente, a alguna de las traducciones ψ de φ).

2.7 <u>Definición</u> : Negación

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ está cerrada bajo negación si para cada tipo de semejanza τ y toda $\varphi \in L[\tau]$, $\mathcal{L}$ posee una traducción de $\neg\varphi$, es decir, hay $\psi \in L[\tau]$ tal que

$$\mathrm{Mod}_L^\tau(\psi) = \{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \not\models_L \varphi \text{ y } \mathfrak{A} \text{ es de tipo } \tau \}$$

Tampoco aquí está garantizada la unicidad de ψ respecto a φ más que salvo equivalencia en $\mathcal{L}$ .Pondremos,sin embargo, $\neg\varphi = \psi$, entendiendo que $\neg\varphi$ es una de las sentencias de $\mathcal{L}$ que son negación de φ . Las mismas consideraciones deben aplicarse a las siguientes definiciones.

2.8 <u>Definición</u> : Conjunción

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ está cerrada bajo conjunción si para cada tipo de semejanza τ y cualesquiera $\varphi, \psi \in L[\tau]$, $\mathcal{L}$ posee una traducción de $(\varphi \wedge \psi)$, es decir, hay una $\theta \in L[\tau]$ tal que

$$\mathrm{Mod}_L^\tau(\theta) = \mathrm{Mod}_L^\tau(\varphi) \cap \mathrm{Mod}_L^\tau(\psi)$$

Ponemos entonces $\theta = (\varphi \wedge \psi)$.

2.9 <u>Observación</u>

Hay una lógica abstracta $\mathcal{L}$, interesante para ciertos propósitos, que no está cerrada bajo negación. Sus sentencias son las de primer orden y las de segundo orden de la forma

$$\exists X_1 \ldots X_n \varphi$$

donde en φ sólo hay cuantificación de primer orden.Su semántica es la de segundo orden. Mediante una sentencia de la forma $\exists X \varphi$, donde X es una variable diádica y φ sólo posee cuantificación de primer orden, podemos expresar la infinitud, en el sentido de que

$$\mathfrak{A} \models_{L} \exists x \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad A \text{ es infinito}$$

Esta sentencia, $\exists x \varphi$, no posee negación en $\mathcal{L}$. En efecto, si $\exists x_1 \ldots x_n \psi$ fuera negación de $\exists x \varphi$, tendríamos

$$\exists x_1 \ldots x_n \psi \equiv_L \neg \exists x \varphi$$

El teorema de interpolación de Craig proporciona, entonces, una sentencia de primer orden, θ , tal que

$$\exists x_1 \ldots x_n \psi \models_L \theta \qquad \text{y} \qquad \theta \models_L \neg \exists x \varphi$$

con lo cual $\theta \equiv_L \neg \exists x \varphi$. Pero es bien sabido que la infinitud no es expresable mediante una sentencia de primer orden.

Ya hemos indicado que no poseemos información sobre la estructura sintáctica de las sentencias de una lógica abstracta. Ello no es impedimento para formular de modo general la existencia de cuantificación existencial. Las constantes pueden suplir a las variables.

2.10 Definición : Cuantificación existencial

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ está cerrada bajo cuantificación existencial si para cada constante c, cada tipo de semejanza τ tal que $c \in \tau$ y cada sentencia $\varphi \in L[\tau]$, hay una $\psi \in L[\tau - \{c\}]$ tal que :

Para cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo $\tau - \{c\}$

$$\mathfrak{A} \models_L \psi \quad \text{si y sólo si hay un } a \in A \text{ tal que } \langle \mathfrak{A}\, a \rangle \models_L \varphi$$

donde, para cada $a \in A$, $\langle \mathfrak{A}\; a \rangle$ es la expansión de $\mathfrak{A}$ al tipo de semejanza τ en la que

$$c^{\langle \mathfrak{A} a \rangle} = a$$

Ponemos entonces $\exists c\, \varphi = \psi$.

Una lógica abstracta que tenga la propiedad de atomicidad y esté cerrada bajo negación, conjunción y cuantificación existencial posee, al menos, el mismo poder expresivo que la lógica de primer orden. Esto se justificará en el próximo apartado.

2.11 La siguiente propiedad que vamos a definir es la de relativización. Consiste, en su uso normal en primer orden, en la posibilidad de sustituir las cuantificaciones $\exists x\varphi$ dentro de una fórmula por expresiones del tipo $\exists x(Ux \wedge \varphi)$, donde U es un predicado monádico fijado de antemano.Denotamos el resultado de esta operación mediante φ^U y entendemos que φ^U "dice" en una estructura $\mathfrak{A}$ lo mismo que φ "dice" en la subestructura $\mathfrak{A}|U^{\mathfrak{A}}$ si dicha estructura existe. Que $\mathfrak{A}|U^{\mathfrak{A}}$ exista depende simplemente de que $U^{\mathfrak{A}}$ sea un subconjunto no vacío de A en el que estén todas las denotaciones de las constantes y que esté cerrado bajo las operaciones del modelo $\mathfrak{A}$. También es posible relativizar fórmulas a una fórmula $\psi(x)$, que sustituye al predicado monádico U . En ese caso $\varphi^{\psi(x)}$ "dice" en $\mathfrak{A}$ lo mismo que φ "dice" en $\mathfrak{A}|\psi(x)^{\mathfrak{A}}$ si esta subestructura existe. Podría perfectamente ocurrir que $\psi(x)^{\mathfrak{A}}$ no poseyera todas las denotaciones de las constantes o no estuviera cerrado bajo todas las operaciones de $\mathfrak{A}$, sino únicamente tuviera estas propiedades en relación a las interpretaciones de los signos de un cierto subconjunto τ_1 del tipo de semejanza τ de $\mathfrak{A}$. En ese caso, sólo relativizamos a $\psi(x)$ las fórmulas de tipo τ_1, pero posiblemente las fórmulas relativizadas sean de tipo τ , pues , en particular, constantes que aparecen en $\psi(x)$ pueden denotar en $\mathfrak{A}$ objetos fuera de $\psi(x)^{\mathfrak{A}}$. El significado de $\varphi^{\psi(x)}$ en $\mathfrak{A}$ es entonces el mismo que el de φ en $(\mathfrak{A}\upharpoonright\tau_1)|\psi(x)^{\mathfrak{A}}$. Estas consideraciones justifican la definición de relativización que se emplea en lógicas abstractas.Previamente introducimos la notación adecuada para parafrasear $\psi(x)^{\mathfrak{A}}$.De nuevo las constantes sustituyen en su cometido a las variables :

2.12 <u>Definición</u>

Si $\varphi \in L[\tau \cup \{c_1,\dots,c_n\}]$ y $c_1,\dots,c_n$ son constantes distintas que no están en τ y $\mathfrak{A}$ es una estructura de tipo τ ,

$$(\lambda c_1\dots c_n \varphi)^{\mathfrak{A}} = \{\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in A^n : \langle\mathfrak{A}\, a_1\dots a_n\rangle \models_L \varphi\}$$

donde para cualesquiera $a_1,\ldots,a_n \in A$, $\langle \mathfrak{A}\, a_1\ldots a_n \rangle$ es la expansión de $\mathfrak{A}$ al tipo de semejanza $\tau \cup \{c_1,\ldots,c_n\}$ en la que para cada i $(1 \leq i \leq n)$

$$c_i^{\langle \mathfrak{A}\, a_1\ldots a_n \rangle} = a_i$$

Así pues, $(\lambda c_1\ldots c_n \varphi)^{\mathfrak{A}}$ tiene el mismo significado que la notación $\varphi(x_1\ldots x_n)^{\mathfrak{A}}$ que usamos cuando disponemos de fórmulas abiertas.

2.13 <u>Definición</u> : Relativización

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ está cerrada bajo relativización si para cada constante c, cualesquiera tipos de semejanza τ_1, τ_2 en los que no esté c y cada sentencia $\psi \in L[\tau_2 \cup \{c\}]$ se verifica lo siguiente:

Para cada sentencia $\varphi \in L[\tau_1]$ hay una correspondiente $\theta \in L[\tau_1 \cup \tau_2]$ tal que para cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo $\tau_1 \cup \tau_2$ en la que $(\lambda c \psi)^{\mathfrak{A}}$ es τ_1-cerrado:

$$\mathfrak{A} \models_L \theta \quad \text{si y sólo si} \quad (\mathfrak{A}\restriction\tau_1) | (\lambda c \psi)^{\mathfrak{A}} \models_L \varphi$$

Escribimos entonces $\theta = \varphi^{\lambda c \psi}$. Si no hay ambigüedad sobre la constante c , ponemos $\theta = \varphi^{\psi}$ y si $\psi = Uc$, ponemos simplemente $\theta = \varphi^{U}$.

2.14. <u>Observación</u>

Hay una lógica abstracta de notable interés que no está cerrada bajo relativización. Se trata de una extensión de la lógica de primer orden mediante un cuantificador Q_C, llamado cuantificador de Chang. Nos referiremos a esta lógica con la notación $\mathcal{L}_C$ .Además de las reglas sintácticas y semánticas propias de la lógica de primer orden, $\mathcal{L}_C$ posee las siguientes reglas:

- Si φ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_C$, entonces $Q_C x \varphi$ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_C$.

- $\mathfrak{A} \models_{L_C} Q_C x \varphi\, [s]$ si y sólo si $|\{a \in A : \mathfrak{A} \models_{L_C} \varphi[s^x_a]\}| = |A|$

En estructuras finitas $Q_C x\varphi$ equivale a $\forall x\varphi$, pero además, en estructuras infinitas de cardinal $\aleph_\alpha$ $Q_C x\varphi$ equivale a $Q_\alpha x\varphi$ (Q_α es el cuantificador introducido en 1.1). Una sencilla inducción muestra que si $\mathfrak{A}$ es una estructura de cardinal $\aleph_\alpha$, φ una sentencia de $\mathcal{L}_C$ del tipo de semejanza de $\mathfrak{A}$ y φ^* el resultado de sustituir cada aparición de Q_C en φ por Q_α, resulta

$$\mathfrak{A} \models_{L_C} \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models_{L_\alpha} \varphi^*$$

Por tanto, si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son estructuras de cardinal $\aleph_\alpha$ y $\mathfrak{A} \equiv_{L_\alpha} \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_{L_C} \mathfrak{B}$.

A efectos de mostrar que $\mathcal{L}_C$ no está cerrada bajo relativización, consideremos la siguiente situación:

(1) τ es un tipo de semejanza que consta de sólo dos predicados monádicos U,V .

(2) $\mathfrak{A}$ es un modelo de tipo τ en el que
$V^{\mathfrak{A}} \subseteq U^{\mathfrak{A}}$, $|V^{\mathfrak{A}}| = \omega$, $|U^{\mathfrak{A}}| = \omega_1$ y $|A| = \omega_2$

(3) $\mathfrak{B}$ es un modelo de tipo τ en el que
$V^{\mathfrak{B}} \subseteq U^{\mathfrak{B}}$, $|V^{\mathfrak{B}}| = \omega$, $|U^{\mathfrak{B}}| = \omega$, $|U^{\mathfrak{B}} - V^{\mathfrak{B}}| = \omega$ y $|B| = \omega_2$

(4) φ es la sentencia $\neg Q_C x\, Vx$, que "dice" que en la interpretación de V no hay tantos elementos como en el universo.

Supongamos que φ posee una relativización φ^U al predicado U . Así

(5) $\mathfrak{A} \models_{L_C} \varphi^U$ si y sólo si $\mathfrak{A}|U^{\mathfrak{A}} \models_{L_C} \varphi$

(6) $\mathfrak{B} \models_{L_C} \varphi^U$ si y sólo si $\mathfrak{B}|U^{\mathfrak{B}} \models_{L_C} \varphi$

Como $\mathfrak{A}|U^{\mathfrak{A}} \models_{L_C} \varphi$ pero $\mathfrak{B}|U^{\mathfrak{B}} \not\models_{L_C} \varphi$, concluimos de (5) y (6) que

(7) $\mathfrak{A} \not\equiv_{L_C} \mathfrak{B}$

Pero mediante la generalización a $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_2)$ de los procedimientos de isomorfismos parciales (véase Ebbinghaus (1985), pág.53) se obtiene que $\mathfrak{A} \equiv_{L_2} \mathfrak{B}$. En ese caso, de acuerdo con lo previamente indicado, obtenemos

(8) $\mathfrak{A} \equiv_{L_C} \mathfrak{B}$

Esta contradicción muestra que φ no posee relativización en $\mathcal{L}_C$.

2.15 La última propiedad que suele exigirse a las lógicas abstractas es la de estar cerradas bajo sustitución. Cierto tipo de sustitución ha sido ya exigida en la misma definición de lógica abstracta (cláusula (6) de la definición 2.1), pero es una forma muy débil. En lógica de primer orden hay muy diversos tipos de sustitución : sustitución de constantes por designadores, sustitución de predicados por fórmulas arbitrarias y sustitución de constantes y signos funcionales por predicados, entre otras. Es posible ofrecer un concepto general de sustitución de signos por fórmulas, pero es preferible distinguir casos, a efectos de facilitar la notación y la comprensión.

La sustitución de predicados por fórmulas consiste, en su versión para la lógica de primer orden, en la posibilidad de reemplazar en una sentencia expresiones del tipo $Rt_1 \ldots t_n$ por correspondientes expresiones $\psi(t_1, \ldots, t_n)$. La dificultad de no poseer fórmulas abiertas en lógicas abstractas es salvable gracias al uso de constantes nuevas, como en las definiciones 2.10 y 2.13. Esta sustitución no ofrece mayores problemas.

La sustitución de constantes y signos funcionales por predicados presenta una cierta dificultad conceptual. Consideremos el caso de la sustitución de una constante c por un predicado monádico P y de un signo funcional monádico f por un predicado diádico R en una sentencia φ .En primer lugar efectuamos el proceso puramente sintáctico de eliminar cada aparición de c y de f en φ por adecuadas apariciones de P y R, obteniendo así una sentencia φ^* en la que c y f ya no aparecen . En segundo lugar construimos las sentencias que garantizan que P se interpreta como un conjunto unitario y que R se interpreta como una función del universo en el universo. En este caso las sentencias son

$$\sigma_P = \exists x\, Px \;\wedge\; \forall xy(Px \wedge Py \longrightarrow x \not\approx y)$$

$$\sigma_R = \forall x \exists y\, Rxy \;\wedge\; \forall xyz(Rxy \wedge Rxz \longrightarrow y \not\approx z)$$

La cuestión es, entonces, si debe considerarse que la sentencia resultante del proceso de sustitución es φ^* o, más bien, $(\varphi^* \wedge \sigma_P \wedge \sigma_R)$. Una situación análoga se presenta en el caso de la relativización, donde usualmente se añade a φ^U la conjunción de las sentencias que garantizan que U se interpreta como un conjunto cerrado respecto al tipo de semejanza en cuestión. En el caso de la relativización el criterio general es no incluir estas sentencias en la sentencia relativizada.

En Ebbinghaus (1985) (pág. 30 y 31) se formula un criterio general de sustitución de signos por fórmulas según el cual las sentencias del tipo σ_P , σ_R deben ir incluidas en la fórmula sustituida. Esta forma general de sustitución es descomponible en una propiedad de sustitución de predicados por fórmulas, que ya hemos comentado que no es conflictiva, y otra propiedad de sustitución de constantes y signos funcionales por predicados, que es donde centrábamos la atención. Si pretendemos que estos procedimientos sean aplicables a lógicas infinitarias, como $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ (véase 1.3) , la sustitución debe ser simultánea y no podemos poner cota al tamaño del conjunto de los signos eliminados. Pero , en ese caso, no se puede exigir que las sentencias del tipo σ_P, σ_R , de las que puede haber un número infinito, formen parte de la sentencia sustituida. Sin ir más lejos, la lógica de primer orden no posee la propiedad de sustitución que Ebbinghaus propone. Así pues, no sólo para ser coherentes con la situación análoga de la relativización, sino simplemente para generalizar una propiedad que posee la lógica de primer orden y las lógicas infinitarias $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$, debemos prescindir de los criterios de Ebbinghaus y definir la sustitución al modo φ^* y no al modo $(\varphi^* \wedge \sigma_P \wedge \sigma_R)$. Definiremos en primer lugar la sustitución de predicados y, a continuación, la eliminación de signos funcionales y constantes.

2.16 <u>Definición</u>: Sustitución de predicados

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ admite eliminación de predicados si para cualesquiera tipos de semejanza τ_1, τ_2, cada conjunto de predicados $\mathcal{P}$ disjunto de τ_1, cada colección $C = \{c_n : n \in \omega\}$ de constantes distintas que no aparecen en $\tau_1 \cup \tau_2$ y cada colección $\Psi = \{\psi_R : R \in \mathcal{P}\}$ de sentencias de $\mathcal{L}$ tales que

$$\psi_R \in L[\tau_2 \cup \{c_1, \ldots, c_n\}] \quad \text{si } R \text{ es n-ádico}$$

se verifica lo siguiente:

Para cada sentencia $\varphi \in L[\tau_1 \cup \mathcal{P}]$ hay una correspondiente $\varphi^* \in L[\tau_1 \cup \tau_2]$ tal que para cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo $\tau_1 \cup \tau_2$

$$\mathfrak{A} \models_L \varphi^* \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A}^* \models_L \varphi$$

donde $\mathfrak{A}^*$ es la estructura de tipo $\tau_1 \cup \mathcal{P}$ definida por

- $\mathfrak{A}^* \upharpoonright \tau_1 = \mathfrak{A} \upharpoonright \tau_1$
- $R^{\mathfrak{A}^*} = (\lambda c_1 \ldots c_n \; \psi_R)^{\mathfrak{A}}$ para cada predicado n-ádico $R \in \mathcal{P}$.

Pondremos entonces $\varphi^* = \varphi \left(\begin{smallmatrix} R \\ \psi_R \end{smallmatrix}\right)_{R \in \mathcal{P}}$.

Obsérvese que las constantes $\{c_n : n \in \omega\}$ realizan aquí el papel de variables libres.

2.17 <u>Definición</u>: Eliminación de constantes y signos funcionales

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ admite eliminación de constantes y signos funcionales si para cada tipo de semejanza τ, cada conjunto de constantes C disjunto de τ, cada conjunto de signos funcionales $\mathcal{F}$ disjunto de τ y cada colección $\mathcal{P} = \{R_r : r \in C \cup \mathcal{F}\}$ de predicados distintos que no están en τ y tales que

- para cada $c \in C$, R_c es monádico
- para cada $f \in \mathcal{F}$, si f es n-ádico, R_f es n+1-ádico

se verifica lo siguiente:

Para cada sentencia $\varphi \in L[\tau \cup C \cup \mathcal{F}]$, hay una correspondiente sentencia $\varphi^r \in L[\tau \cup \mathcal{P}]$ tal que para cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo $\tau \cup C \cup \mathcal{F}$

$$\mathfrak{A}^r \models_L \varphi^r \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models_L \varphi$$

donde $\mathfrak{A}^r$ es la estructura de tipo $\tau \cup \mathcal{P}$ definida por

- $\mathfrak{A}^r \restriction \tau = \mathfrak{A} \restriction \tau$
- $R_c^{\mathfrak{A}^r} = \{c^{\mathfrak{A}}\}$ para cada $c \in C$
- $R_f^{\mathfrak{A}^r} = f^{\mathfrak{A}}$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

2.18 <u>Observación</u>

La clase de los modelos de φ^r no está caracterizada más que parcialmente. No toda estructura de tipo $\tau \cup \mathcal{P}$ es de la forma $\mathfrak{A}^r$ para alguna estructura $\mathfrak{A}$ de tipo $\tau \cup C \cup \mathcal{F}$. Sólo lo son las estructuras $\mathfrak{B}$ en las que para cada $c \in C$, $R_c^{\mathfrak{B}}$ es un conjunto unitario y para cada $f \in \mathcal{F}$, n-ádico, $R_f^{\mathfrak{B}}$ es una función de B^n en B .

Para cada $c \in C$ sea σ_c la sentencia

$$\exists x\, R_c x \wedge \forall xy(R_c x \wedge R_c y \longrightarrow x \approx y)$$

y para cada $f \in \mathcal{F}$, n-ádico, sea σ_f la sentencia

$$\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, R_f x_1 \ldots x_n y \wedge \forall x_1 \ldots x_n yz(R_f x_1 \ldots x_n y \wedge R_f x_1 \ldots x_n z \longrightarrow y \approx z)$$

Resulta entonces que un modelo $\mathfrak{B}$ de tipo $\tau \cup \mathcal{P}$ es de la forma $\mathfrak{A}^r$ para algún modelo $\mathfrak{A}$ de tipo $\tau \cup C \cup \mathcal{F}$ si y sólo si

$$\mathfrak{B} \models \{\sigma_c : c \in C\} \cup \{\sigma_f : f \in \mathcal{F}\}$$

Una situación análoga se da en la relativización.

2.19 <u>Definición</u>: Sustitución

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ está cerrada bajo sustitución, o admite sustitución, si admite sustitución de predicados y eliminación de signos funcionales y constantes.

2.20 <u>Definición</u>: Lógica regular

Una lógica regular es una lógica abstracta que es atómica y está cerrada bajo negación, conjunción, cuantificación existencial, relativización y sustitución .

2.21 Una lógica regular pretende ser una lógica con buenas propiedades. El problema está en determinar qué propiedades son buenas, es decir, qué rasgos de las lógicas genuinas conocidas no son peculiaridades sino rasgos que toda lógica debe poseer. Algo se puede decir a favor del cúmulo de propiedades de la definición 2.20 : las lógicas abstractas que las verifican son equivalentes, en un sentido que se precisará en el próximo apartado, a lógicas que poseen una sintaxis manejable y comprensible. Este resultado se expondrá en el apartado 4 .

3. UN CONCEPTO COMPARATIVO PARA LOGICAS ABSTRACTAS

Es posible comparar el poder expresivo de las lógicas abstractas, es decir, su capacidad para caracterizar clases de estructuras mediante sentencias. Este concepto comparativo se define como se indica a continuación :

3.1 Definición

Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ lógicas abstractas.

(1) Decimos que $\mathcal{L}'$ es tanto o más expresiva que $\mathcal{L}$ y ponemos $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ si toda sentencia de $\mathcal{L}$ tiene una traducción en $\mathcal{L}'$, es decir, si para cada tipo de semejanza τ y cada sentencia $\varphi \in L[\tau]$ hay una correspondiente $\psi \in L'[\tau]$ tal que

$$\mathrm{Mod}_L^{\tau}(\varphi) = \mathrm{Mod}_{L'}^{\tau}(\psi)$$

(2) Decimos que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son equivalentes (en poder expresivo) y escribimos $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}'$, si $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ y $\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$.

(3) Decimos que $\mathcal{L}'$ es más expresiva que $\mathcal{L}$ y ponemos $\mathcal{L} < \mathcal{L}'$, si $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ pero $\mathcal{L}' \not\leq \mathcal{L}$.

3.2 Lema

Para cada lógica regular $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leq \mathcal{L}$.

Prueba:

Recordemos que $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ es la lógica de primer orden . Sea τ un tipo de semejanza, $C = \{c_n : n \in \omega\}$ una colección de constantes distintas que no están en τ ,abreviemos $\tau \cup \{c_0, \ldots, c_n\}$ por τ_{n+1} y pongamos $\tau_0 = \tau$. Es suficiente con mostrar que para cada sentencia de primer orden φ de tipo $\tau \cup C$ hay una correspondiente $\varphi^* \in L[\tau \cup C]$ tal que

- Si φ es de tipo τ_n , $\varphi^* \in L[\tau_n]$ y $\mathrm{Mod}^{\tau_n}(\varphi) = \mathrm{Mod}_L^{\tau_n}(\varphi^*)$.

Esta traducción se define por recursión utilizando las propiedades de atomicidad, negación, conjunción y cuantificación existencial de $\mathcal{L}$. Consideremos, a modo de ejemplo, el caso de la cuantificación existencial :

Sea $\exists x\, \varphi(x)$ una sentencia de primer orden de tipo $\tau \cup C$. Hay entonces un menor número natural n tal que $\exists x\, \varphi(x)$ es de tipo τ_n . Definimos entonces

$$(\exists x\, \varphi(x))^* = \exists c_n\ \varphi^*(c_n)$$

Veamos que se cumplen las condiciones requeridas. $\varphi(c_n)$ es de tipo τ_{n+1} y entonces, por hipótesis inductiva,

$$\varphi^*(c_n) \in L[\tau_{n+1}] \quad y \quad Mod^{\tau_{n+1}}(\varphi(c_n)) = Mod_L^{\tau_{n+1}}(\varphi^*(c_n))$$

Como $c_n \notin \tau_n$ y $\tau_{n+1} = \tau_n \cup \{c_n\}$ tenemos, por 2.10, que

$$\exists c_n\ \varphi^*(c_n) \in L[\tau_n]$$

y también que

$$Mod^{\tau_n}(\exists x\, \varphi(x)) = Mod_L^{\tau_n}(\exists c_n\ \varphi^*(c_n))$$

3.3 Observación

En virtud del lema 3.2, toda sentencia de primer orden posee una traducción en toda lógica regular $\mathcal{L}$. Usaremos la misma notación para referirnos a una sentencia de primer orden que para referirnos a su traducción a $\mathcal{L}$.

3.4 Definiciones

Sea $\mathcal{L}$ una lógica abstracta y K una clase de estructuras de un tipo de semejanza τ .

(1) Decimos que K es EC_Δ en $\mathcal{L}$ si hay un conjunto $\Sigma \subseteq L[\tau]$ tal que $K = Mod_L^\tau(\Sigma)$.

(2) Decimos que K es EC_δ en $\mathcal{L}$ si hay un conjunto numerable $\Sigma \subseteq L[\tau]$ tal que $K = Mod_L^\tau(\Sigma)$.

(3) Decimos que K es EC en $\mathcal{L}$ si hay una sentencia $\varphi \in L[\tau]$ tal que $K = Mod_L^\tau(\varphi)$.

Las siglas EC provienen de la expresión "clase elemental", es decir, "clase de primer orden". Se ha generalizado el concepto a otras lógicas conservando su original notación.

(4) Decimos que K es PC_Δ en $\mathcal{L}$ si hay un tipo de semejanza τ'

que extiende a τ y un conjunto $\Sigma \subseteq L[\tau']$ tal que para cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo τ :

$\mathfrak{A} \in K$ si y sólo si hay una expansión $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ al tipo τ' tal que $\mathfrak{A}' \models_L \Sigma$

es decir, $K = \{ \mathfrak{A}\restriction\tau : \mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_L^{\tau'}(\Sigma) \}$

Los conceptos de clase PC_δ y clase PC se definen análogamente, especificando que Σ es numerable en el caso PC_δ y cambiando Σ por una sentencia φ en el caso PC. Las siglas PC provienen de la expresión "clase proyectiva".

(5) Decimos que K es RPC_Δ en $\mathcal{L}$ si hay un tipo de semejanza τ' que extiende a τ ,un predicado monádico $U \in \tau' - \tau$ y un conjunto $\Sigma \subseteq L[\tau']$ tal que para cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo τ :

$\mathfrak{A} \in K$ si y sólo si hay una estructura $\mathfrak{A}'$ de tipo τ' en la que $U^{\mathfrak{A}'}$ es τ-cerrado y $\mathfrak{A}' \models_L \Sigma$ y $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}'\restriction\tau) | U^{\mathfrak{A}'}$

es decir, $K = \{ (\mathfrak{A}\restriction\tau) | U^{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_L^{\tau'}(\Sigma)$ y $U^{\mathfrak{A}}$ es τ-cerrado $\}$

Los conceptos de clase RPC_δ y clase RPC se definen de modo análogo, especificando que Σ es numerable en el caso RPC_δ y cambiando Σ por una sentencia en el caso RPC. Las siglas RPC provienen de la expresión "clase proyectiva relativizada".

Si la clase K tiene un solo modelo salvo isomorfía, es decir, si hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $K = \{ \mathfrak{B} : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \}$, atribuimos los conceptos EC_Δ , EC_δ , etc., al modelo $\mathfrak{A}$. Así, por ejemplo, decimos que $\mathfrak{A}$ es EC en $\mathcal{L}$ si hay una sentencia $\varphi \in L[\tau]$ tal que para cada estructura $\mathfrak{B}$ de tipo τ ,

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models_L \varphi$$

3.5 <u>Observación</u>

La relación $\leq$ de comparación de lógicas abstractas puede definirse también en términos de clases EC, pues

(1) $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ si y sólo si toda clase EC en $\mathcal{L}$ es EC en $\mathcal{L}'$.

(2) $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}'$ si y sólo si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ tienen las mismas clases EC .

3.6 Ejemplos

La potencia expresiva de las lógicas abstractas es muy dispar. Hay lógicas abstractas incomparables respecto a $\leq$, como $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_0)$ y $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_1)$ e incluso la lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ y la lógica de segundo orden $\mathcal{L}_{II}$. Exponemos a continuación, en forma de gráfico, ciertas relaciones de ordenación determinada por $\leq$ entre lógicas familiares:

$$\begin{tikzcd}
& & \mathcal{L}_{\omega\omega} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_0) \arrow[d] & & \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_1) \arrow[ddl] \\
& \mathcal{L}^{w}_{II} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\mathcal{L}_{\omega_1\omega} & & \mathcal{L}_{II} &
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ significa aquí que $\mathcal{L} < \mathcal{L}'$, y $\mathcal{L}^{w}_{II}$ es la versión débil de la lógica de segundo orden, lógica cuya sintaxis coincide con la de segundo orden pero cuyas variables de segundo orden varían sobre conjuntos finitos o relaciones finitas. Así, si X es una variable n-ádica,

$\mathfrak{A} \models_{L^{w}_{II}} \exists X \varphi(X)$ si y sólo si hay una relación n-ádica finita R en A tal que $\mathfrak{A} \models_{L^{w}_{II}} \varphi(X)\ [R]$.

3.7 La relación $\leq$ establecida entre dos lógicas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ significa, como ya hemos indicado, que toda clase EC en $\mathcal{L}$ es EC en $\mathcal{L}'$. Si estas lógicas son regulares, basta con asegurar que toda clase de tipo de semejanza relacional EC en $\mathcal{L}$ es EC en $\mathcal{L}'$ para obtener que $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$. Ello se debe a la posibilidad de eliminar constantes y signos funcionales en lógicas regulares. Como posteriormente necesitaremos este resultado para obtener un teorema de representación para lógicas regulares, lo establecemos a continuación.

3.8 Lema

Si $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ son lógicas regulares y toda clase de tipo de semejanza relacional que es EC en $\mathcal{L}$ también es EC en $\mathcal{L}'$, entonces $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$.

Prueba:

Sea K una clase EC en $\mathcal{L}$ y sea τ su tipo de semejanza. Si τ es relacional K es, por hipótesis, EC en $\mathcal{L}'$. Supongamos, pues, que τ no es relacional. Entonces hay un conjunto C de constantes, un conjunto $\mathcal{F}$ de signos funcionales y un tipo de semejanza relacional τ_0 tal que $\tau = \tau_0 \cup C \cup \mathcal{F}$. Como K es EC en $\mathcal{L}$, hay una sentencia $\varphi \in L[\tau]$ tal que

(1) $$K = \mathrm{Mod}_L^{\tau}(\varphi).$$

A efectos de eliminar las constantes y los signos funcionales de acuerdo con 2.17, escojamos para cada $c \in C$ un predicado monádico distinto R_c, que no está en τ_0, y para cada signo funcional n-ádico $f \in \mathcal{F}$ un predicado $n+1$-ádico R_f, que tampoco está en τ_0. Sea $\mathcal{P} = \{R_r : r \in C \cup \mathcal{F}\}$. En virtud de 2.17 hay una sentencia $\varphi^r \in L[\tau_0 \cup \mathcal{P}]$ tal que para estructura $\mathfrak{A}$ de tipo $\tau_0 \cup C \cup \mathcal{F}$:

(2) $\mathfrak{A}^r \models_L \varphi^r$ sí y sólo si $\mathfrak{A} \models_L \varphi$

donde $\mathfrak{A}^r$ es la estructura de tipo $\tau_0 \cup \mathcal{P}$ definida por

- $\mathfrak{A}^r \upharpoonright \tau_0 = \mathfrak{A} \upharpoonright \tau_0$
- $R_c^{\mathfrak{A}^r} = \{c^{\mathfrak{A}}\}$ para cada $c \in C$
- $R_f^{\mathfrak{A}^r} = f^{\mathfrak{A}}$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

(3) Sea $$J = \mathrm{Mod}_L^{\tau_0 \cup \mathcal{P}}(\varphi^r).$$

Como J es EC en $\mathcal{L}$, J es también EC en $\mathcal{L}'$, pues $\tau_0 \cup \mathcal{P}$ es relacional. Hay entonces una sentencia $\theta \in L[\tau_0 \cup \mathcal{P}]$ tal que

(4) $$J = \mathrm{Mod}_L^{\tau_0 \cup \mathcal{P}}(\theta)$$

Sustituimos ahora en θ los predicados de $\mathcal{P}$ para volver a introducir las constantes y signos funcionales de C y $\mathcal{F}$. Esto puede efectuarse de acuerdo con 2.16. Sea $D = \{d_n : n \in \omega\}$ un conjunto de constantes distintas que no están en C y definamos ψ_r para cada $r \in C \cup \mathcal{F}$ como sigue:

- $\Psi_c \;=\; c \approx d_1$ para cada $c \in C$
- $\Psi_f \;=\; fd_1 \ldots d_n \approx d_{n+1}$ para cada $f \in \mathcal{F}$, n-ádico.

Sea $\Theta^* = \Theta \binom{R_r}{\Psi_r}_{r \in C \cup \mathcal{F}}$ el resultado de la sustitución. Por 2.16 tenemos que

(5) $\Theta^* \in L' \, [\tau_0 \cup C \cup \mathcal{F}]$

y para cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo $\tau_0 \cup C \cup \mathcal{F}$,

(6) $\mathfrak{A} \models_{L'} \Theta^*$ si y sólo si $\mathfrak{A}^* \models_{L'} \Theta$

donde $\mathfrak{A}$ es la estructura de tipo $\tau_0 \cup \mathcal{P}$ definida por

- $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau_0 = \mathfrak{A} \upharpoonright \tau_0$
- $R_c^{\mathfrak{A}^*} = (\lambda d_1 \; d_1 \approx c)^{\mathfrak{A}} = \{c^{\mathfrak{A}}\}$ para cada $c \in C$
- $R_f^{\mathfrak{A}^*} = (\lambda d_1 \ldots d_{n+1} \; fd_1 \ldots d_n \approx d_{n+1})^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}$ para cada $f \in \mathcal{F}$, n-ádico.

Observemos ahora que para cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo τ ,

(7) $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^r$

y por tanto :

$\mathfrak{A} \in K$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_L \varphi$ (por (1))

si y sólo si $\mathfrak{A}^r \models_L \varphi^r$ (por (2))

si y sólo si $\mathfrak{A}^r \in J$ (por (3))

si y sólo si $\mathfrak{A}^r \models_{L'} \Theta$ (por (4))

si y sólo si $\mathfrak{A}^* \models_{L'} \Theta$ (por (7))

si y sólo si $\mathfrak{A} \models_{L'} \Theta^*$ (por (6)) .

De este modo $K = Mod_L(\Theta^*)$ y , en consecuencia , K es EC en $\mathcal{L}'$.

4. CUANTIFICADORES DE LINDSTRÖM

El procedimiento de extender la lógica de primer orden mediante cuantificadores puede ser tratado en su máxima generalidad mediante los llamados cuantificadores de Lindström. Toda clase de estructuras cerrada bajo isomorfía da lugar a un cuantificador de Lindström y , con él, a una lógica regular en la que la clase es EC. Para facilitar la notación, consideraremos únicamente cuantificadores asociados a clases de tipo de semejanza relacional. En su aplicación a lógicas regulares esto no supondrá, en virtud de 3.8, ninguna limitación.

4.1 Definición : Cuantificadores de Lindström

Sea K una clase de estructuras cerrada bajo isomorfía y de tipo de semejanza relacional τ_K . $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ es la lógica abstracta que se obtiene a partir de la lógica de primer orden como se indica a continuación:

(1) Los signos lógicos de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ son los de la lógica de primer orden suplementados con el cuantificador Q_K .

(2) Las fórmulas de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ en un tipo de semejanza τ se obtienen con las reglas sintácticas de primer orden y la siguiente regla adicional:

- Si φ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$, $\langle\varphi_R\rangle_{R\in\tau_K}$ una secuencia de fórmulas de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ y para cada $R\in\tau_K$, n-ádico, $\vec{x}_R$ es una secuencia de n variables distintas, $Q_K\, x\langle\vec{x}_R\rangle_{R\in\tau_K}\ \varphi\ \langle\varphi_R\rangle_{R\in\tau_K}$ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$.

(3) Las sentencias de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ en un tipo de semejanza τ son las fórmulas de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ que no poseen variables libres. A este respecto conviene precisar que para cada variable v :

- v está libre en $Q_K\, x\langle\vec{x}_R\rangle_{R\in\tau_K}\ \varphi\ \langle\varphi_R\rangle_{R\in\tau_K}$ si y sólo si (i) v está libre en φ y $v\neq x$, o bien (ii) para algún

$R \in \tau_K$, v está libre en φ_R y no aparece en la secuencia $\vec{x}_R$.

(4) La relación de satisfacción de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$, que abreviamos ahora con $\models_L$, se define mediante las reglas usuales de la lógica de primer orden y la siguiente regla adicional :

- $\mathfrak{A} \models_L Q_K\, x \langle \vec{x}_R \rangle_{R\in\tau_K} \varphi \langle \varphi_R \rangle_{R\in\tau_K}\ [s]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \in K$

donde

- $\mathfrak{B} = \langle B\ ,\ R^{\mathfrak{B}} \rangle_{R\in\tau_K}$
- $B = \{ a \in A : \mathfrak{A} \models_L \varphi\ [s^x_a] \}$
- $R^{\mathfrak{B}} = \{ \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n : \mathfrak{A} \models_L \varphi_R \left[s^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n} \right] \}$ si $R \in \tau_K$

es n-ádico y $\vec{x}_R = x_1 \ldots x_n$.

En particular, pues

$$\mathfrak{A} \models_L Q_K\, x \langle \vec{x}_R \rangle_{R\in\tau_K}\ \varphi(x)\ \langle \varphi_R(\vec{x}_R) \rangle_{R\in\tau_K}$$

si y sólo si

$$\langle A, \varphi_R(\vec{x}_R)^{\mathfrak{A}} \rangle_{R\in\tau_K} \mid \varphi(x)^{\mathfrak{A}}\ \in K$$

4.2 Observaciones

Si el tipo de semejanza τ_K es infinito, también lo es la fórmula

$$Q_K\, x \langle \vec{x}_R \rangle_{R\in\tau_K}\ \varphi \langle \varphi_R \rangle_{R\in\tau_K}$$

pero en otro caso estas fórmulas son de longitud finita. Así, por ejemplo, si $\tau_K = \{ R_1, R_2 \}$, donde R_1 es un predicado diádico y R_2 un predicado triádico, las fórmulas que comienzan con Q_K pueden escribirse más sencillamente como

$$Q_K\, x\, x_1 x_2\, y_1 y_2 y_3\ \ \varphi(x)\, \varphi_1(x_1, x_2)\, \varphi_2(y_1, y_2, y_3)\ .$$

Y si τ_K es el tipo de semejanza nulo, las correspondientes fórmulas son de la forma

$$Q_K\, x\ \ \varphi(x)$$

donde

$$\mathfrak{A} \models_L Q_K\, x\ \varphi(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \langle \varphi(x)^{\mathfrak{A}} \rangle \in K\ .$$

4.3 Ejemplos

(1) Los cuantificadores Q_α definidos en 1.1 son cuantificadores de Lindström . La correspondiente clase K_α es de tipo de semejanza nulo:

$$K_\alpha = \{ \langle A \rangle : |A| \geqslant \aleph_\alpha \}$$

(2) El cuantificador de Chang Q_C definido en 2.14 no es un cuantificador de Lindström, pues la lógica $\mathcal{L}_C$ no es regular y la lógica asociada a un cuantificador de Lindström $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ es regular. Este último punto se justificará en 4.6 . Hay , sin embargo, un cuantificador de Lindström muy cercano a Q_C . Se trata del cuantificador asociado a la clase K de tipo de semejanza $\tau_K = \{U\}$ (donde U es un predicado monádico) definida por

$$K = \mathfrak{A} : \{ |A| = |U^{\mathfrak{A}}| \}$$

Así $Q_C\, x\, \varphi(x)$ tiene el mismo significado que

$$Q_K\, x\, y\, x \approxeq x\, \varphi(y) .$$

Esto justifica la presencia de la primera fórmula tras Q_K , la fórmula $x \approxeq x$ en este último caso; su razón de ser es permitir la relativización. La relativización de $Q_K\, x\, y\, \varphi(x)\, \psi(y)$ a un predicado P es

$$Q_K\, x\, y\, (Px \wedge \varphi(x)^P)\, \psi(y)^P .$$

(3) El mismo cuantificador $\exists$ de la lógica de primer orden puede introducirse como un cuantificador de Lindström. La correspondiente clase K tiene tipo de semejanza nulo y está constituida por todas las estructuras de este tipo de semejanza.

(4) El cuantificador universal puede introducirse también como un cuantificador de Lindström. La clase K tiene en este caso un tipo de semejanza τ_K que consta de un único predicado monádico U y

$$K = \{ \mathfrak{A} : A = U^{\mathfrak{A}} \}.$$

Entonces $Q_K x\, y\, x \approxeq x\, \varphi(y)$ significa lo mismo que $\forall y\, \varphi(y)$ y $Q_K x\, y\, \varphi(x)\, \psi(y)$ significa $(\exists x\, \varphi(x) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)))$.

(5) La clase de los buenos órdenes da lugar al cuantificador de Lindström Q_{WO} . Abreviemos $L_{\omega\omega}(Q_{WO})$ por L_{WO} .Tenemos que

$$\mathfrak{A} \models_{L_{WO}} Q_{WO}\, x\, yz\; \varphi(x)\; \psi(y,z)$$

si y sólo si

el conjunto $B = \{a \in A : \mathfrak{A} \models_{L_{WO}} \varphi(x)\,[a]\}$ no es vacío y la relación $R = \{\langle a,b\rangle \in B^2 : \mathfrak{A} \models_{L_{WO}} \psi(y,z)\,[a,b]\}$ es un buen orden de B .

(6) Hay un cuantificador de Lindström asociado a cada modelo. Se trata del correspondiente a la clase de estructuras isomorfas al modelo en cuestión. Sea Q_K el cuantificador asociado al modelo ordenado $\langle \omega, < \rangle$ de los números naturales y abreviemos $L_{\omega\omega}(Q_K)$ por L_K . Resulta en este caso que

$$\mathfrak{A} \models_{L_K} Q_K\, x\, yz\; \varphi(x)\; \psi(y,z)$$

si y sólo si

$$\langle A, \psi(y,z)^{\mathfrak{A}}\rangle \mid \varphi(x)^{\mathfrak{A}} \cong \langle \omega, < \rangle \; .$$

4.4 <u>Definición</u>

Sea $\{K_i : i \in I\}$ una colección de clases de estructuras cerradas bajo isomorfía y de tipos de semejanza relacionales. La extensión de la lógica de primer orden determinada por $\{K_i : i \in I\}$ es la lógica abstracta

$$\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$$

generada por los cuantificadores de Lindström $\{Q_{K_i} : i \in I\}$. Las reglas sintácticas y semánticas expuestas en la definición 4.1 se aplican a cada cuantificador Q_{K_i}.

Si para cada $i \in I$ el tipo de semejanza τ_i de la clase K_i es finito, las fórmulas de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$ son secuencias finitas de signos. El número de fórmulas depende, en ese caso, del tamaño de I . Si I es una clase propia,hay una clase propia de fórmulas en cada tipo de semejanza, pero si I es numerable en cada tipo de semejanza de cardinal κ, hay $\kappa+\omega$ fórmulas.

4.5 Observación

Dos lógicas abstractas generadas por cuantificadores de Lindström,

$$\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_j} : j \in J)$$

pueden ser equivalentes sin que las clases I, J tengan el mismo tamaño. Pero además una lógica abstracta $\mathcal{L}$ puede ser equivalente a una lógica

$$\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$$

pero no a una lógica de este tipo con un conjunto finito I y, pese a ello, poseer una sintaxis finitaria. Este es el caso de la lógica de segundo orden. Posee un equivalente del tipo indicado, pero ninguno en el que I sea finito. Esto muestra que las propiedades sintácticas no son invariantes bajo equivalencia y que las lógicas generadas mediante cuantificadores de Lindström no son siempre las más simples entre las equivalentes.

4.6 Lema

Si para cada $i \in I$, K_i es una clase de estructuras cerrada bajo isomorfía y de tipo de semejanza relacional, entonces

$\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$ es una lógica regular.

Prueba:

Por definición, esta lógica es atómica y está cerrada bajo negación, conjunción y cuantificación existencial. La relativización a una fórmula $\psi(z)$ se define al modo usual en primer orden con las cláusulas adicionales

$$(Q_{K_i} x \langle \vec{x}_R \rangle_{R \in \tau_i} \varphi(x) \langle \varphi_R(\vec{x}_R) \rangle_{R \in \tau_i})^{\psi(z)} =$$

$$= Q_{K_i} x \langle \vec{x}_R \rangle_{R \in \tau_i} (\psi(x) \wedge \varphi(x)^{\psi(z)}) \langle \varphi_R(x_R)^{\psi(z)} \rangle_{R \in \tau_i}.$$

La sustitución, en cualquiera de sus formas, se efectúa conforme a los criterios usuales en primer orden.

4.7 Lema

Si para cada $i \in I$, K_i es una clase de estructuras cerrada bajo isomorfía y de tipo de semejanza relacional, entonces para cada $i \in I$,

$$K_i \text{ es EC en } \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I) .$$

Prueba:

Sea τ_i el tipo de semejanza de K_i y escojamos, para cada predicado n-ádico $R \in \tau_i$, una secuencia $\vec{x}_R$ de n variables distintas. Sea φ_i la sentencia

$$Q_{K_i} x \langle \vec{x}_R \rangle_{R \in \tau_i} \; x \simeq x \quad \langle R\vec{x}_R \rangle_{R \in \tau_i} .$$

Resulta, entonces, que para cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ_i :

$$\mathfrak{A} \models_{L_I} \varphi_i \quad \text{si y sólo si} \quad \langle A, R^{\mathfrak{A}} \rangle_{R \in \tau_i} \in K_i$$

$$\text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \in K_i ,$$

donde L_I es una abreviación de $L_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$.

Por tanto, $K_i = \mathrm{Mod}_{L_I}^{\tau_i}(\varphi_i)$.

4.8 Lema

Si $\mathcal{L}$ es una lógica regular y para cada $i \in I$, K_i es una clase EC en $\mathcal{L}$ de tipo de semejanza relacional τ_i, entonces

$$\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I) \leq \mathcal{L} .$$

Prueba:

Abreviemos $L_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$ por L_I . Sea τ un tipo de semejanza y $C = \{c_n : n \in \omega\}$ un conjunto de constantes distintas que no aparecen en τ, y sea Φ el conjunto de las sentencias de $L_I[\tau \cup C]$ en las que no aparece más que un número finito de constantes de C . Pongamos $\tau_0 = \tau$ y abreviemos $\tau \cup \{c_0, \dots, c_n\}$ por τ_{n+1} . Definimos una función que asigna a cada $\varphi \in \Phi$ una sentencia $\varphi^* \in L[\tau \cup C]$ tal que:

si $\varphi \in L_I[\tau_n]$, $\varphi^* \in L[\tau_n]$ y $\mathrm{Mod}_{L_I}^{\tau_n}(\varphi) = \mathrm{Mod}_L^{\tau_n}(\varphi^*)$.

(i) Si φ es atómica, hay, por atomicidad de $\mathcal{L}$, una correspondiente φ^* con las propiedades exigidas.

(ii) Supuesto obtenidas φ y ψ , como $\mathcal{L}$ está cerrada bajo negación y conjunción, podemos especificar:

$$(\neg \varphi)^* = \neg \varphi^*$$

$$(\varphi \wedge \psi)^* = (\varphi^* \wedge \psi^*) .$$

(iii) Para el caso $\exists x\, \varphi(x)$: si $\exists x\, \varphi(x) \in \Phi$, hay un menor número natural n tal que $\exists x\, \varphi(x) \in L_I[\tau_n]$. Definimos entonces :

$$(\exists x\, \varphi(x))^* = \exists c_n\, \varphi^*(c_n) .$$

(iv) Consideremos, finalmente , el caso

$$\varphi = Q_{K_i}\, x\, \langle \vec{x}_R \rangle_{R \in \tau_i}\, \psi(x)\, \langle \psi_R(\vec{x}_R) \rangle_{R \in \tau_i} .$$

Sea m el menor número natural tal que $\varphi \in L_I[\tau_m]$. Para cada predicado n-ádico $R \in \tau_i$, sea $\vec{c}_R$ la secuencia de constantes $c_m, \ldots, c_{m+n-1}$. Obsérvese que ninguna de ellas está en τ_m . K_i es , por hipótesis, EC en $\mathcal{L}$. Hay así una sentencia $\Theta_i \in L[\tau_i]$ tal que :

$$K_i = \mathrm{Mod}_L^{\tau_i}(\Theta_i) .$$

Por la cláusula (6) de la definición 2.1 de lógicas abstractas, podemos suponer que $\tau_m \cap \tau_i = \phi$. Definimos entonces

$$\varphi^* = (\Theta_i^{\lambda c_m \psi^*(c_m)})\, (\,{}^{R}_{\psi_R^*(\vec{c}_R)})_{R \in \tau_i} \wedge (\exists x\, \psi(x))^* .$$

Veamos que

$$\mathrm{Mod}_{L_I}^{\tau_m}(\varphi) = \mathrm{Mod}_L^{\tau_m}(\varphi^*) .$$

Sea $\mathfrak{A}$ una estructura de tipo τ_m . Observemos que , por hipótesis inductiva:

$$\mathfrak{A} \models_{L_I} \exists x\, \psi(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models_L (\exists x\, \psi(x))^*$$

y que, en consecuencia, tanto si $\mathfrak{A} \models_{L_I} \varphi$ como si $\mathfrak{A} \models_{L} \varphi^*$ tenemos que $\psi(x)^{\mathfrak{A}} \neq \phi$.

Así pues, podemos suponer que $\psi(x)^{\mathfrak{A}} \neq \phi$ y basta con justificar que

$$\mathfrak{A} \models_{L_I} \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models_{L} (\Theta_i^{\lambda c_m \psi^*(c_m)})\left(^{R}_{\psi_R^*(\vec{c}_R)}\right)_{R \in \tau_i} .$$

A tal efecto observemos en primer lugar que son equivalentes:

(1) $\mathfrak{A} \models_{L_I} \varphi$

(2) $\langle A, \psi_R(\vec{x}_R)^{\mathfrak{A}} \rangle_{R \in \tau_i} \restriction \psi(x)^{\mathfrak{A}} \in K_i$

(3) $\langle A, \psi_R(\vec{x}_R)^{\mathfrak{A}} \rangle_{R \in \tau_i} \restriction \psi(x)^{\mathfrak{A}} \models_{L} \Theta_i$.

Sea $\mathfrak{B}$ la estructura de tipo $\tau_m \cup \tau_i$ definida por

- $\mathfrak{B} \restriction \tau_m = \mathfrak{A}$
- $R^{\mathfrak{B}} = \psi_R(\vec{x}_R)^{\mathfrak{A}}$ para cada $R \in \tau_i$

Por hipótesis inductiva tenemos que

$$(\lambda c_m \psi^*(c_m))^{\mathfrak{B}} = \psi(x)^{\mathfrak{B}} = \psi(x)^{\mathfrak{A}}$$

$$(\lambda \vec{c}_R \psi_R^*(\vec{c}_R))^{\mathfrak{B}} = \psi_R(\vec{x}_R)^{\mathfrak{B}} = \psi_R(\vec{x}_R)^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$$

y , así, también son equivalentes a (1),(2) y (3) las aserciones:

(4) $\mathfrak{B} \models_{L} \Theta_i^{\lambda c_m \psi^*(c_m)}$

(5) $\mathfrak{B} \models_{L} (\Theta_i^{\lambda c_m \psi^*(c_m)})\left(^{R}_{\psi_R^*(\vec{c}_R)}\right)_{R \in \tau_i}$.

Como esta última sentencia es de tipo τ_m , (5) equivale a

(6) $\mathfrak{A} \models_{L} (\Theta_i^{\lambda c_m \psi^*(c_m)})\left(^{R}_{\psi_R^*(\vec{c}_R)}\right)_{R \in \tau_i}$.

La equivalencia entre (1) y (6) justifica, por tanto, el punto (iv) y con él el teorema .

4.9 Teorema de representación de lógicas regulares

Si $\mathcal{L}$ es una lógica regular y $\{K_i : i \in I\}$ es la colección de las clases EC de $\mathcal{L}$ de tipo de semejanza relacional, entonces

$$\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \quad I)$$

Prueba:

Por el lema 4.8 ya tenemos que

$$\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I) \leq \mathcal{L} \ .$$

Para obtener

$$\mathcal{L} \leq \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \quad I)$$

basta mostrar, en virtud de 3.8, que toda clase EC de $\mathcal{L}$ de tipo de semejanza relacional es EC en $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$, es decir, que cada K_i es EC en $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$ .Pero esto lo garantiza el lema 4.7. Así pues,

$$\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \quad I) \ .$$

4.10 Observación

Se pueden obtener mejoras en este teorema de representación que garanticen que I es un conjunto y que los tipos de semejanza τ_i de las clases K_i posean un tamaño prefijado, pero para ello hay que admitir que las lógicas verifican condiciones adicionales.

5. K-LOGICAS Y $\mathfrak{M}$-LOGICAS

Definimos en este apartado los conceptos de K-lógica y $\mathfrak{M}$-lógica . Su motivación ha sido ya expuesta en la introducción general.

5.1 **Definición**: K-lógicas

A cada clase de estructuras K cerrada bajo isomorfía corresponde una lógica $\mathcal{L}_K$, la lógica en la que los conceptos relativos a K se consideran conceptos lógicos.

Sea τ_K el tipo de semejanza de K . Los signos lógicos de $\mathcal{L}_K$ son los usuales de primer orden , los signos de τ_K y un predicado monádico U que no está en τ_K . Esta lógica sólo se aplica a tipos de semejanza τ que verifican

(1) $\tau_K \cup \{U\} \subseteq \tau$

y, en estos tipos de semejanza, sus fórmulas y sentencias son las de primer orden. Por tanto, si no se dice explícitamente lo contrario, en el contexto de $\mathcal{L}_K$ un tipo de semejanza τ arbitrario será un tipo de semejanza que cumple la condición (1).

Así, las estructuras consideradas serán únicamente aquellas que posean el adecuado tipo de semejanza. Pero entre éstas tendremos en cuenta únicamente las que interpretan de modo canónico los signos de $\tau_K \cup \{U\}$. Diremos que $\mathfrak{A}$ es una K-estructura o un K-modelo si

(2) $U^{\mathfrak{A}}$ es τ_K-cerrado en $\mathfrak{A}$ y $(\mathfrak{A} \upharpoonright \tau_K) \mid U^{\mathfrak{A}} \in K$.

Así pues, todo K-modelo posee una subestructura,cuyo universo es la interpretación de U, que está en K .

La relación de satisfacción entre sentencias y K-modelos es exactamente la misma que en la lógica de primer orden. Cambian, sin embargo, los conceptos de satisfacibilidad, validez y consecuencia.

Diremos que un conjunto Σ de sentencias es satisfacible en $\mathcal{L}_K$ si Σ posee un K-modelo. Denotaremos mediante $\models_K$ la relación de consecuencia en $\mathcal{L}_K$, que se define como sigue:

(3) $\Sigma \models_K \sigma$ si y sólo si todo K-modelo de Σ es un modelo de σ .

Similarmente, una sentencia K-válida será una sentencia verdadera en todo K-modelo. Pondremos $\models_K \sigma$ para indicar que σ es K-válida.

5.2 <u>Definición</u> : $\mathfrak{M}$-lógicas

En el caso particular de que la clase K de estructuras esté constituida por estructuras isomorfas a una estructura dada $\mathfrak{M}$, es decir,

$$K = \{\mathfrak{N} : \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}\}$$

decimos que $\mathcal{L}_K$ es la $\mathfrak{M}$-lógica, esto es, la lógica asociada al modelo $\mathfrak{M}$. Usamos entonces las notaciones $\tau_{\mathfrak{M}}$, $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$, $\models_{\mathfrak{M}}$ y la terminología de $\mathfrak{M}$-modelo, $\mathfrak{M}$-satisfacibilidad y $\mathfrak{M}$-validez. Así, por ejemplo,

$\mathfrak{N}$ es un $\mathfrak{M}$-modelo si y sólo si $U^{\mathfrak{N}}$ es $\tau_{\mathfrak{M}}$-cerrado en $\mathfrak{N}$ y $(\mathfrak{N} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}}) | U^{\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{M}$.

5.3 <u>Ejemplo</u> : ω-lógica

La ω-lógica es el ejemplo más clásico de K-lógica. En una de sus versiones, se formula en el tipo de semejanza $\tau = \{c_n : n \in \omega\}$ y asociada a la clase

$$K = \{\mathfrak{N} : \mathfrak{N} \text{ es de tipo } \tau \text{ y } A = \{c_n^{\mathfrak{N}} : n \in \omega\}\}.$$

La ω-lógica puede usarse, por ejemplo, para estudiar los cuerpos ordenados arquimedianos. En efecto, si T es la teoría de cuerpos ordenados y Σ el conjunto de sentencias

$$\{Uc_n : n\in\omega\} \cup \{c_n \approx \bar{n} : n\in\omega\} \cup \{\forall x\, \exists y\, (x < y \wedge Uy)\}$$

donde $\bar{n}$ es el término propio del lenguaje de T para denotar el número n (es decir $\bar{n} = 1 + \ldots + 1$ (n veces)), tenemos :

$\mathfrak{A}$ es un cuerpo ordenado arquimediano si y sólo si $\mathfrak{A}$ es un K-modelo de $T \cup \Sigma$. Por tanto, las K-consecuencias de $T \cup \Sigma$ son los enunciados verdaderos en todos los cuerpos arquimedianos.

5.4 <u>Ejemplo</u> : órdenes semejantes a ω_1

Un orden semejante a ω_1 (ω_1 -like) es un orden total no numerable en el que cada elemento tiene un número numerable de predecesores. El tipo de semejanza τ_K consta ahora de un único predicado diádico, $<$, y la clase K es

$$K = \{ \mathfrak{A} : <^{\mathfrak{A}} \text{ es un orden de } A \text{ semejante a } \omega_1 \}$$

Un K-modelo es, pues, un modelo $\mathfrak{A}$ en el que

$$<^{\mathfrak{A}} \text{ es un orden de } U^{\mathfrak{A}} \text{ semejante a } \omega_1$$

(más precisamente, $<^{\mathfrak{A}} \cap (U^{\mathfrak{A}} \times U^{\mathfrak{A}})$ es un orden de $U^{\mathfrak{A}}$ semejante a ω_1).

La lógica $\mathcal{L}_K$ de los órdenes semejantes a ω_1 tiene una estrecha relación con la lógica abstracta $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_1)$. Ciertos resultados sobre $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_1)$ pueden obtenerse a partir de los correspondientes para $\mathcal{L}_K$.

5.5 <u>Ejemplo</u> : estructuras finitas

La lógica es la asociada a la clase K de estructuras en tipo de semejanza nulo cuyo universo es finito, esto es,

$$K = \{ \langle A \rangle : A \text{ es finito} \}$$

Así, $\mathfrak{A}$ es un K-modelo si y sólo si $U^{\mathfrak{A}}$ es un conjunto finito pero no vacío.

Otros ejemplos, especialmente de $\mathfrak{M}$-lógicas, se tratan en profundidad en el último capítulo.

5.6 <u>Observación</u>

Las K-lógicas pueden tratarse como caso particular de lógicas abstractas. El tratamiento resulta, sin embargo, artificial. Consiste en lo siguiente:

Para cada clase K de estructuras de tipo de semejanza τ_K que está cerrada bajo isomorfía, se define una lógica abstracta $\mathcal{L}$ de acuerdo con:

(1) Las sentencias de $\mathcal{L}$ en un tipo de semejanza τ son

$L[\tau] = L_{\omega\omega}[\tau]$ (las de primer orden) si $\tau_K \cup \{U\} \subseteq \tau$

$L[\tau] = \phi$ en otro caso.

(2) La relación $\models_L$ de satisfacción en $\mathcal{L}$ es

$\mathfrak{A} \models_L \varphi$ si y sólo si el tipo de semejanza τ de $\mathfrak{A}$ incluye a $\tau_K \cup \{U\}$, $\mathfrak{A}$ es un K-modelo, $\varphi \in L_{\omega\omega}[\tau]$ y $\mathfrak{A} \models \varphi$.

De acuerdo con esta definición, $\mathcal{L}$ no es atómica. De hecho no tiene sentencias en tipos de semejanza que no incluyan a $\tau_K \cup \{U\}$. Esto no puede solucionarse definiendo

$L[\tau] = L_{\omega\omega}[\tau]$ también si $\tau_K \cup \{U\} \nsubseteq \tau$

y puntualizando que si el tipo de semejanza τ de $\mathfrak{A}$ no incluye a $\tau_K \cup \{U\}$, entonces

$\mathfrak{A} \models_L \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$

pues en ese caso no se cumpliría la cláusula (5) de la definición 2.1 de lógicas abstractas.

Esta lógica no extiende, por tanto, a la lógica de primer orden. El hecho de que verifique las condiciones que definen a las lógicas abstractas debería quizás considerarse como una señal de que el concepto mismo de lógica abstracta es demasiado amplio.

5.7 <u>Observación</u>

En lo que respecta a las relaciones entre la lógica $\mathcal{L}_K$ y la lógica abstracta $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ definida en 4.1, tenemos que decir lo siguiente:

(1) Hay una sentencia σ de tipo $\tau_K \cup \{U\}$ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ tal que (abreviando $L_{\omega\omega}(Q_K)$ por $L(Q_K)$ en lo sucesivo) :

$\mathfrak{A} \models_{L(Q_K)} \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ es un K-modelo

Supongamos, a estos efectos, que τ_K es relacional. Entonces la sentencia es, de acuerdo con la notación de 4.1,

$$\sigma = Q_K\, x \langle \vec{x}_R \rangle_{R \in \tau_K}\; Ux\; \langle R\vec{x}_R \rangle_{R \in \tau_K}$$

Por tanto

(2) Hay una sentencia σ de tipo $\tau_K \cup \{U\}$ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ tal que para cada tipo de semejanza τ (que incluye a $\tau_K \cup \{U\}$) y cada conjunto Σ de sentencias de primer orden de tipo τ :

$$\{\varphi \in L_{\omega\omega}[\tau] \;:\Sigma \cup \{\sigma\} \models_{L(Q_K)} \varphi\} = \{\varphi : \Sigma \models_K \varphi\} \quad .$$

Así pues, $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ puede reemplazar a $\mathcal{L}_K$ a efectos de obtener consecuencias de primer orden. La situación inversa no se da:

(3) Si K es la clase de las estructuras finitas (definida en 5.5), hay una sentencia σ de tipo $\{U\}$ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ tal que para cada conjunto de sentencias Σ de primer orden y de tipo $\{U\}$:

$$\{\varphi \in L_{\omega\omega}[\{U\}] : \sigma \models_{L(Q_K)} \varphi\} \neq \{\varphi : \Sigma \models_K \varphi\} \quad .$$

En efecto, obsérvese que las sentencias típicas de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ son de la forma

$$Q_K x\; \varphi(x)$$

donde

$$\mathfrak{A} \models_{L(Q_K)} Q_K x\; \varphi(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi(x)^{\mathfrak{A}} \text{ es finito y no vacío.}$$

Entonces, nuestra sentencia será

$$\sigma = (\,Q_K x\; Ux \longrightarrow \overset{1}{\exists} x\; Ux\,)$$

donde $\overset{1}{\exists} x\; Ux$ abrevia $\exists x\, \forall y (Uy \longleftrightarrow y \simeq x)$.

Sea Σ un conjunto de sentencias de primer orden de tipo $\{U\}$ y supongamos, a efectos de obtener una contradicción, que

$$\{\varphi \in L_{\omega\omega}[\{U\}] : \sigma \models_{L(Q_K)} \varphi\} = \{\varphi : \Sigma \models_K \varphi\}$$

Como σ posee modelos en los que U se interpreta como un conjunto infinito,

$$\sigma \not\models_{L(Q_K)} \overset{1}{\exists} x\ Ux$$

y así $\qquad \Sigma \not\models_K \overset{1}{\exists} x\ Ux$.

Hay, pues, un K-modelo $\mathfrak{A}$ de $\Sigma \cup \{\neg \overset{1}{\exists} x\ Ux\}$. Como $U^{\mathfrak{A}}$ es finito hay un número natural $n > 1$ tal que $|U^{\mathfrak{A}}| = n$. Sea $\overset{n}{\exists} x\ Ux$ una abreviación de

$$\exists x_1 \ldots x_n\ (Ux_1 \wedge \ldots \wedge Ux_n \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} \neg\, x_i \approx x_j \wedge \forall y(Uy \longrightarrow \bigvee_{i\leq n} x_i \approx y\ ))$$

enunciado de primer orden que expresa que $|U^{\mathfrak{A}}| = n$. Tenemos que

$$\Sigma \not\models_K \neg \overset{n}{\exists} x\ Ux$$

y así $\qquad \sigma \not\models_{L(Q_K)} \neg \overset{n}{\exists} x\ Ux.$

Sin embargo, σ no tiene ningún modelo $\mathfrak{A}$ en el que $|U^{\mathfrak{A}}| = n$, pues en todo modelo $\mathfrak{A}$ de σ $U^{\mathfrak{A}}$ es infinito o bien tiene un sólo elemento. Por tanto

$$\sigma \models_{L(Q_K)} \neg \overset{n}{\exists} x\ Ux$$

Esta contradicción justifica el punto (3).

Los puntos (2) y (3) no deben interpretarse como una muestra de que $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ es una lógica mejor que $\mathcal{L}_K$. La relación de consecuencia $\models_K$ nos proporciona lo que pretendemos: los enunciados verdaderos en todos los K-modelos de una teoría Σ . $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ nos lo proporciona también, pero a costa de mayor complejidad. Ciertos resultados generales que podemos usar en $\mathcal{L}_K$ para garantizar, por ejemplo, la existencia de K-modelos, no tienen por qué ser extrapolables a $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$. En particular, $\mathcal{L}_K$ puede ser (de acuerdo con la notación del próximo apartado) compacta y $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_K)$ no serlo.

6. TEOREMAS LOGICOS PARA LOGICAS ABSTRACTAS

Muchos teoremas célebres de la lógica de primer orden han sido reformulados con generalidad como condiciones que las diversas lógicas abstractas pueden o no verificar. Entre ellos está el teorema de compacidad, el teorema de completud, el teorema de Löwenheim-Skolem, el teorema de interpolación de Craig y el teorema de definibilidad de Beth. Aquí estaremos únicamente interesados en ciertas versiones de los teoremas de compacidad y completud.

6.1 Definición

Un conjunto Σ de sentencias de una lógica abstracta $\mathcal{L}$ es finitamente satisfacible si todo subconjunto finito de Σ tiene un modelo.

6.2 Definición : Compacidad

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ es compacta, o verifica el teorema de compacidad, si todo conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$ finitamente satisfacible es satisfacible.

6.3 Ejemplos

Hay pocas lógicas abstractas conocidas y no equivalentes a la lógica de primer orden que sean compactas. Entre ellas está la lógica $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q^{cf\omega})$ de Shelah. Se trata de una extensión de la lógica de primer orden mediante un cuantificador $Q^{cf\omega}$ cuya sintaxis y semántica se rige por las siguientes reglas adicionales a las de primer orden:

(1) Si φ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q^{cf\omega})$, entonces $Q^{cf\omega}xy\,\varphi$ es una fórmula de tipo τ de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q^{cf\omega})$.

(2) Si $\mathfrak{A}$, φ son del mismo tipo de semejanza, s es una asignación en $\mathfrak{A}$ y abreviamos $L_{\omega\omega}(Q^{cf\omega})$ por L,

$\mathfrak{A} \models_L Q^{cf\omega}xy\,\varphi\,[s]$ si y sólo si la relación

$$\{<a,b> : \mathfrak{A} \models_L \varphi\,[s^{x\ y}_{a\ b}]\}$$

es un orden total (de su campo) de cofinalidad ω.

$\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q^{cf\omega})$ es una lógica regular. Otra lógica abstracta compacta, si bien no regular, es la definida en 2.9.

Hay lógicas abstractas que, sin ser compactas, cumplen ciertas versiones más débiles del teorema de compacidad. En particular, pueden verificarlo para conjuntos de sentencias de cierto tamaño pero no para otros. Ello conduce a la siguiente definición:

6.4 <u>Definición</u> : κ-compacidad

Sea $\mathcal{L}$ una lógica abstracta y κ un cardinal infinito. Decimos que $\mathcal{L}$ es κ-compacta si todo conjunto de a lo sumo κ sentencias de $\mathcal{L}$ finitamente satisfacible es satisfacible. En particular, ω-compacidad es compacidad para conjuntos numerables de sentencias.

6.5 <u>Ejemplos</u>

(1) $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_1)$ es una lógica regular y ω-compacta, pero no es ω_1-compacta.

(2) $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_0)$, $\mathcal{L}^{w}_{II}$, $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ y la lógica de segundo orden $\mathcal{L}_{II}$ no son ω-compactas.

6.6 <u>Observación</u>

Si $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ son lógicas abstractas y $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ y $\mathcal{L}'$ es κ-compacta, también $\mathcal{L}$ es κ-compacta. En especial, pues, la propiedad de κ-compacidad es invariante bajo equivalencia entre lógicas.

6.7 <u>Teorema</u>

Para cada lógica regular $\mathcal{L}$:

$\mathcal{L}$ es ω-compacta si y sólo si $\langle\omega,<\rangle$ no es RPC_δ en $\mathcal{L}$.

Prueba:

Exponemos la prueba con detalle dado que en el próximo capítulo será utilizada y discutida en su versión para K-lógicas.

Supongamos en primer lugar que $\langle\omega,<\rangle$ es RPC_δ en $\mathcal{L}$ y veamos que en ese caso $\mathcal{L}$ no es ω-compacta. Hay, bajo dicha hipótesis, un conjunto numerable Σ de sentencias de $\mathcal{L}$ de un tipo de semejanza τ que contiene al predicado diádico $<$ y un predicado monádico V y que verifica lo siguiente:

Para cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo $\{<\}$

$\mathfrak{A} \cong \langle\omega,<\rangle$ si y sólo si hay un modelo $\mathfrak{B}$ de tipo τ tal que $\mathfrak{B} \models_L \Sigma$, $V^{\mathfrak{B}} \neq \phi$ y $(\mathfrak{B}\restriction\{<\})\mid V^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}$.

Sea $\{c_n : n\in\omega\}$ una colección de constantes que no aparecen en τ y definamos

$$\Delta = \Sigma \cup \{c_{n+1} < c_n : n\in\omega\} \cup \{Vc_n : n\in\omega\}.$$

Δ es numerable y finitamente satisfacible, pero no es satisfacible. Por tanto, $\mathcal{L}$ no es ω-compacta.

Supongamos, a continuación, que $\mathcal{L}$ no es ω-compacta y veamos que, en ese caso, $\langle\omega,<\rangle$ es RCP_δ en $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ es regular, podemos suponer (por 6.6 y 4.9) que $\mathcal{L}$ es de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$. Esto nos permitirá tratar con mayor comodidad las sentencias de $\mathcal{L}$. Tenemos, por hipótesis un conjunto Σ de sentencias de $\mathcal{L}$ que es numerable y finitamente satisfacible, pero no es satisfacible. Como $\mathcal{L}$ es regular podemos suponer, sin perder generalidad, que el tipo de semejanza τ de Σ es relacional (véase 2.17).

Sea $\{\sigma_n : n\in\omega\}$ una enumeración de las sentencias de Σ y definamos, para cada $n\in\omega$,

$$\alpha_n = (\sigma_0 \wedge \ldots \wedge \sigma_n).$$

Por hipótesis cada α_n posee un modelo $\mathfrak{A}_n$ y, por construcción de α_n:

$$\mathfrak{A}_n \models_L \alpha_m \qquad \text{para cada } m,n \in \omega \text{ tales que } m \leq n.$$

Por la cláusula (6) de la definición 2.1 de lógica abstracta, podemos admitir que el predicado diádico $<$ propio de $\langle \omega, < \rangle$ no está en τ . Sea R un predicado diádico y V un predicado monádico que no aparecen en τ .

Sea Δ el siguiente conjunto de axiomas:

(1) $\exists x\, Vx$

(2) $\forall x(Vx \longleftrightarrow \exists y(x < y \vee y < x))$

(3) $\forall xyz(x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z)$

(4) $\forall x \; \neg\, x < x$

(5) $\forall xy(Vx \wedge Vy \longrightarrow x < y \vee x \simeq y \vee y < x)$

(6) $\forall x(Vx \longrightarrow \exists y\; x < y)$

(7) $\forall x(Vx \longrightarrow \exists y\; Rxy)$

y para cada par de números naturales n,m tales que $m \geqslant n$ y $n \geqslant 1$

$(8)_{n,m}$ $\forall x(\exists y_1 \ldots y_n(y_1 < y_2 < \ldots < y_n < x) \longrightarrow \alpha_m^{\lambda y\, Rxy})$

donde $y_1 < y_2 < \ldots < y_n < x$ es la natural abreviación de

$y_1 < y_2 \wedge \ldots \wedge y_{n-1} < y_n \wedge y_n < x$

y $\alpha_m^{\lambda y\, Rxy}$ es la relativización de α_m a la fórmula Rxy respecto a la variable y .No precisamos introducir constantes para esta relativización dado que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I) .$$

Los axiomas (1)-(6) determinan que en todo modelo $\mathfrak{A}$ de Δ , $V^{\mathfrak{A}}$ es un conjunto no vacío y $<^{\mathfrak{A}}$ es un orden total de $V^{\mathfrak{A}}$ que no posee mayor elemento. Los restantes axiomas garantizarán, como veremos, que cada elemento de $V^{\mathfrak{A}}$ tiene sólo un número finito de predecesores en $<^{\mathfrak{A}}$.

Δ es un conjunto numerable de sentencias. Para justificar que $\langle \omega, < \rangle$ es RPC_δ en $\mathcal{L}$,basta con mostrar que para cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo $\{<\}$:

(i) $\mathfrak{A} \cong \langle \omega, < \rangle$ si y sólo si hay un modelo $\mathfrak{B}$ de tipo $\tau \cup \{V,R,<\}$ tal que $\mathfrak{B} \models_{\mathcal{L}} \Delta$ y $V^{\mathfrak{B}} \neq \phi$ y $(\mathfrak{B} \restriction \{<\}) \mid V^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}$.

Equivalentemente, basta con establecer los dos siguientes puntos:

(ii) Δ tiene un modelo

(iii) Para cada modelo $\mathfrak{A}$ de Δ, $(\mathfrak{A}\restriction\{<\})\mid V^{\mathfrak{A}} \cong \langle\omega,<\rangle$.

Justificamos en primer lugar el punto (ii). Tenemos, por hipótesis, un modelo $\mathfrak{A}_n$ de α_n . Como τ es relacional, podemos definir $\mathfrak{A}$ por

- $A = \omega \cup \bigcup_{n\in\omega} A_n$
- $<^{\mathfrak{A}} = <$ (el orden de los números naturales)
- $R^{\mathfrak{A}} = \{\langle n,a\rangle : n\in\omega \text{ y } a \in A_n\}$
- $P^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{n\in\omega} P^{\mathfrak{A}_n}$ para cada predicado P de τ
- $V^{\mathfrak{A}} = \omega$.

Es obvio que los axiomas (1)-(7) de Δ son verdaderos en $\mathfrak{A}$. La razón de que también los axiomas del grupo (8) sean verdaderos en $\mathfrak{A}$ es la siguiente: si $m \leq n$ entonces $\mathfrak{A}_n \models_L \alpha_m$ y, como $\mathfrak{A}_n = (\mathfrak{A}\restriction\tau)\mid A_n$ y

$$A_n = \{a \in A : \mathfrak{A} \models_L Rxy\ [x/n\ ,y/a]\}$$

resulta que

$$\mathfrak{A} \models_L \alpha_m^{\lambda y\, Rxy}\ [x/n] \quad .$$

Establecido, pues, el punto (ii), consideramos ahora el punto (iii) . Sea $\mathfrak{B}$ un modelo de Δ y veamos que

$$(\mathfrak{B}\restriction\{<\})\mid V^{\mathfrak{B}} \cong \langle\omega,<\rangle \quad .$$

Como ya hemos indicado, $V^{\mathfrak{B}}$ es un conjunto no vacío y $<^{\mathfrak{B}}$ es un orden total de $V^{\mathfrak{B}}$ sin mayor elemento. Falta sólo establecer que cada elemento de $V^{\mathfrak{B}}$ tiene sólo un número finito de predecesores en $<^{\mathfrak{B}}$. Supongamos que, por el contrario, $a \in V^{\mathfrak{B}}$ y a tiene infinitos predecesores en $<^{\mathfrak{B}}$. Entonces, para cada $n \geq 1$,

$$\mathfrak{B} \models_L \exists y_1 \ldots y_n (\, y_1 < y_2 < \ldots < y_n < x\,) \quad [a]$$

y así, por el grupo (8) de axiomas de Δ , para cada $m\in\omega$,

$$\mathfrak{B} \models_L \alpha_m^{\lambda y\, Rxy} \quad [a]$$

Sea $C = \{ b \in B : \langle a,b \rangle \in R^{\mathfrak{B}} \}$. Por el axioma (7) sabemos que $C \neq \emptyset$. Sea, entonces, $\Gamma = (\mathfrak{B} \restriction \tau) \setminus C$. Resulta así que para cada $m \in \omega$,

$$\Gamma \models_L \alpha_m$$

y, por tanto,

$$\Gamma \models_L \Sigma$$

en contradicción con la hipotesis inicial según la cual Σ es insatisfacible. Esta contradicción justifica el punto (iii) y, por tanto, que $\langle \omega, < \rangle$ es RPC_δ en $\mathcal{L}$. Esto culmina, pues, la prueba del teorema 6.7.

A efectos de reformular ahora adecuadamente el teorema de completud para lógicas abstractas, recapitulemos ciertos hechos conocidos de la lógica de primer orden.

6.8 Completud

Sea $\vdash$ la relación de deducibilidad correspondiente a un determinado cálculo para la lógica de primer orden. La terminología usual es denominar teorema de corrección del cálculo al resultado

(1) Para cada conjunto de sentencias Σ, y cada sentencia σ,
Si $\Sigma \vdash \sigma$, entonces $\Sigma \models \sigma$.

El teorema de completud tiene dos versiones : para validez y para consecuencia. El teorema de completud para validez, que en ocasiones se denomina teorema de completud débil, es

(2) Para cada sentencia σ,
Si $\models \sigma$, entonces $\vdash \sigma$.

Y el teorema de completud para consecuencia, o completud fuerte, es

(3) Para cada conjunto de sentencias Σ, y cada sentencia σ,
Si $\Sigma \models \sigma$, entonces $\Sigma \vdash \sigma$.

Los teoremas de completud están relacionados entre sí y con el teorema de compacidad. En virtud del teorema de finitud para la deducibilidad, esto es,

(4) Para cada conjunto de sentencias Σ, y cada sentencia σ, $\Sigma \vdash \sigma$ si y sólo si hay un subconjunto finito Σ_0 de Σ tal que $\Sigma_0 \vdash \sigma$

podemos obtener el teorema de compacidad a partir del teorema de completud para consecuencia y el teorema de corrección del cálculo. Pero además, en virtud del resultado

(5) Para cualesquiera sentencias $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma$, $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \sigma$ si y sólo si $\vdash (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \rightarrow \sigma$

obtenemos el teorema de completud para consecuencia a partir del teorema de compacidad y el teorema de completud para validez. Como, finalmente, el teorema de completud para validez es un caso particular del teorema de completud para consecuencia, llegamos a la siguiente ecuación

(6) Completud para consecuencia = Completud para validez + Compacidad

No parece fácil formular los teoremas de completud de manera que sean aplicables a otras lógicas. En todo caso se debería precisar primero qué es un cálculo. Hay, sin embargo, un adecuado sustituto que sí es generalizable. Se trata de las siguientes versiones recursivas de los teoremas de completud:

(7) En todo tipo de semejanza recursivo, el conjunto de sentencias válidas es recursivamente enumerable.

(8) En todo tipo de semejanza recursivo, el conjunto de las consecuencias de un conjunto recursivamente enumerable de sentencias es recursivamente enumerable.

A efectos de formular adecuadamente (7) y (8) de manera que sean aplicables a lógicas abstractas, debemos precisar primero el concepto de lógica efectiva y el concepto de lógica efectivamente regular. Predicaremos la efectividad de lógicas abstractas cuyas sentencias sean secuencias finitas de números naturales (en tipos de semejanza recursivos). Recordemos que a cada secuencia finita de números naturales $(r_1,\dots,r_k)$ corresponde un número natural

$$\text{Gö}((r_1,\dots,r_k)) = p_1^{r_1+1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k+1}$$

donde $p_1,\dots,p_k$ son los primeros números primos, y que decimos que un conjunto T de secuencias finitas de números naturales es recursivo o recursivamente enumerable si $\{\text{Gö}(r) : r \in T\}$ lo es .

6.9 Definición: Lógica efectiva

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ es efectiva si cumple las dos siguientes condiciones:

(1) Para cada tipo de semejanza τ y cada $\varphi \in L[\tau]$ hay un subconjunto finito τ_0 de τ tal que $\varphi \in L[\tau_0]$.

(2) Para cada tipo de semejanza recursivo τ , $L[\tau]$ es un conjunto recursivo de secuencias finitas de números naturales.

6.10 Definición: Lógica efectivamente regular

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ es efectivamente regular si es efectiva y regular y en todo tipo de semejanza recursivo τ :

(1) El conjunto de las traducciones a $\mathcal{L}$ de las sentencias atómicas de primer orden de tipo τ es recursivo.

(2) Las operaciones de negación, conjunción, cuantificación existencial , relativización y sustitución son recursivas.

Esto significa, por ejemplo, para la negación, que la relación

$$\{\langle \text{Gö}(\varphi),\text{Gö}(\neg\varphi)\rangle : \varphi \in L[\tau] \}$$

es recursiva. Para la sustitución de predicados y eliminación de signos funcionales y constantes es suficiente , por la condición (1) de la definición 6.9, con sustituciones de un predicado y eliminaciones de un signo funcional o una constante. Así, por ejemplo, para la sustitución de predicados, la cláusula es la siguiente:

Para cada predicado n-ádico R de τ y cada secuencia de n constantes distintas, $c_1,\ldots,c_n$ que no están en τ :

$$\{ \langle Gö(\varphi), Gö(\psi), Gö(\varphi(\tbinom{R}{\psi}))\rangle : \varphi \in L[\tau] \text{ y } \psi \in L[\tau \cup \{c_1,\ldots,c_n\}]\}$$

es recursiva.

6.11 Observaciones

(1) Toda lógica regular de la forma $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$ puede presentarse como (es decir, es equivalente a) una lógica efectivamente regular si I es un conjunto finito y para cada $i \in I$ el tipo de semejanza τ_i de K_i es finito.

(2) Si $\mathcal{L}$ es una lógica efectivamente regular y τ es un tipo de semejanza recursivo, el conjunto de traducciones a $\mathcal{L}$ de las sentencias de primer orden de tipo τ es recursivo.

(3) Las definiciones de lógica efectiva y lógica efectivamente regular que hemos presentado difieren de las de Ebbinghaus (1985) en que allí no se consideran tipos de semejanza recursivos, sino únicamente finitos, y en que no se pide que $L[\tau]$ sea un conjunto recursivo de secuencias finitas de números naturales , sino un subconjunto recursivo del conjunto HF de los conjuntos hereditariamente finitos. Limitarse a tipos de semejanza finitos no es preciso y constituye una pérdida de generalidad inmotivada. En lo que respecta a tratar las sentencias como secuencias finitas de números naturales o como conjuntos hereditariamente finitos, no hay ninguna diferencia esencial. Ambos tratamientos son igual de generales.

6.12 Definiciones

Sea $\mathcal{L}$ una lógica abstracta

(1) $\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para validez si $\mathcal{L}$ es efectiva y en todo tipo de semejanza recursivo τ, el conjunto de las sentencias válidas de $\mathcal{L}$ de tipo τ es recursivamente enumerable.

(2) $\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para consecuencia si $\mathcal{L}$ es efectiva y en todo tipo de semejanza recursivo τ , el conjunto de las consecuencias de un conjunto recursivamente enumerable de sentencias es recursivamente enumerable.

6.13 Observación

La lógica $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ posee un cálculo en un sentido análogo al de primer orden y verifica un correspondiente teorema de completud. Sin embargo no se trata de un cálculo efectivo. La completud de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ es otro tipo de generalización de la completud de primer orden, distinta de la generalización aquí precisada.

6.14 Ejemplos

(1) La lógica regular $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_1)$ es recursivamente enumerable para consecuencia.

(2) La lógica $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q^{cf\omega})$ definida en 6.3 es recursivamente enumerable para consecuencia.

(3) Las lógicas $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_0)$, $\mathcal{L}^{w}_{II}$ y la lógica de segundo orden, $\mathcal{L}_{II}$, son efectivamente regulares pero no son recursivamente enumerables para validez y, por tanto, tampoco para consecuencia.

Ofrecemos a continuación una versión recursiva del teorema de compacidad y de los conceptos de clase EC_{δ} , PC_{δ} y RPC_{δ} .

6.15 Definición : Compacidad recursiva

Una lógica abstracta $\mathcal{L}$ es recursivamente compacta si es efectiva y en todo tipo de semejanza recursivo todo conjunto recursivo de sentencias de $\mathcal{L}$ finitamente satisfacible es satisfacible.

6.16 Definición

Sea $\mathcal{L}$ una lógica efectiva y K una clase de estructuras de tipo de semejanza recursivo τ .

(1) Decimos que K es EC_d en $\mathcal{L}$ si hay un conjunto recursivo $\Sigma \subseteq L[\tau]$ tal que $K = Mod_L^{\tau}(\Sigma)$.

(2) Decimos que K es PC_d en $\mathcal{L}$ si hay un tipo de semejanza recursivo τ' que extiende a τ y un conjunto recursivo $\Sigma \subseteq L[\tau']$ tal que

$$K = \{ \mathfrak{A} \upharpoonright \tau : \mathfrak{A} \in Mod_L^{\tau'}(\Sigma) \}$$

(3) Decimos que K es RPC_d en $\mathcal{L}$ si hay un tipo de semejanza recursivo τ' que extiende a τ, un predicado monádico $V \in \tau' - \tau$ y un conjunto recursivo $\Sigma \subseteq L[\tau']$ tal que

$$K = \{ (\mathfrak{A} \upharpoonright \tau) \mid V^{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in Mod_L^{\tau'}(\Sigma) \text{ y } V^{\mathfrak{A}} \text{ es } \tau\text{-cerrado} \}$$

Si K tiene un solo modelo salvo isomorfía, atribuimos las correspondientes propiedades al modelo, del mismo modo que en la definición 3.4 .

6.17 Observaciones

(1) En virtud de un teorema de Craig (véase Craig (1953)), todo conjunto recursivamente enumerable de sentencias de primer orden posee un conjunto recursivo de axiomas. Este teorema es generalizable a lógicas regulares, pues el conjunto de axiomas en cuestión se obtiene mediante conjunciones de las sentencias del conjunto recursivamente enumerable. Por tanto, la cláusula (2) de la definición 6.12 y la definición 6.15 pueden reformularse indistintamente para conjuntos recursivos o recursivamente enumerables de sentencias.

(2) La ecuación (6) de 6.8 puede ahora formularse en términos de las versiones recursivas de los teoremas de completud y compacidad como sigue:

Enumerabilidad recursiva para consecuencia = Enumerabilidad recursiva para validez + Compacidad recursiva.

Este es el resultado que podemos preguntar si vale o no para lógicas abstractas. Exponemos a continuación los hechos conocidos al respecto. En su versión para K-lógicas serán discutidos en el próximo capítulo.

6.18 Teorema

Para cada lógica efectivamente regular $\mathcal{L}$:

$\mathcal{L}$ es recursivamente compacta si y sólo si $\langle\omega,<\rangle$ no es RPC_d en $\mathcal{L}$.

Prueba:

La prueba es paralela a la del teorema 6.7 . La enumeración $\{\sigma_n : n\in\omega\}$ de Σ se puede escoger recursiva, en cuyo caso el conjunto de axiomas Δ es también recursivo. Los restantes detalles son como en la prueba de 6.7.

6.19 Teorema

Para cada lógica efectivamente regular $\mathcal{L}$:

Si $\mathcal{L}$ es recursivamente compacta y recursivamente enumerable para validez , entonces $\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para consecuencia.

Prueba:

Sea Σ un conjunto recursivamente enumerable de sentencias de $\mathcal{L}$ en un tipo de semejanza recursivo τ y sea $\{\sigma_n : n\in\omega\}$ una enumeración recursiva de Σ . Definamos, para cada $n\in\omega$,

$$\alpha_n = \sigma_0 \wedge \cdots\cdot \wedge \sigma_n \quad .$$

Resulta así que $\{\alpha_n : n\in\omega\}$ es un conjunto recursivo de axiomas para Σ . Por tanto:

$$\{\sigma\in L[\tau] : \Sigma \models_L \sigma\} = \{\sigma\in L[\tau] : \{\alpha_n : n\in\omega\} \models_L \sigma\} \quad .$$

Como $\mathcal{L}$ es recursivamente compacta: para cada $\sigma\in L[\tau]$,

$$\{\alpha_n : n\in\omega\}\models_L \sigma \quad \text{si y sólo si hay un } n\in\omega \text{ tal que } \models_L (\alpha_n \to \sigma)$$

Por tanto

$$\{\sigma\in L[\tau] : \Sigma \models_L \sigma\} = \{\sigma\in L[\tau] : \text{hay un } n\in\omega \text{ tal que } \models_L (\alpha_n \to \sigma)\}$$

Ahora bien, como $\{\alpha_n : n\in\omega\}$ es recursivo, hay una fórmula Σ^0_1 $\varphi(x)$ en el tipo de semejanza aritmético $\tau_{\mathbb{N}} = \{0, S, +, \cdot, <\}$ tal que para cada número natural m

$\mathbb{N} \models \varphi(\bar{m})$ si y sólo si $m \in \{Gö(\alpha_n) : n \in \omega\}$

donde, recordamos, $\mathbb{N} = \langle \omega, 0, S, +, \cdot, < \rangle$ y $\bar{m}$ es el nombre del número m en el tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ ($\bar{0} = 0$ y $\overline{n+1} = S\bar{n}$).

Similarmente, como $\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para validez , $\{\sigma \in L[\tau] : \models_L \sigma\}$ es recursivamente enumerable y hay entonces una fórmula Σ^0_1 $\psi(x)$ en el tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ tal que para cada número natural n

$\mathbb{N} \models \psi(\bar{n})$ si y sólo si $n \in \{Gö(\sigma) : \sigma \in L[\tau] \text{ y } \models_L \sigma\}$

Finalmente, como la conjunción y la negación en $\mathcal{L}$ son operaciones recursivas, hay una fórmula Σ^0_1 $\Theta(x,y,z)$ del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ tal que para cualesquiera números naturales n,m,k,

$\mathbb{N} \models \Theta(\bar{n},\bar{m},\bar{k})$ si y sólo si hay sentencias $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ en $L[\tau]$ tales que $n = Gö(\beta_1)$, $m = Gö(\beta_2)$, $k = Gö(\beta_3)$ y $\beta_3 = (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$.

Así pues, tenemos que

$\mathbb{N} \models \exists xy(\Theta(x,\bar{n},y) \wedge \varphi(x) \wedge \psi(y))$ si y sólo si hay una sentencia σ en $L[\tau]$ tal que $\Sigma \models_L \sigma$ y $n = Gö(\sigma)$.

Por tanto, $\{\sigma \in L[\tau] : \Sigma \models_L \sigma\}$ es recursivamente enumerable, pues $\{Gö(\sigma) : \sigma \in L[\tau] \text{ y } \Sigma \models_L \sigma\}$ es definible en $\mathbb{N}$ mediante una fórmula Σ^0_1 .

6.20 <u>Teorema</u>

Para cada lógica efectivamente regular $\mathcal{L}$:

Si $\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para consecuencia, entonces $\mathcal{L}$ es recursivamente compacta.

Prueba:

Supongamos que $\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para consecuencia pero no es recursivamente compacta. Por el teorema 6.18, $\langle\omega,<\rangle$ no es RPC_d en $\mathcal{L}$. Esto significa que hay un conjunto recursivo Σ de sentencias de $\mathcal{L}$ en un tipo de semejanza recursivo τ que contiene al predicado diádico $<$ y un predicado monádico V y verifica:

(i) Σ es satisfacible

(ii) Para cada modelo $\mathfrak{A}$ de Σ, $(\mathfrak{A}\restriction\{<\})\restriction V^{\mathfrak{A}} \cong \langle\omega,<\rangle$

Como $\mathcal{L}$ es efectivamente regular, podemos suponer que ninguno de los restantes signos de la aritmética, $0, S, +, \cdot$, aparecen en τ. Sea Δ el siguiente conjunto de axiomas:

(1) $V0$

(2) $\forall x(Vx \rightarrow VSx)$

(3) $\forall xy(Vx \wedge Vy \rightarrow V\, x+y \wedge V\, x\cdot y)$

(4) $\forall x(Vx \rightarrow 0<x \vee 0 \approx x)$

(5) $\forall x(Vx \rightarrow x< Sx \wedge \neg\exists y\,(Vy \wedge x<y \wedge y< Sx))$

(6) $\forall xy(Vx \wedge Vy \rightarrow x+0 \approx x \wedge x+Sy \approx S(x+y))$

(7) $\forall xy(Vx \wedge Vy \rightarrow x\cdot 0 \approx 0 \wedge x\cdot Sy \approx x\cdot y+x)$

Observemos que para cada sentencia σ de primer orden y de tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}} = \{0, S, +, \cdot, <\}$

$\mathbb{N} \models \sigma$ si y sólo si $\Sigma\cup\Delta \models_L \sigma^V$

Pero en ese caso

$\{\sigma\in L_{\omega\omega}[\tau_{\mathbb{N}}] : \Sigma\cup\Delta \models_L \sigma^V\}$ es la teoría completa de números.

Como Σ es recursivo y Δ es finito, $\Sigma\cup\Delta$ es recursivo. Como $\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para consecuencia,

$\{\sigma\in L[\tau\cup\tau_{\mathbb{N}}] : \Sigma\cup\Delta \models_L \sigma\}$ es recursivamente enumerable.

Como $\mathcal{L}$ es efectivamente regular, también es entonces recursivamente enumerable el conjunto

$\{\sigma\in L_{\omega\omega}[\tau_{\mathbb{N}}] : \Sigma\cup\Delta \models_L \sigma^V\}$

Pero entonces, la teoría completa de números, es decir, el conjunto de enunciados de primer orden verdaderos en $\mathbb{N}$, es recursivamente enumerable. Sabemos, por los teoremas de incompletud de Gödel, que esto no es así. Esta contradicción proviene de admitir que $\mathcal{L}$ no es recursivamente compacta. Esto establece, pues, el teorema.

6.21 <u>Corolario</u>

Para cada lógica efectivamente regular $\mathcal{L}$,

$\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para consecuencia si y sólo si $\mathcal{L}$ es recursivamente compacta y recursivamente enumerable para validez.

Prueba: por 6.19 y 6.20.

6.22 <u>Observaciones</u>

El corolario 6.21 establece que la versión recursiva de la ecuación (6) de 6.8 vale para las lógicas efectivamente regulares. En el próximo capítulo veremos que también vale, aunque por razones diferentes, para K-lógicas. Otra pregunta natural en este contexto es si las distintas versiones recursivas del teorema de completud (para validez y para consecuencia) son equivalentes para lógicas efectivamente regulares. Hay una respuesta conocida pero no completa. Es sabido que

Si $\mathcal{L}$ es una lógica efectivamente regular de la forma $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_{K_i} : i \in I)$ donde I es un conjunto finito y cada tipo de semejanza τ_i es finito, entonces

$\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para consecuencia (en tipos de semejanza finitos) si y sólo si $\mathcal{L}$ es recursivamente enumerable para validez (en tipos de semejanza finitos)

La prueba de este resultado hace uso esencial de la generalización a lógicas abstractas del siguiente teorema de Craig & Vaught :

Para cada conjunto recursivo Σ de sentencias de primer orden de tipo de semejanza finito τ todos cuyos modelos son infinitos, hay un tipo de semejanza finito τ' que extiende a τ y una sentencia σ de tipo τ' tal que

$$\{\varphi : \Sigma \models \varphi\} = \{\varphi : \sigma \models \varphi \quad \text{y} \quad \varphi \text{ es de tipo } \tau\}$$

Mediante la generalización de este teorema a lógicas abstractas del tipo antes indicado es posible sustituir el conjunto Δ en la versión recursiva de la prueba del teorema 6.7 por una sola sentencia si el conjunto Σ tiene tipo de semejanza finito.

En el próximo capítulo haremos uso esencial de variaciones del teorema de Craig & Vaught para obtener resultados análogos, e incluso más completos para K-lógicas.

NOTAS AL CAPITULO I

En Barwise & Feferman (1985) se ofrece una exposición exhaustiva y puesta al día de prácticamente todo lo concerniente a lógicas abstractas. La obra está formada por contribuciones de diversos autores. Ebbinghaus expone los conceptos básicos (la referencia es Ebbinghaus (1985)). Nos hemos atenido a esta exposición en la medida de lo posible. Las discrepancias han aparecido únicamente en lo que afecta a la sustitución y en el tratamiento de los cuantificadores de Lindström.

La definición de sustitución en Ebbinghaus (1985) es incorrecta. En 2.15, 2.16 y 2.17 se discute y reformula este concepto. Los cuantificadores de Lindström aparecen por primera vez en Lindström (1966). En esa primera versión están asociados a clases de estructuras de tipos de semejanza finito y no admiten relativización. En Barwise (1974) y Makowsky & Shelah & Stavi (1976) se reformulan con relativización. En Ebbinghaus (1985) se presentan ambas versiones. En la sección 4 hemos introducido los cuantificadores de Lindström. Los definimos asociados a clases de estructuras cuyo tipo de semejanza puede ser infinito, pero debe ser relacional. Ceñirse a tipos de semejanza relacionales no es una pérdida de generalidad, como se muestra en 3.8, y permite exponer con mayor simplicidad los resultados pertinentes. Admitir tipos de semejanza infinitos es importante a efectos de obtener un teorema de representación absolutamente general para lógicas regulares (teorema 4.9). Este teorema de representación no se obtiene en toda su generalidad en Ebbinghaus (1985), debido a confusiones en torno al concepto de sustitución que impiden tomar en consideración cuantificadores de Lindström asociados a clases de estructuras de tipos de semejanza infinitos.

Las $\mathfrak{M}$-lógicas se consideran con cierto detalle, pero desde otra perspectiva en Barwise (1975). En Flum (1975) se hace uso de las K-lógicas, presentadas como lógicas abstractas, para obtener información sobre los números de Hanf de otras lógicas abstractas. En Ebbinghaus (1985) también se presentan como lógicas abstractas y se utilizan para obtener resultados sobre completud y compacidad para otras lógicas abstractas. En la sección 5 se discute esta presentación.

La exposición de los teoremas lógicos en la sección 6 es acorde con Ebbinghaus (1985) . Unicamente hay diferencias en lo que atañe a cuestiones de efectividad. En Ebbinghaus (1985) sólo se tienen en cuenta tipos de semejanza finitos para enunciar propiedades tales como enumerabilidad recursiva para consecuencia o para validez. La única razón que justifica esta limitación es ganar una ficticia generalidad en resultados , pues éstos dependen en muchas ocasiones del teorema de Craig & Vaught citado en 6.22 (véase Craig & Vaught (1958)) y este teorema está formulado para tipos de semejanza finitos. Aquí hemos ganado generalidad al definir los conceptos para cualesquiera tipos de semejanza recursivos. Por lo demás, los teoremas 6.7, 6.18 , 6.19 y 6.20 , así como el resultado indicado en 6.22, pueden encontrarse , con formulaciones en ocasiones distintas (por ejemplo, en términos de números de buen orden), en Ebbinghaus (1985). En particular, la idea básica de la prueba de 6.7 está también en Flum (1975) .

Este capítulo es fundamentalmente de exposición y no hay , por tanto, resultados propiamente originales (con la excepción de 5.7 , donde se comparan lógicas abstractas y K-lógicas).

CAPITULO II : COMPACIDAD Y COMPLETUD EN K-LOGICAS

En el capítulo previo se han obtenido formulaciones aplicables a lógicas abstractas cualesquiera del teorema de completud y del teorema de compacidad, así como de ciertas debilitaciones de este último. Especialmente interesantes han resultado ser las caracterizaciones de ω-compacidad y compacidad recursiva para lógicas regulares y lógicas efectivamente regulares: ω-compacidad equivale a que $\langle \omega, < \rangle$ no sea RPC_{δ} y compacidad recursiva a que no sea RPC_{d}. Estas caracterizaciones han permitido obtener la versión recursiva de

Completud para consecuencia = Completud para validez + Compacidad

para lógicas efectivamente regulares. Finalmente indicamos también que (con ciertas restricciones) las dos versiones del teorema de completud (para consecuencia y para validez) son equivalentes para lógicas efectivamente regulares.

En este capítulo consideraremos estos resultados en el contexto de las K-lógicas. Mostraremos que las caracterizaciones de ω-compacidad y compacidad recursiva obtenidas para lógicas abstractas no son válidas para K-lógicas, aunque sí para cierto tipo de K-lógicas. Obtendremos, sin embargo, otras caracterizaciones de estos conceptos que permitirán obtener también la versión recursiva de la ecuación anterior para K-lógicas. Mostraremos que los conceptos de ω-compacidad y compacidad recursiva son realmente distintos, encontrando una K-lógica que posee una propiedad pero no la otra. Finalmente, probaremos que , bajo la natural restricción de que el tipo de semejanza τ_K de K sea finito, las versiones recursivas de completud para validez y para consecuencia son equivalentes para $\mathcal{L}_K$.

Los resultados centrales de este capítulo provienen esencialmente de una serie de variaciones sobre el teorema de Craig & Vaught citado en I.6.22.

Comenzamos con las definiciones precisas para tratar los conceptos de compacidad y completud en K-lógicas.

1. Definición

Decimos que un conjunto Σ de sentencias de una lógica $\mathcal{L}_K$ es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ si todo subconjunto finito de Σ posee un K-modelo.

2. Definición

$\mathcal{L}_K$ es compacta si todo conjunto de sentencias de $\mathcal{L}_K$ finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ es satisfacible en $\mathcal{L}_K$.

3. Definición

Sea μ un cardinal infinito. $\mathcal{L}_K$ es μ-compacta si todo conjunto de a lo sumo μ sentencias de $\mathcal{L}_K$ finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ es satisfacible en $\mathcal{L}_K$.

4. Observaciones

(1) Si K tiene modelos infinitos pero todos ellos de cardinal menor que un cierto cardinal infinito μ, entonces $\mathcal{L}_K$ no es μ-compacta. En efecto, si $\{c_\eta : \eta < \mu\}$ es un conjunto de distintas constantes que no aparecen en τ_K, resulta que el conjunto de sentencias

$$\{Uc_\eta : \eta<\mu\} \cup \{\neg c_\eta \approx c_\xi : \eta<\xi<\mu\}$$

es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$.

(2) La sintaxis de $\mathcal{L}_K$ es la misma que la de la lógica de primer orden en los tipos de semejanza a los que $\mathcal{L}_K$ se aplica. Por tanto, no es preciso redefinir conceptos tales como conjunto recursivo o recursivamente enumerable de sentencias de $\mathcal{L}_K$. Sin embargo, es natural exigir en versiones recursivas de resultados que el tipo de semejanza τ_K sea recursivo.

(3) Suponemos definidos para K-lógicas los conceptos de clase

RPC_{Δ}, RPC_{δ}, RPC_{d} y RPC. En particular, una clase J de estructuras de tipo de semejanza τ (que no es preciso que incluya a τ_K) es RPC_{δ} en $\mathcal{L}_K$ si hay un conjunto numerable de sentencias Σ cuyo tipo de semejanza τ_1 extiende a τ y posee un predicado monádico V que no está en τ y para cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ :

$\mathfrak{A} \in J$ si y sólo si hay un K-modelo $\mathfrak{B}$ de tipo τ_1

tal que:

(i) $\mathfrak{B} \models \Sigma$

(ii) $V^{\mathfrak{B}}$ es τ-cerrado en $\mathfrak{B}$

(iii) $(\mathfrak{B} \upharpoonright \tau) \mid V^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}$

Como es usual, si hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $K = \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$, atribuimos las correspondientes propiedades a $\mathfrak{A}$.

5. Definiciones.

Supongamos que el tipo de semejanza τ_K de la clase K es recursivo. Entonces :

(1) $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para validez si en todo tipo de semejanza recursivo el conjunto de las sentencias válidas en $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable.

(2) $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para consecuencia si en todo tipo de semejanza recursivo el conjunto de las consecuencias en $\mathcal{L}_K$ de un conjunto recursivo de sentencias es recursivamente enumerable.

(3) $\mathcal{L}_K$ es recursivamente compacta si en todo tipo de semejanza recursivo todo conjunto recursivo de sentencias de $\mathcal{L}_K$ finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ es satisfacible en $\mathcal{L}_K$.

6. Observación

Como en el caso de las lógicas efectivamente regulares, también en K-lógicas podemos usar el teorema de Craig que garantiza que todo conjunto recursivamente enumerable de sentencias posee un conjunto recursivo de axiomas. De hecho, si Σ es recursivamente enumerable , Σ posee una enumeración recursiva $\{\sigma_n : n\in\omega\}$. Entonces si definimos para cada $n\in\omega$,

$$\alpha_n = \sigma_0 \wedge \dots \wedge \sigma_n$$

$\{\alpha_n : n\in\omega\}$ es un conjunto recursivo de axiomas para Σ .

Por tanto, en las cláusulas (2) y (3) de la definición previa podemos debilitar la condición de que el conjunto de sentencias sea recursivo por la de que sea recursivamente enumerable.

7. <u>Teorema</u>

Para cada K-lógica de tipo de semejanza recursivo:

Si $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para validez y recursivamente compacta, entonces $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para consecuencia.

Prueba: es paralela a la de I.6.19 .

8. <u>Teorema</u>

Si en K no hay más que un número finito de modelos no isomorfos ,

$\mathcal{L}_K$ es ω-compacta si y sólo si $\langle\omega,<\rangle$ no es RPC_δ en $\mathcal{L}_K$

Prueba:

Como en I.6.7, es inmediato que si $\langle\omega,<\rangle$ es RPC_δ en $\mathcal{L}_K$, $\mathcal{L}_K$ no es ω-compacta. Para establecer que si $\mathcal{L}_K$ no es ω-compacta, entonces $\langle\omega,<\rangle$ es RPC_δ en $\mathcal{L}_K$, usamos también un argumento análogo al de I.6.7, pero con algunas complicaciones adicionales. Dado que $\mathcal{L}_K$ no es ω-compacta, hay un conjunto numerable Σ de sentencias de un tipo de semejanza τ que es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$.

Sea $\{\sigma_n : n\in\omega\}$ una enumeración arbitraria de Σ y definamos , para cada $n\in\omega$:

$$\alpha_n = \sigma_0 \wedge \dots \wedge \sigma_n$$

Para cada $n \in \omega$ tenemos, por hipótesis, un K-modelo $\mathfrak{A}_n$ de α_n. Veamos que podemos suponer que para cada $n,m \in \omega$:

$$(\mathfrak{A}_n \restriction \tau_K) \restriction U^{\mathfrak{A}_n} \cong (\mathfrak{A}_m \restriction \tau_K) \restriction U^{\mathfrak{A}_m} .$$

Sean $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_r$ representantes de las clases de isomorfía de K. Debe haber un i $(1 \leq i \leq r)$ tal que para cada $n \in \omega$:

α_n tiene un K-modelo $\mathfrak{C}_n$ tal que $(\mathfrak{C}_n \restriction \tau_K) \restriction U^{\mathfrak{C}_n} \cong \mathfrak{B}_i$.

Pues, en otro caso, para cada i $(1 \leq i \leq r)$ hay un número natural n_i tal que

α_{n_i} no tiene ningún K-modelo $\mathfrak{C}$ tal que $(\mathfrak{C} \restriction \tau_K) \restriction U^{\mathfrak{C}} \cong \mathfrak{B}_i$.

Escogiendo entonces el máximo n del conjunto $\{n_1, \dots, n_r\}$ resulta que

α_n no tiene ningún K-modelo.

Así pues, podemos admitir que para cualesquiera $n,m \in \omega$

$$(\mathfrak{A}_n \restriction \tau_K) \restriction U^{\mathfrak{A}_n} \cong (\mathfrak{A}_m \restriction \tau_K) \restriction U^{\mathfrak{A}_m}$$

y, por tanto, que hay un modelo $\mathfrak{B} \in K$ tal que para cada $n \in \omega$

(1) $\quad (\mathfrak{A}_n \restriction \tau_K) \restriction U^{\mathfrak{A}_n} = \mathfrak{B}$.

Ahora consideraremos el caso de que τ sea relacional y estableceremos el resultado bajo esta hipótesis. Posteriormente daremos cuenta del caso general.

Como en la prueba de I.6.7, tenemos que para $m,n \in \omega$

(2) $\quad \mathfrak{A}_n \models \alpha_m$ si $m \leq n$.

Podemos suponer que el predicado $<$ correspondiente al orden de los números naturales no aparece en τ. Sea R un predicado diádico nuevo, V un predicado diádico nuevo y Δ el conjunto de sentencias:

(i) $\exists x\, Vx$

(ii) $\forall x(Vx \leftrightarrow \exists y(x \prec y \vee y \prec x))$

(iii) $\forall xyz(x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z)$

(iv) $\forall x \neg x \prec x$

(v) $\forall xy(Vx \wedge Vy \rightarrow x \prec y \vee x \simeq y \vee y \prec x)$

(vi) $\forall x(Vx \rightarrow \exists y\ x \prec y)$

(vii) $\forall x(Vx \rightarrow \exists y\, Rxy)$

y para cada par de números naturales n,m tales que $n \geqslant m$

(viii)$_{n,m}$ $\forall x(\exists y_1 \ldots y_n(y_1 \prec y_2 \prec \cdots \prec y_n \prec x) \rightarrow \alpha_m^{\lambda y\, Rxy})$

El mismo argumento que se emplea en I.6.7 proporciona el resultado siguiente

(3) Para cada modelo $\mathfrak{A}$ de Δ, $(\mathfrak{A} \restriction \{\prec\}) \mid V^{\mathfrak{A}} \cong \langle \omega, < \rangle$

Falta ahora justificar que Δ tiene un K-modelo. Definimos $\mathfrak{C}$ por

- $C = \omega \cup \bigcup_{n\in\omega} A_n$
- $V^{\mathfrak{C}} = \omega$
- $\prec^{\mathfrak{C}} = <$ (el orden de ω)
- $R^{\mathfrak{C}} = \{ \langle n,a \rangle : n \in \omega \text{ y } a \in A_n \}$
- $P^{\mathfrak{C}} = \bigcup_{n\in\omega} P^{\mathfrak{A}_n}$ para cada predicado P de τ .

Así, en particular,

$U^{\mathfrak{C}} = U^{\mathfrak{A}_0} = U^{\mathfrak{A}_n} = B$ para cada $n \in \omega$ (por (1))

y $(\mathfrak{C} \restriction \tau_K) \mid U^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{B}$. Por tanto, $\mathfrak{C}$ es un K-modelo. Del mismo modo que en I.6.7 se justifica que $\mathfrak{C}$ es un modelo de Δ . Esto establece, pues, que $\langle \omega, < \rangle$ es RPC_δ en $\mathcal{L}_K$, bajo la hipótesis de que τ es relacional. Eliminaremos ahora esta hipótesis.

Consideramos el caso general en el que τ no es necesariamente relacional y Σ es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ aunque Σ no posee ningún K-modelo.

Obtenemos un tipo de semejanza relacional τ^r a imagen de τ cambiando cada constante c de τ por un predicado monádico nuevo P_c y cada signo funcional n-ádico f de τ por un predicado n+1-ádico nuevo P_f. A cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ corresponde un modelo $\mathfrak{A}^r$ de tipo τ^r definido por

- $A^r = A$
- $P_c^{\mathfrak{A}r} = \{c^{\mathfrak{A}}\}$ para cada constante $c \in \tau$
- $P_f^{\mathfrak{A}r} = f^{\mathfrak{A}}$ para cada signo funcional $f \in \tau$
- $P^{\mathfrak{A}r} = P^{\mathfrak{A}}$ para cada predicado $P \in \tau$.

Para cada constante $c \in \tau$ sea

$$\sigma_c = \exists x\, P_c x \wedge \forall xy(P_c x \wedge P_c y \longrightarrow x \simeq y)$$

y para cada signo funcional n-ádico $f \in \tau$ sea

$$\sigma_f = \forall x_1 \ldots x_n \exists y\, P_f x_1 \ldots x_n y \wedge \forall x_1 \ldots x_n yz (P_f x_1 \ldots x_n y \wedge P_f x_1 \ldots x_n z \longrightarrow y \simeq z)$$

y definamos

$$\Phi = \{\sigma_c : c \in \tau\} \cup \{\sigma_f : f \in \tau\} .$$

Resulta así que si $\mathfrak{A}$ es de tipo τ^r y $\mathfrak{A} \models \Phi$, hay un modelo $\mathfrak{B}$ de tipo τ tal que $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^r$. Además, para cada sentencia σ de tipo τ poseemos una correspondiente traducción σ^r de tipo τ^r de manera que para cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}^r \models \sigma^r .$$

Definimos una clase de modelos K^r de tipo τ^r por

$$K^r = \{ \mathfrak{A}^r : \mathfrak{A} \in K \} .$$

Resulta entonces que para cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ :

$\mathfrak{A}$ es un K-modelo si y sólo si $\mathfrak{A}^r$ es un K^r-modelo .

Dado que Σ no posee ningún K-modelo, tenemos que

$\{\sigma^r : \sigma \in \Sigma\} \cup \Phi$ no tiene ningún K^r-modelo. Pero cada subconjunto finito de Σ tiene un K-modelo y , por tanto, cada subconjunto finito de $\{\sigma^r : \sigma \in \Sigma\} \cup \Phi$ tiene un K^r-modelo.

Así, la parte ya establecida del teorema nos proporciona (dado que en K^r no hay más que un número finito de modelos salvo isomorfía y podemos suponer que τ es numerable) un conjunto Δ de sentencias que posee un K^r-modelo y tal que para cada K^r-modelo $\mathfrak{C}$ de Δ , $(\mathfrak{C} \upharpoonright \{<\}) \mid V^{\mathfrak{C}} \cong \langle \omega, < \rangle$.

Sea $\Psi = \{\sigma_c : c \in \tau_K\} \cup \{\sigma_f : f \in \tau_K\}$. Como para cada $\mathfrak{B} \in K^r$ ocurre $\mathfrak{B} \models \Psi$, todo K^r-modelo es un modelo de Ψ^U.

Por tanto, $\Delta \cup \Psi^U$ tiene un K^r-modelo, y en todo K^r-modelo $\mathfrak{C}$ de $\Delta \cup \Psi^U$, $(\mathfrak{C} \upharpoonright \{<\}) \mid V^{\mathfrak{C}} \cong \langle \omega, < \rangle$.

Finalmente, reintroducimos los signos propios de τ_K añadiendo a $\Delta \cup \Psi^U$ los enunciados

$\forall x(Ux \longrightarrow (P_c x \longleftrightarrow x \simeq c))$ para cada $c \in \tau_K$

$\forall x_1 \ldots x_n y\, (Ux_1 \wedge \ldots \wedge Ux_n \wedge U_y \longrightarrow (P_f x_1 \ldots x_n y \longleftrightarrow fx_1 \ldots x_n \simeq y))$
para cada $f \in \tau_K$, n-ádico.

Sea Γ el resultado de añadir estas sentencias a $\Delta \cup \Psi^U$. Observemos que todo K^r-modelo de Γ es un K-modelo de Γ y que todo K^r-modelo de $\Delta \cup \Psi^U$ posee una expansión a un K-modelo de Γ. Por tanto :

Γ tiene un K-modelo y en todo K-modelo $\mathfrak{C}$ de Γ , $(\mathfrak{C} \upharpoonright \{<\}) \mid V^{\mathfrak{C}} \cong \langle \omega, < \rangle$.

Como Γ es numerable, concluimos que también $\langle \omega, < \rangle$ es RPC_δ en $\mathcal{L}_K$ aunque τ no sea relacional.

9. <u>Teorema</u>

Si en K no hay más que un número finito de modelos no isomorfos y τ_K es recursivo, entonces :

$\mathcal{L}_K$ es recursivamente compacta si y sólo si $\langle \omega, < \rangle$ no es RPC_d en $\mathcal{L}_K$

Prueba:

Es una versión recursiva de la prueba del teorema 8. La enumeración $\{\sigma_n : n\in\omega\}$ de Σ se escoge recursiva y así $\{\alpha_n : n\in\omega\}$ es recursivo. También es recursivo entonces el conjunto de sentencias Δ. Finalmente, los procesos de eliminación de constantes y signos funcionales y posterior reintroducción son recursivos.

10. <u>Observación</u>

A partir del teorema 9 podríamos mostrar, como en I.6.20, que si en K no hay más que un número finito de modelos salvo isomorfía y τ_K es recursivo:

Si $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para consecuencia, entonces $\mathcal{L}_K$ es recursivamente compacta.

Sin embargo, posteriormente tendremos este resultado sin la restricción expuesta sobre la clase K. Pero la prueba no será análoga a la de I.6.20. La razón es que la restricción de que K tenga sólo un número finito de modelos salvo isomorfía no es eliminable de los teoremas 8 y 9, como veremos a continuación.

11. <u>Contraejemplo</u>

Hay una lógica $\mathcal{L}_K$ de tipo de semejanza finito τ_K que no es recursivamente compacta (por tanto, tampoco ω-compacta) y en la que $\langle\omega,<\rangle$ no es RPC_Δ (por tanto, tampoco es RPC_δ ni RPC_d).

Prueba:

La lógica $\mathcal{L}_K$ es la asociada a la clase K de las estructuras finitas (introducida en I.5.5). Así τ_K es el tipo de semejanza nulo y los K-modelos son las estructuras $\mathfrak{A}$ en las que $U^{\mathfrak{A}}$ es finito pero no vacío.

$\mathcal{L}_K$ no es recursivamente compacta. En efecto, sea el conjunto de enunciados:

$$\{\forall x\, Ux\} \cup \{\exists x_1 \ldots x_n \bigwedge_{i<j\leq n} \neg x_i \approx x_j \ : \ n \geq 2\}$$

Cada subconjunto finito de Σ tiene un K-modelo, pero Σ no tiene ninguno, pues en todo modelo $\mathfrak{A}$ de Σ, $U^{\mathfrak{A}}$ es infinito.

Veamos ahora que $\langle\omega,<\rangle$ no es RPC_Δ en $\mathcal{L}_K$. Mostraremos que si $\langle\omega,<\rangle$ fuera RPC_Δ en $\mathcal{L}_K$, también sería RPC_Δ en primer orden. Sin embargo, $\langle\omega,<\rangle$ no es RPC_Δ en primer orden, pues la lógica de primer orden es compacta. Por tanto, esto concluirá la prueba.

Supongamos, pues, que $\langle\omega,<\rangle$ es RPC_Δ en $\mathcal{L}_K$. En ese caso hay un conjunto de sentencias Σ en un tipo de semejanza τ que posee el predicado diádico $<$ y un predicado monádico V que posee un K-modelo y todos cuyos K-modelos $\mathfrak{A}$ verifican:

$$(\mathfrak{A}\restriction\{<\})|V^{\mathfrak{A}} \cong \langle\omega,<\rangle \quad .$$

Hay, así, un K-modelo $\mathfrak{B}$ de Σ. Entonces $U^{\mathfrak{B}}$ es finito y no vacío. Sea $n = |U^{\mathfrak{B}}|$ y φ_n el enunciado de primer orden que verifica

$\mathfrak{A}\models\varphi_n$ si y sólo si $|U^{\mathfrak{A}}| = n$.

Observemos que:

(1) $\Sigma\cup\{\varphi_n\}$ tiene un modelo, pues $\mathfrak{B}\models\Sigma\cup\{\varphi_n\}$.

(2) Para cada modelo $\mathfrak{A}$ de $\Sigma\cup\{\varphi_n\}$, $(\mathfrak{A}\restriction\{<\})|V^{\mathfrak{A}} \cong \langle\omega,<\rangle$ pues todo modelo de $\Sigma\cup\{\varphi_n\}$ es un K-modelo de Σ .

De (1) y (2) se concluye que $\langle\omega,<\rangle$ es RPC_Δ en primer orden. Esto concluye, por tanto, la argumentación.

12. Observaciones

Establecido ya que ω-compacidad y compacidad recursiva no son equivalentes a que $\langle\omega,<\rangle$ sea RPC_δ y RPC_d, respectivamente, en K-lógicas, mostraremos ahora que hay, sin embargo, una caracterización análoga que sí se verifica: en ella la clase de las estructuras finitas suple a la clase de las estructuras isomorfas a $\langle\omega,<\rangle$. Las pruebas son variaciones sobre el teorema de

Craig & Vaught, ya mencionado en 6.22, según el cual:

Si Σ es un conjunto recursivamente enumerable de sentencias de un tipo de semejanza finito τ todos cuyos modelos son infinitos, existe una extensión finita τ' de τ y una sentencia σ de tipo τ' tal que para cada sentencia φ de tipo τ,

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \sigma \models \varphi .$$

En otros términos: toda teoría recursivamente axiomatizable en tipo de semejanza finito y con sólo modelos infinitos puede axiomatizarse mediante una sola sentencia usando signos adicionales.

La prueba del teorema de Craig & Vaught muestra cómo construir una teoría que exprese la noción de verdad para otra. Ello se efectúa introduciendo un adecuado fragmento de teoría aritmética, para aritmetizar la sintaxis, y axiomatizando la semántica. Aquí desarrollaremos construcciones parecidas.

13. <u>Teorema</u>

Para cada K-lógica:

$\mathcal{L}_K$ es ω-compacta si y sólo si la clase de las estructuras finitas no es RPC_δ en $\mathcal{L}_K$.

Prueba:

Sea J la clase de las estructuras finitas. El tipo de semejanza de J es nulo y para cada modelo $\mathfrak{A}$ del tipo de semejanza nulo:

$$\mathfrak{A} \in J \quad \text{si y sólo si} \quad A \text{ es finito.}$$

Obsérvese que las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) J es RPC_δ en $\mathcal{L}_K$

(2) Hay un conjunto numerable de sentencias Σ que contiene un predicado monádico V y verifica:

(i) Para cada $n \geq 1$, Σ tiene un K-modelo $\mathfrak{A}$ con $V^{\mathfrak{A}} = n$

(ii) En todo K-modelo $\mathfrak{A}$ de Σ, $V^{\mathfrak{A}}$ es finito y no vacío.

Si se verifica (2) , $\mathcal{L}_K$ no es ω-compacta, pues el conjunto de sentencias

$$\Sigma \cup \{\exists x_1 \ldots x_n (\bigwedge_{i \leq n} Vx_i \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} \neg x_i \approx x_j) : n \geq 2\}$$

es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$.

Así pues, si J es APC_δ en $\mathcal{L}_K$, $\mathcal{L}_K$ no es ω-compacta.

El resto de la prueba consiste en establecer que si $\mathcal{L}_K$ no es ω-compacta, entonces se verifica lo expuesto en (2). Dado que el argumento es largo y complicado, efectuaremos un resumen previo.

Tenemos, por hipótesis, un conjunto numerable de sentencias Σ que es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$. Sea τ el tipo de semejanza de Σ . Podemos suponer, no sólo que τ es numerable, sino que es recursivo (considerando una extensión recursiva de τ si τ no lo fuera) . Además, podemos admitir que los signos de la aritmética $0, S, +, \cdot, <$, no aparecen en τ .

Añadiremos a τ una serie finita de signos, entre los que están los de la aritmética, los predicados monádicos N,M,V, ASIG y el predicado diádico SAT. Definiremos un conjunto de sentencias Δ en este nuevo tipo de semejanza de manera que:

(i) Δ contendrá un fragmento finito de aritmética suficiente para representar los conjuntos y relaciones recursivos. En particular, el conjunto de las sentencias de tipo τ será representable en Δ . El predicado N se usará para referirse al conjunto de los números naturales.

(ii) Δ poseerá una serie de axiomas que fijan el significado de M,ASIG y SAT de manera que en todo modelo $\mathfrak{A}$ de Δ en el que para alguna sentencia σ de tipo τ ocurra

$$\mathfrak{A} \models \forall x (\text{ASIG } x \longrightarrow \text{SAT } x \ulcorner\sigma\urcorner)$$

tendremos que $(\mathfrak{A} \upharpoonright \tau) \mid M^{\mathfrak{A}} \models \sigma$. Además $(\mathfrak{A} \upharpoonright \tau) \mid M^{\mathfrak{A}}$ será un K-modelo si $\mathfrak{A}$ lo es . Los axiomas de Δ relativos a estos signos expresarán, pues, la noción de "verdad en M" .

(iii) Fijaremos una enumeración arbitraria $\{\sigma_n : n \in \omega\}$ de Σ y Δ contendrá los axiomas

$$\exists x\, Vx \wedge (\exists x_1 \ldots x_n (Vx_1 \wedge \ldots \wedge Vx_n \wedge x_1 < x_2 \ldots < x_n) \longrightarrow V\ulcorner\sigma_{n-1}\urcorner)$$

$$\forall xy(\text{ASIG}\ x \wedge Vy \longrightarrow \text{SAT}\ x\ y)$$

De este modo, si $\mathfrak{A}$ es un K-modelo de Δ y $\mathfrak{A} \models V\ulcorner\sigma_n\urcorner$, $(\mathfrak{A}\restriction\tau)|M^{\mathfrak{A}}$ es un K-modelo de σ_n . Bajo la hipótesis de que Σ no tiene ningún K-modelo, $V^{\mathfrak{A}}$ será siempre finito. Pero para cada $n \geqslant 1$ tendremos un K-modelo $\mathfrak{A}$ de Δ en el que $V^{\mathfrak{A}} = \{\text{Gö}(\sigma_0), \ldots, \text{Gö}(\sigma_{n-1})\}$ y así $|V^{\mathfrak{A}}| = n$.

Comenzamos, pues, con el desarrollo detallado de la prueba. Ya hemos indicado que τ es recursivo y que los signos $0, S, +, \cdot, <$, no están en τ . Obtenemos una extensión finita τ' de τ añadiendo a τ los signos $0, S, +, \cdot, <$ y los siguientes nuevos signos:

N,M,ASIG,V	predicados monádicos
SAT	predicado diádico
VAL, DEN	signos funcionales diádicos.

El conjunto Δ de sentencias de tipo de semejanza tiene tres grupos de axiomas. El primer grupo introduce la aritmética precisa para que toda relación recursiva sea representable en Δ . El segundo grupo de axiomas fija el significado de M, ASIG, VAL, DEN , SAT . El tercer grupo de axiomas está destinado a imponer las condiciones que V debe verificar.

<u>Grupo A de axiomas de Δ .</u>

A1. $N0$

A2. $\forall x(Nx \longrightarrow N\,Sx)$

A3. $\forall xy(Nx \wedge Ny \longrightarrow Nx+y \wedge Nx\cdot y)$

A4. $\forall x(Nx \longrightarrow \neg Sx \approx 0)$

A5. $\forall xy(Nx \wedge Ny \wedge Sx \approx Sy \longrightarrow x \approx y)$

A6. $\forall x(Nx \wedge \neg x \approx 0 \longrightarrow \exists y(Ny \wedge Sy \approx x))$

A7. $\forall x(Nx \longrightarrow x + 0 \simeq x)$

A8. $\forall xy(Nx \wedge Ny \longrightarrow x + Sy \simeq S(x + y))$

A9. $\forall x(Nx \longrightarrow x \cdot 0 \simeq 0)$

A10. $\forall xy(Nx \wedge Ny \longrightarrow x \cdot Sy \simeq (x \cdot y) + x)$

A11. $\forall xy(x < y \longleftrightarrow Nx \wedge Ny \wedge \exists z(Nz \wedge \neg z \simeq 0 \wedge x + z \simeq y))$

A12. $\forall xyz(x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z)$

A13. $\forall x \; \neg x < x$

A14. $\forall xy(Nx \wedge Ny \longrightarrow x < y \vee x \simeq y \vee y < x)$

Los axiomas A1,A2,A3 exponen condiciones naturales de clausura. Los axiomas A4-A11 son la relativización a N de los axiomas de la teoría Q de Tarski & Mostowski & Robinson (1953) (con la definición usual de orden) . Los axiomas A12-A14 son precisos para garantizar que en todo modelo $\mathfrak{A}$ de Δ, $<^{\mathfrak{A}}$ es un orden total de $N^{\mathfrak{A}}$. En Q es representable toda relación recursiva. Esto significa que para cada relación recursiva $R \subseteq \omega^n$ hay una fórmula $\varphi(x_1 \ldots x_n)$ del tipo de semejanza aritmético $\tau_{\mathbb{N}} = \{0, S, +, \cdot, <\}$ tal que para cualesquiera $m_1, \ldots, m_n \in \omega$:

$$\langle m_1, \ldots, m_n \rangle \in R \quad \text{si y sólo si} \quad Q \models \varphi(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$$

$$\langle m_1, \ldots, m_n \rangle \notin R \quad \text{si y sólo si} \quad Q \models \neg\varphi(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n) \; .$$

Lo mismo ocurre con el grupo de axiomas A1-A11, con la salvedad de que también el predicado N aparece en la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ que representa a la relación recursiva R .

Las notaciones $\bar{n}$, Gö(s), $\ulcorner s \urcorner$ tienen el significado fijado en el apartado de notación. Usaremos la notacion CON_n para la relación n+1-ádica recursiva correspondiente a la función de concatenación de n secuencias de números naturales, esto es :

$\langle m_1, \ldots, m_{n+1} \rangle \in CON_n$ si y sólo si hay secuencias $s_1, \ldots, s_{n+1}$ tales que $s_{n+1} = s_1 \frown s_2 \frown \ldots \frown s_n$ y para cada $i \leq n+1$, $m_i = Gö(s_i)$.

Tenemos, por tanto

(1) Para cada número natural $n \geq 2$, una fórmula $\varphi_{CON_n}(x_1, \ldots, x_{n+1})$

que representa en Al-All la relación recursiva CON_n.

(2) Una fórmula $\varphi_{VAR}(x)$ que representa en Al-All el conjunto de números de Gödel de las variables.

(3) Una fórmula $\varphi_{TERM}(x)$ que representa en Al-All el conjunto de números de Gödel de los términos de tipo τ (recuérdese que τ es recursivo) .

(4) Una fórmula $\varphi_{FORM}(x)$ que representa en Al-All el conjunto de números de Gödel de las fórmulas de tipo τ.

Usaremos estas fórmulas para enunciar el segundo grupo de axiomas de Δ.

Grupo B de axiomas de Δ.

B1. $\forall x(Ux \longrightarrow Mx)$

B2. (Esquema) Mc para cada constante $c \in \tau$.

B3. (Esquema) $\forall x_1 \ldots x_n(Mx_1 \wedge \ldots \wedge Mx_n \longrightarrow Mfx_1 \ldots x_n)$ para cada signo funcional n-ádico $f \in \tau$.

B4. $\exists x\ ASIG\ x$

B5. $\forall xyz(ASIG\ x \wedge \varphi_{VAR}(y) \wedge Mz \longrightarrow \exists x_1(ASIG\ x_1 \wedge VAL(x_1,y) \simeq z \wedge$
$\wedge \forall y_1(\varphi_{VAR}(y_1) \wedge \neg\ y_1 \simeq y \longrightarrow VAL(x_1,y_1) \simeq VAL(x,y_1)))).$

B6. $\forall xy(ASIGx \wedge \varphi_{VAR}(y) \longrightarrow DEN(x,y) \simeq VAL(x,y))$

B7. (Esquema) Para cada constante $c \in \tau$.

$\forall x(ASIG\ x \longrightarrow DEN(x,\ulcorner c \urcorner) \simeq c)$

B8. (Esquema) Para cada signo funcional n-ádico $f \in \tau$,

$\forall xy_1 \ldots y_n y(ASIG\ x \wedge \varphi_{TERM}(y_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_{TERM}(y_n) \wedge$
$\wedge\ \varphi_{CON_{n+1}}(\ulcorner f \urcorner, y_1, \ldots, y_n, y) \longrightarrow DEN(x,y) \simeq f\ DEN(x,y_1) \ldots DEN(x,y_n))$

B9. (Esquema) Para cada predicado n-ádico $P \in \tau$,

$\forall xy_1 \ldots y_n y(ASIGx \wedge \varphi_{TERM}(y_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_{TERM}(y_n) \wedge$
$\wedge\ \varphi_{CON_{n\ 1}}(\ulcorner P \urcorner, y_1, \ldots, y_n, y) \longrightarrow (SAT\ x\ y \longleftrightarrow P\ DEN(x,y_1) \ldots DEN(x,y_n)))$

B10. $\forall xy_1y_2y(ASIG\ x \wedge \varphi_{TERM}(y_1) \wedge \varphi_{TERM}(y_2) \wedge \varphi_{CON_3}(y_1, \ulcorner \simeq \urcorner, y_2, y) \longrightarrow$
$\longrightarrow (SAT\ x\ y \longleftrightarrow DEN(x,y_1) \simeq DEN(x,y_2)))$

B11. $\forall x y_1 y(\text{ASIG } x \wedge \varphi_{FORM}(y_1) \wedge \varphi_{CON_2}(\ulcorner\neg\urcorner, y_1, y) \longrightarrow$

$\longrightarrow (\text{SAT } x\ y \longleftrightarrow \neg\ \text{SAT } x\ y_1))$

B12. $\forall x y_1 y_2 y(\text{ASIG } x \wedge \varphi_{FORM}(y_1) \wedge \varphi_{FORM}(y_2) \wedge \varphi_{CON_5}(\ulcorner(\urcorner, y_1, \ulcorner\wedge\urcorner, y_2, \ulcorner)\urcorner, y)$

$\longrightarrow (\text{SAT } x\ y \longleftrightarrow \text{SAT } x\ y_1 \wedge \text{SAT } x\ y_2))$

B.13 $\forall x y_1 y_2 y(\text{ASIG } x \wedge \varphi_{VAR}(y_1) \wedge \varphi_{FORM}(y_2) \wedge \varphi_{CON_3}(\ulcorner\exists\urcorner, y_1, y_2, y)$

$\longrightarrow (\text{SAT } x\ y \longleftrightarrow \exists z(Mz \wedge \forall x_1(\text{ASIG } x_1 \wedge \forall y(\varphi_{VAR}(y) \wedge \neg\ y \backsimeq y_1$

$\longrightarrow \text{VAL}(x_1, y) \backsimeq \text{VAL}(x, y)) \wedge \text{VAL}(x_1, y_1) \backsimeq z \longrightarrow \text{SAT } x_1 y_2))))$

Los axiomas B1,B2,B3 están destinados a garantizar que en todo modelo $\mathfrak{N}$ de Δ, $M^{\mathfrak{N}}$ sea τ-cerrado y contenga a $U^{\mathfrak{N}}$. Así $(\mathfrak{N}\restriction\tau)\setminus M^{\mathfrak{N}}$ será un K-modelo si $\mathfrak{N}$ es un K-modelo.

ASIG debe leerse como "asignación en M". B5 garantiza entonces la existencia de asignaciones variantes. VAL(x,y) debe leerse como "el valor de la variable y en la asignación x".

Los axiomas B6,B7 y B8 reproducen la usual definición de la denotación de un término bajo una asignación. Así, DEN(x,y) debe leerse como " la denotación del término y bajo la asignación x ".

Los axiomas B9-B13 reproducen las cláusulas de la definición de la relación de satisfacción en una estructura entre asignaciones y fórmulas. B.13 es la cláusula correspondiente a la cuantificación existencial. Obsérvese que se especifica que las variables cuantificadas deben interpretarse en el conjunto correspondiente a M.

El último grupo de axiomas es específico para el predicado V. Sea $\{\sigma_n : n \in \omega\}$ una enumeración de Σ.

<u>Grupo C de axiomas de Δ.</u>

C1. $\exists x\ Vx \wedge \forall x(Vx \longrightarrow Nx)$

C2. (Esquema). Para cada $n \geqslant 1$,

$$\exists x_1 \ldots x_n(Vx_1 \wedge \ldots \wedge Vx_n \wedge x_1 < x_2 < \ldots < x_n) \longrightarrow V\ulcorner\sigma_{n-1}\urcorner$$

C3. $\forall xy(\text{ASIG } x \wedge Vy \longrightarrow \text{SAT } x\ y)$

De acuerdo con C1, en todo modelo $\mathfrak{N}$ de Δ , $V^{\mathfrak{N}}$ es un conjunto no vacío de números naturales. De acuerdo con C2, $V^{\mathfrak{N}}$ puede ser $\{Gö(\sigma_0)\}$ o $\{Gö(\sigma_0), Gö(\sigma_1)\}$ o , en definitiva, de la forma

$$\{Gö(\sigma_0),\ Gö(\sigma_1), \dots,\ Gö(\sigma_n)\}.$$

Además, de acuerdo con C3, toda sentencia σ tal que $Gö(\sigma) \in V^{\mathfrak{N}}$ será verdadera en $(\mathfrak{N} \restriction \tau) \mid M^{\mathfrak{N}}$.

Estos son los significados esperados de los axiomas de Δ . A continuación verificaremos que poseen tales propiedades.

<u>Lema 1</u> Para cada sentencia σ de tipo τ ,

$$\Delta \models (V\ulcorner\sigma\urcorner \longrightarrow \sigma^M)$$

Prueba:

Veamos en primer lugar que si $\mathfrak{N} \models \Delta$ y t es un término de tipo τ todas cuyas variables están entre $v_0 \dots v_n$, entonces:

$$(*)\ \mathfrak{N} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow \text{DEN}(x,\ulcorner t\urcorner) \simeq t(^{v_0}_{\text{VAL}(x,\ulcorner v_0\urcorner)} \dots ^{v}_{\text{VAL}(x,\ulcorner v_n\urcorner)}))$$

Estableceremos $(*)$ por inducción en t abreviando

$$t(^{v_0}_{\text{VAL}(x,\ulcorner v_0\urcorner)} \dots ^{v_n}_{\text{VAL}(x,\ulcorner v_n\urcorner)}) \quad \text{por} \quad t(^{\vec{v}}_{\text{VAL}(x,\ulcorner\vec{v}\urcorner)}).$$

(i) Si t es una variable v_i con $i \leq n$:

$\mathfrak{N} \models \varphi_{VAR}(\ulcorner v_i\urcorner)$ y así, por B6,

$$\mathfrak{N} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow \text{DEN}(x,\ulcorner v_i\urcorner) \simeq \text{VAL}(x,\ulcorner v_i\urcorner))$$

pero $\text{VAL}(x,\ulcorner v_i\urcorner) = v_i(^{\vec{v}}_{\text{VAL}(x,\ulcorner\vec{v}\urcorner)})$, y de aquí el resultado.

(ii) Si t es una constante c de τ :

Tenemos por B7 que

$$\mathfrak{N} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow \text{DEN}(x,\ulcorner c\urcorner) \simeq c)$$

pero $c = c(^{\vec{v}}_{\text{VAL}(x\ulcorner\vec{v}\urcorner)})$.

(iii) Si t es de la forma $ft_1 \ldots t_m$:

Para cada i $(1 \leq i \leq m)$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{TERM}(\ulcorner t_i \urcorner)$$

y por hipótesis inductiva

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\mathrm{ASIG}\ x \longrightarrow \mathrm{DEN}(x \ulcorner t_i \urcorner) \simeq t_i(^{\vec{v}}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)})).$$

Como además

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{CON_{m\,1}}(\ulcorner f \urcorner, \ulcorner t_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner t_m \urcorner, \ulcorner ft_1 \ldots t_m \urcorner)$$

tenemos por B8,

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\mathrm{ASIG}\ x \longrightarrow \mathrm{DEN}(x, \ulcorner ft_1 \ldots t_m \urcorner) \simeq f\ \mathrm{DEN}(x, \ulcorner t_1 \urcorner) \ldots \mathrm{DEN}(x, \ulcorner t_m \urcorner)).$$

Usando ahora la hipótesis inductiva y el resultado

$$(ft_1 \ldots t_m)(^{\ulcorner \vec{v} \urcorner}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)}) = f\ t_1(^{\vec{v}}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)}) \ldots t_m(^{\vec{v}}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)})$$

concluimos que

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\mathrm{ASIG}\ x \longrightarrow \mathrm{DEN}(x, \ulcorner ft_1 \ldots t_m \urcorner) \simeq (ft_1 \ldots t_m)(^{\vec{v}}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)})).$$

Queda así establecido el punto $(*)$. De modo análogo probamos ahora que si $\mathfrak{A} \models \Delta$ y φ es una fórmula de tipo τ todas cuyas variables están entre $v_0, \ldots, v_n$ y x es una variable distinta de $v_0, \ldots, v_n$, entonces:

$$(**)\ \mathfrak{A} \models \forall x(\mathrm{ASIG}\ x \longrightarrow (\mathrm{SAT}\ x \ulcorner \varphi \urcorner \longleftrightarrow \varphi^M(^{v_0}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner v_0 \urcorner)} \ldots ^{v_n}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner v_n \urcorner)})))$$

Efectuaremos una inducción en φ abreviando adicionalmente $\varphi(^{v_0}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner v_0 \urcorner)} \ldots ^{v_n}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner v_n \urcorner)})$ por $\varphi(^{\vec{v}}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)})$.

(i) Si φ es de la forma $t_1 \simeq t_2$:

Por $(*)$ tenemos que para $i = 1$ e $i = 2$

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\mathrm{ASIG}\ x \longrightarrow \mathrm{DEN}(x, \ulcorner t_i \urcorner) \simeq t_i(^{\vec{v}}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)})).$$

Como además

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{TERM}(\ulcorner t_1 \urcorner) \wedge \varphi_{TERM}(\ulcorner t_2 \urcorner) \quad \text{y}$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{CON_3}(\ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner \simeq \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner, \ulcorner t_1 \simeq t_2 \urcorner)$$

tenemos por B10 que

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow (\text{SAT } x \ulcorner t_1 \simeq t_2 \urcorner \longleftrightarrow t_1(\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)}) \simeq t_2(\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)})))$$

Pero

$$t_1(\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)}) \simeq t_2(\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)}) = (t_1 \simeq t_2)(\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x \ulcorner \vec{v} \urcorner)})$$

$$= (t_1 \simeq t_2)^M (\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)})$$

y , por lo tanto, tenemos,

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow (\text{SAT } x \ulcorner t_1 \simeq t_2 \urcorner \longleftrightarrow (t_1 \simeq t_2)^M (\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)})))$$

(ii) El caso $\varphi = Pt_1 \ldots t_m$ se resuelve de modo análogo usando (*) y B9.

(iii) Si $\varphi = \neg \psi$:

Por hipótesis inductiva

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow (\text{SAT } x \ulcorner \psi \urcorner \longleftrightarrow \psi^M(\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)}))) .$$

Dado que,

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{FORM}}(\ulcorner \psi \urcorner) \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{A} \models \varphi_{\text{CON}_2}(\ulcorner \neg \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \neg \psi \urcorner)$$

resulta por B11 que

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow (\text{SAT } x \ulcorner \neg \psi \urcorner \longleftrightarrow \neg \text{ SAT } x \ulcorner \psi \urcorner))$$

pero como

$$\neg(\psi^M(\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x \ulcorner \vec{v} \urcorner)})) = (\neg \psi)^M (\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x \ulcorner \vec{v} \urcorner)})$$

concluimos

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow (\text{SAT} x \ulcorner \neg \psi \urcorner \longleftrightarrow (\neg \psi)^M (\overset{\vec{v}}{\text{VAL}(x,\ulcorner \vec{v} \urcorner)}))) .$$

(iv) El caso $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ se establece de modo análogo usando B12.

(v) Si $\varphi = \exists v_j \psi$:

Para facilitar la notación, y sin perder generalidad, supondremos que $j = 0$. La variable x es, por hipótesis, distinta de $v_0, \ldots, v_n$.

Escojamos ahora variables x_1, y, z distintas de $x, v_0, \ldots, v_n$.
Por hipótesis inductiva,

(1) $\mathfrak{A} \models \forall x(\mathrm{ASIG}\ x \longrightarrow (\mathrm{SAT}\ x\ulcorner\psi\urcorner \longleftrightarrow \psi^M(^{\vec{v}}_{\mathrm{VAL}(x,\ulcorner\vec{v}\urcorner)})))$

y por B13,

(2) $\mathfrak{A} \models \forall x(\mathrm{ASIG}\ x \longrightarrow (\mathrm{SAT}\ x\ \ulcorner\exists v_0\psi\urcorner \longleftrightarrow \exists z(\mathrm{M}z \wedge \forall x_1(\mathrm{ASIG}\ x_1 \wedge$
$\wedge \forall y(\varphi_{\mathrm{VAR}}(y) \wedge \neg\, y \simeq \ulcorner v_0\urcorner \longrightarrow \mathrm{VAL}(x_1,y) \simeq \mathrm{VAL}(x,y)) \wedge \mathrm{VAL}(x_1,\ulcorner v_0\urcorner) \simeq z$
$\longrightarrow \mathrm{SAT}\ x_1\ulcorner\psi\urcorner))))$.

Tenemos que establecer que para cada $s \in \mathrm{ASIG}^{\mathfrak{A}}$,

$$\mathfrak{A} \models (\mathrm{SAT}\ x\ \ulcorner\exists v_0\psi\urcorner \longleftrightarrow (\exists v_0\psi)^M(^{\vec{v}}_{\mathrm{VAL}(x\ulcorner\vec{v}\urcorner)}))\ [x/s]\ .$$

Supongamos, en primer lugar, que

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{SAT}\ x\ \ulcorner\exists v_0\psi\urcorner\ [x/s].$$

Por (2), hay un $a \in M^{\mathfrak{A}}$ tal que

(3) $\mathfrak{A} \models \forall x_1(\mathrm{ASIG}\ x_1 \wedge \forall y(\varphi_{\mathrm{VAR}}(y) \wedge \neg\, y \simeq \ulcorner v_0\urcorner \longrightarrow \mathrm{VAL}(x_1,y) \simeq \mathrm{VAL}(x,y))$
$\wedge\ \mathrm{VAL}(x_1,\ulcorner v_0\urcorner) \simeq z \longrightarrow \mathrm{SAT}\ x_1\ulcorner\psi\urcorner)\ [x/s,\ z/a]$.

Por B5, hay $s_1 \in \mathrm{ASIG}^{\mathfrak{A}}$ tal que

(4) $\mathfrak{A} \models (\forall y(\varphi_{\mathrm{VAR}}(y) \wedge \neg\, y \simeq \ulcorner v_0\urcorner \longrightarrow \mathrm{VAL}(x_1,y) \simeq \mathrm{VAL}(x,y)) \wedge$
$\wedge\ \mathrm{VAL}(x_1,\ulcorner v_0\urcorner) \simeq z)\ [x/s,\ x_1/s_1,\ z/a]$.

De (3) y (4) concluimos que

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{SAT}\ x_1\ulcorner\psi\urcorner\ [x_1/s_1]$$

y por la hipótesis inductiva, (1),

$$\mathfrak{A} \models \psi^M(^{\vec{v}}_{\mathrm{VAL}(x_1,\ulcorner\vec{v}\urcorner)})\ [x_1/s_1]\ .$$

Por el teorema de la sustitución y porque x_1 no está en ψ^M, pues es distinta de $v_0, \ldots, v_n$, tenemos que

$$\mathfrak{A} \models \psi^M[v_0/(\mathrm{VAL}(x_1,\ulcorner v_0\urcorner)^{\mathfrak{A}}[x_1/s_1]) \ldots v_n/(\mathrm{VAL}(x_1,\ulcorner v_n\urcorner)^{\mathfrak{A}}[x_1/s_1])].$$

Pero, por (4),

$$\mathrm{VAL}(x_1,\ulcorner v_0\urcorner)^{\mathfrak{A}}[x_1/s_1] = a$$

y para cada i $(1 \leq i \leq n)$

$$VAL(x_1, \ulcorner v_i \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x_1/s_1] = VAL(x, \ulcorner v_i \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x/s] .$$

Como además, $a \in M^{\mathfrak{A}}$, resulta que

$$\mathfrak{A} \models (Mv_0 \wedge \psi^M) \left[v_0/a, v_1/(VAL(x, \ulcorner v_1 \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x/s]), \ldots, v_n/(VAL(x \ulcorner v_n \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x/s])\right]$$

y así

$$\mathfrak{A} \models \exists v_0(Mv_0 \wedge \psi^M) \left[v_1/(VAL(x, \ulcorner v_1 \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x/s]), \ldots, v_n/(VAL(x, \ulcorner v_n \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x/s]).\right]$$

Por el teorema de la sustitución y porque x no está en

$\exists v_0(Mv_0 \wedge \psi^M)$, pues es distinta de $v_0, \ldots, v_n$, tenemos que

$$\mathfrak{A} \models \exists v_0(Mv_0 \wedge \psi^M) \left(\begin{array}{ccc} v_1 & \ldots & v_n \\ VAL(x, \ulcorner v_1 \urcorner) & \ldots & VAL(x, \ulcorner v_n \urcorner) \end{array} \right) [x/s] .$$

Pero

$$\exists v_0(Mv_0 \wedge \psi^M) = (\exists v_0 \psi)^M = (\exists v_0 \psi)^M \left(\begin{array}{c} v_0 \\ VAL(x, \ulcorner v_0 \urcorner) \end{array} \right)$$

y , por tanto,

$$\mathfrak{A} \models (\exists v_0 \psi)^M \left(\begin{array}{c} \vec{v} \\ VAL(x, \ulcorner \vec{v} \urcorner) \end{array} \right) [x/s] .$$

Esto establece parte del caso (v) . Para justificar el resto, supongamos ahora que

$$\mathfrak{A} \models (\exists v_0 \psi)^M \left(\begin{array}{c} \vec{v} \\ VAL(x, \ulcorner \vec{v} \urcorner) \end{array} \right) [x/s] .$$

Por lo recientemente observado tenemos que

$$\mathfrak{A} \models \exists v_0(Mv_0 \wedge \psi^M) \left[v_1/(VAL(x, \ulcorner v_1 \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x/s]), \ldots, v_n/(VAL(x, \ulcorner v_n \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x/s])\right]$$

de manera que hay $a \in M^{\mathfrak{A}}$ que verifica

$$\mathfrak{A} \models \psi^M \left[v_0/a, v_1/(VAL(x, \ulcorner v_1 \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x/s]), \ldots, v_n/(VAL(x, \ulcorner v_n \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x/s])\right]$$

Sea $s_1 \in ASIG^{\mathfrak{A}}$ tal que

$$(5)\ \mathfrak{A} \models (\forall y(\varphi_{VAR}(y) \wedge \neg y \simeq \ulcorner v_0 \urcorner \longrightarrow VAL(x_1, y) \simeq VAL(x, y)) \wedge$$
$$\wedge\ VAL(x_1, \ulcorner v_0 \urcorner) \simeq z) [x/s, x_1/s_1, z/a] .$$

De acuerdo con (2), basta con establecer que

$$\mathfrak{A} \models SAT\ x_1 \ulcorner \psi \urcorner [x_1/s_1]$$

para obtener, como pretendemos, que

$$\mathfrak{A} \models \text{SAT } x \ulcorner \exists v_0 \psi \urcorner \; [x/s] \quad .$$

Por (5), tenemos que

$$\text{VAL}(x_1 \ulcorner v_0 \urcorner)^{\mathfrak{A}} \; [x_1/s_1] \; = \; a \quad ,$$

y que para cada i $(1 \leq i \leq n)$:

$$\text{VAL}(x_1 \ulcorner v_i \urcorner)^{\mathfrak{A}} [x_1/s_1] = \text{VAL}(x, \ulcorner v_i \urcorner)^{\mathfrak{A}} [x/s] \quad .$$

Por tanto

$$\mathfrak{A} \models \psi^M \; [v_0/(\text{VAL}(x_1 \ulcorner v_0 \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x_1/s_1]), \ldots, v_n/(\text{VAL}(x_1 \ulcorner v_n \urcorner)^{\mathfrak{A}}[x_1/s_1])] \quad .$$

Entonces, por el teorema de la sustitución y porque x_1 no está en ψ^M,

$$\mathfrak{A} \models \psi^M \left({\vec{v} \atop \text{VAL}(x_1, \ulcorner \vec{v} \urcorner)} \right) \; [x_1/s_1] \quad .$$

Por el supuesto inductivo, (1), concluimos que

$$\mathfrak{A} \models \text{SAT } x_1 \ulcorner \psi \urcorner \quad [x_1/s_1] \quad .$$

Con esto queda establecido el caso (v) de la prueba de (* *) y culmina también la prueba de (* *) .

Finalizamos ahora la prueba del lema 1 usando (* *). Supongamos que $\mathfrak{A} \models \Delta$ y que σ es una sentencia de tipo τ tal que

$$\mathfrak{A} \models V \ulcorner \sigma \urcorner \quad .$$

Sea $v_0, \ldots, v_n$ una lista de variables entre las que están todas las de σ y sea x una variable distinta de éstas. Por (* *) tenemos que

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow (\text{SAT } x \ulcorner \sigma \urcorner \longleftrightarrow \sigma^M \left({v_0 \atop \text{VAL}(x, \ulcorner v_0 \urcorner)} \ldots {v_n \atop \text{VAL}(x, \ulcorner v_n \urcorner)} \right))) .$$

Pero, como σ es una sentencia,

$$\sigma^M = \sigma^M \left({v_0 \atop \text{VAL}(x, \ulcorner v_0 \urcorner)} \ldots {v_n \atop \text{VAL}(x, \ulcorner v_n \urcorner)} \right) \quad .$$

Así

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\text{ASIG } x \longrightarrow (\text{SAT } x \ulcorner \sigma \urcorner \longleftrightarrow \sigma^M)) \quad .$$

Por B.4 ,

$$\mathfrak{N} \models \exists^{*}\, \text{ASIG } x$$

y por C3,

$$\mathfrak{N} \models \forall xy(\text{ASIG } x \wedge Vy \longrightarrow \text{SAT } x\ y\ ) \quad .$$

Entonces

$$\mathfrak{N} \models \exists x(\text{ASIG } x \wedge \text{SAT } x \ulcorner\sigma\urcorner\ )$$

y, en consecuencia,

$$\mathfrak{N} \models \sigma^{M} \ .$$

Queda así establecido el lema 1, lema que usaremos a continuación para justificar que :

Lema 2 No hay ningún K-modelo $\mathfrak{N}$ de Δ en el que $V^{\mathfrak{N}}$ sea infinito.

Prueba:

Supongamos que $\mathfrak{N}$ es un K-modelo de Δ y que $V^{\mathfrak{N}}$ es infinito. Por C1, tenemos que $V^{\mathfrak{N}} \subseteq N^{\mathfrak{N}}$, y como $<^{\mathfrak{N}}$ es un orden total de $N^{\mathfrak{N}}$, para cada $n \geqslant 1$,

$$\mathfrak{N} \models \exists x_1 \ldots x_n(Vx_1 \wedge \ldots \wedge Vx_n \wedge x_1 < x_2 < \ldots < x_n\ ) \ .$$

Entonces, por C.2, para cada n

$$\mathfrak{N} \models V\ulcorner\sigma_n\urcorner$$

y por el lema 1

$$\mathfrak{N} \models \sigma_n^{\ M} \quad .$$

Así pues, $\mathfrak{N} \models \Sigma^{M}$.

Por B2 y B3, $M^{\mathfrak{N}}$ es τ-cerrado en $\mathfrak{N}$. Como además, por B1, $U^{\mathfrak{N}} \subseteq M^{\mathfrak{N}}$, concluimos que

$$(\ \mathfrak{N} \restriction \tau)|M^{\mathfrak{N}} \quad \text{es un K-modelo .}$$

Pero $(\mathfrak{N} \restriction \tau)|M^{\mathfrak{N}} \models \Sigma$, ya que $\mathfrak{N} \models \Sigma^{M}$.

Hemos obtenido, entonces, un K-modelo de Σ . Pero Σ no tiene, por hipótesis ningún K-modelo. Esta contradicción muestra que $V^{\mathfrak{N}}$ debe ser finito, y así queda justificado el lema 2.

Lema 3 Para cada $n \geq 1$, hay un K-modelo $\mathfrak{A}$ de Δ en el que $|V^{\mathfrak{A}}| = n$.

Prueba:

Sea n un número natural mayor o igual que 1 . Tenemos, por hipótesis del teorema, un K-modelo $\mathfrak{B}$ de las primeras n sentencias $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}$ de Σ . Definimos un modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ' por :

(i) $A = B \cup \omega \cup {}^{\omega}B$

Así, los elementos de A son los de B, los números naturales y las secuencias $\langle b_n \rangle_{n \in \omega}$ de elementos de B .

(ii) $N^{\mathfrak{A}} = \omega$ y $0, S, +, \cdot, <$, se interpretan con su significado habitual en ω (las funciones $S^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}$, se definen de modo arbitrario para argumentos en $A - \omega$) .

(iii) $M^{\mathfrak{A}} = B$ y $r^{\mathfrak{A}} = r^{\mathfrak{B}}$ para cada signo $r \in \tau$ (extendiendo las funciones correspondientes a los signos funcionales de τ de modo arbitrario para argumentos en $A - B$) .

(iv) $ASIG^{\mathfrak{A}} = {}^{\omega}B$. $VAL^{\mathfrak{A}}$, $DEN^{\mathfrak{A}}$ y $SAT^{\mathfrak{A}}$ se definen como sigue:

Para cada $s \in {}^{\omega}B$, sea s^* la asignación en $\mathfrak{A}$ definida por

$$s^*(v) = s(G\ddot{o}(v)) \quad \text{para cada variable } v \, .$$

Definimos entonces:

$$VAL^{\mathfrak{A}}(\langle s,n \rangle) = \begin{cases} s(m) & \text{si } s \in {}^{\omega}B \text{ y } n \in \omega \\ \text{arbitrario en otro caso} \end{cases}$$

De este modo, para cada variable v y $s \in {}^{\omega}B$,

$$s^*(v) = s(G\ddot{o}(v)) = VAL^{\mathfrak{A}}(\langle s, G\ddot{o}(v) \rangle) \, .$$

De acuerdo con esto, definimos ahora:

$DEN^{\mathfrak{A}}(\langle s,n \rangle) = t^{\mathfrak{B}}[s^*]$ si $s \in {}^{\omega}B$, $n \in \omega$ y t es un término de tipo τ tal que $G\ddot{o}(t) = n$ (y $DEN^{\mathfrak{A}}(\langle s,n \rangle)$ es arbitrario en otro caso) .

$SAT^{\mathfrak{A}} = \{ \langle s,n \rangle : s \in {}^{\omega}B$ y hay una fórmula φ de tipo τ tal que $Gö(\varphi) = n$ y $\mathfrak{A} \models \varphi[s^*] \}$.

(v) $V^{\mathfrak{A}} = \{ Gö(\sigma_0), \ldots, Gö(\sigma_n) \}$

Es rutina verificar que $\mathfrak{A}$ es un modelo de Δ. Por otro lado, es un K-modelo, pues $(\mathfrak{A} \upharpoonright \tau_K) \mid U^{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{B} \upharpoonright \tau_K) \mid U^{\mathfrak{B}}$ y $\mathfrak{B}$ es un K-modelo. Queda así justificado el lema 3.

Establecidos los tres lemas, podemos finalizar ya la prueba del teorema 13. De los lemas 2 y 3 (y del resultado de que en todo modelo $\mathfrak{A}$ de Δ, $V^{\mathfrak{A}} \neq \phi$) se sigue que Δ cumple las condiciones expuestas en (2), al principio de la prueba. Así, la clase J de las estructuras finitas es RPC_{δ} en $\mathcal{L}_K$.

14. Teorema

Para cada K-lógica de tipo de semejanza recursivo, $\mathcal{L}_K$:

$\mathcal{L}_K$ es recursivamente compacta si y sólo si la clase de las estructuras finitas no es RPC_d en $\mathcal{L}_K$.

Prueba:

Se trata de una versión recursiva de la prueba del teorema 13. El argumento que establece que si la clase de las estructuras finitas es RPC_d en $\mathcal{L}_K$, $\mathcal{L}_K$ no es recursivamente compacta , es el mismo (cambiando "numerable" por "recursivo") que establece que si esta clase es RPC_{δ} en $\mathcal{L}_K$, $\mathcal{L}_K$ no es ω-compacta. Las modificaciones en el resto de la prueba consisten únicamente en escoger una enumeración recursiva $\{ \sigma_n : n \in \omega \}$ de Σ , y no una enumeración arbitraria, y en verificar que Δ es recursivo.

15. Teorema

Para cada K-lógica de tipo de semejanza recursivo, $\mathcal{L}_K$:

Si $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para consecuencia, entonces $\mathcal{L}_K$ es recursivamente compacta.

Prueba:

Supongamos que $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para consecuencia, pero que $\mathcal{L}_K$ no es recursivamente compacta. Por el teorema 14 sabemos, entonces, que la clase J de las estructuras finitas es RPC_d en $\mathcal{L}_K$. En ese caso hay un conjunto recursivo Δ de sentencias de un tipo de semejanza recursivo τ, que incluye un predicado monádico V y tiene las siguientes propiedades:

(1) En cada K-modelo $\mathfrak{A}$ de Δ, $V^{\mathfrak{A}}$ es finito y no vacío.

(2) Para cada $n \geqslant 1$, Δ tiene un K-modelo $\mathfrak{A}$ en el que $|V^{\mathfrak{A}}| = n$.

Hay un teorema de Trahtenbrot que establece que en un determinado tipo de semejanza finito y relacional τ_0 el conjunto de las sentencias verdaderas en todos los modelos finitos no es recursivamente enumerable. Podemos admitir que $\tau \cap \tau_0 = \phi$. Veamos que para cada sentencia σ de tipo τ_0:

(*) σ es verdadera en todos los modelos finitos si y sólo si $\Delta \models_K \sigma^V$.

Supongamos, en primer lugar, que σ es verdadera en todos los modelos finitos y veamos que $\Delta \models_K \sigma^V$. Sea $\mathfrak{A}$ un K-modelo de Δ. Por (1), sabemos que $V^{\mathfrak{A}}$ es finito y no vacío. Como τ_0 es relacional, $V^{\mathfrak{A}}$ es τ_0-cerrado. Así, el modelo $(\mathfrak{A} \restriction \tau_0) | V^{\mathfrak{A}}$ es finito, en cuyo caso $(\mathfrak{A} \restriction \tau_0) | V^{\mathfrak{A}} \models \sigma$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \sigma^V$.

Ahora, supongamos que $\Delta \models_K \sigma^V$ y veamos que σ es verdadera en todos los modelos finitos. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo finito (de tipo τ_0) y sea $n = |A|$. Por (2), podemos garantizar que existe un K-modelo $\mathfrak{B}$ de Δ en el que $|V^{\mathfrak{B}}| = n$. Podemos extender $\mathfrak{B}$ a un K-modelo $\mathfrak{C}$ de tipo $\tau \cup \tau_0$ de manera que $\mathfrak{C} \restriction \tau = \mathfrak{B}$ y $(\mathfrak{C} \restriction \tau_0) \, V^{\mathfrak{C}} \cong \mathfrak{A}$, interpretando los signos de τ_0 como imágenes de sus interpretaciones en $\mathfrak{A}$ en virtud de una biyección arbitraria entre A y $V^{\mathfrak{B}}$. Entonces

$\mathfrak{C} \models \Delta$ y, por tanto, $\mathfrak{C} \models \sigma^{V}$. Pero, en ese caso, $(\mathfrak{C}\restriction \tau_0)\, V^{\mathfrak{C}} \models \sigma$ y, así, $\mathfrak{A} \models \sigma$. Queda, pues, establecido $(*)$.

Como hemos admitido que $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para consecuencia, el conjunto de las consecuencias de Δ , en $\mathcal{L}_K$, de tipo de semejanza $\tau \cup \tau_0$ es recursivamente enumerable. Pero, entonces, también es recursivamente enumerable el conjunto

$$\{ \sigma : \sigma \text{ es de tipo } \tau_0 \text{ y } \Delta \models_K \sigma^{V} \} .$$

Pero este conjunto es, de acuerdo con $(*)$, el conjunto de las sentencias de tipo τ_0 verdaderas en todos los modelos finitos y , por el mencionado teorema de Trahtenbrot, no es recursivamente enumerable. Esto concluye la prueba.

16. Corolario

Para cada K-lógica de tipo de semejanza recursivo, $\mathcal{L}_K$:

$\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para consecuencia si y sólo si $\mathcal{L}_K$ es recursivamente compacta y recursivamente enumerable para validez.

Prueba: por los teoremas 7 y 15 .

17. Observaciones

El teorema 15 puede ser mejorado si el tipo de semejanza τ_K es finito. En ese caso, compacidad recursiva equivale a que clase de estructuras finitas no sea RPC . Tras establecer este resultado, lo usaremos para mostrar que si τ_K es finito y $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para validez, $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para consecuencia. Mostraremos también que este resultado no se cumple si eliminamos la restricción de que τ_K sea finito.

18. Lema

Sea $\mathcal{L}_K$ una K-lógica de tipo de semejanza finito τ_K , y supongamos que hay un conjunto recursivo de sentencias Σ de tipo de semejanza finito τ que es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$.

Bajo esas hipótesis, hay una extensión finita τ' de τ que posee un predicado monádico V y hay una sentencia δ de tipo de semejanza τ' con las siguientes propiedades:

(1). En todo K-modelo $\mathfrak{A}$ de δ , $V^{\mathfrak{A}}$ es finito y no vacío .

(2). Para cada $n \geqslant 1$, hay un K-modelo $\mathfrak{A}$ de δ en el que $|V^{\mathfrak{A}}| = n$.

Prueba:

Se trata de una reelaboración del teorema 13 que saca fruto del hecho de que Σ sea recursivo y τ sea finito. Ampliamos τ a τ' como en la prueba del teorema 13, añadiendo los signos

N, 0 , S , + , · , <, M, ASIG, VAL, DEN, SAT, V .

Construimos, entonces, una teoría Δ en tipo τ' como en la prueba del teorema 13, con los grupos de axiomas A y B , si bien modificando los del grupo C . Obsérvese que, al ser τ finito, en B2, B3, B7, B8 y B9 no hay más que un número finito de axiomas. Por tanto, en este caso los grupos de axiomas A y B son un conjunto finito.

La modificación del grupo C de axiomas es como sigue:

Dado que Σ es recursivo, poseemos una fórmula $\varphi_\Sigma(x)$ que representa en A1-A11 al conjunto de números de Gödel de las sentencias de Σ . Podemos suponer además que $\varphi_\Sigma(x) \models Nx$. Ponemos entonces:

Grupo C de axiomas de Δ.

C1. $\forall x(Vx \longrightarrow \varphi_\Sigma(x)) \wedge \exists x\, Vx$

C2. $\forall xy(Vx \wedge \varphi_\Sigma(y) \wedge y < x \longrightarrow Vy)$

C3. $\forall xy(\text{ASIG } x \wedge Vy \longrightarrow \text{SAT } x\, y\,)$

No se han modificado los grupos de axiomas A y B . Por tanto, tenemos, como en el teorema 13,

Lema 1 Para cada sentencia σ de tipo τ , $\Delta \models (V \ulcorner\sigma\urcorner \longrightarrow \sigma^M)$

Los lemas 2 y 3 de la prueba del teorema 13 siguen siendo verdaderos en esta nueva versión, pero los argumentos para establecerlos son algo distintos.

Lema 2 No hay ningún K-modelo $\mathfrak{N}$ de Δ en el que $V^{\mathfrak{N}}$ sea infinito.

Prueba:

Supongamos que $\mathfrak{N}$ es un K-modelo de Δ en el que $V^{\mathfrak{N}}$ es infinito. Veamos que, en ese caso, para cada $\sigma \in \Sigma$

$(*)$ $\mathfrak{N} \models V\ulcorner\sigma\urcorner$

Si no fuera así, podríamos escoger la sentencia σ de Σ de menor número de Gödel que no verifica $\mathfrak{N} \models V\ulcorner\sigma\urcorner$. Sea a un elemento arbitrario de $V^{\mathfrak{N}}$. Por C1, tenemos que

$$\mathfrak{N} \models \varphi_{\Sigma}(x)\ [\,a\,]\ .$$

En particular, pues, $a \in N^{\mathfrak{N}}$. Como $<^{\mathfrak{N}}$ es un orden total de $N^{\mathfrak{N}}$:

$$a <^{\mathfrak{N}} \ulcorner\sigma\urcorner^{\mathfrak{N}} \quad o \quad a = \ulcorner\sigma\urcorner^{\mathfrak{N}} \quad o \quad \ulcorner\sigma\urcorner^{\mathfrak{N}} <^{\mathfrak{N}} a \quad .$$

Como $a \in V^{\mathfrak{N}}$, el caso intermedio es imposible. El tercer caso está prohibido por C2. Así pues, debe ser

$$a <^{\mathfrak{N}} \ulcorner\sigma\urcorner^{\mathfrak{N}} \ .$$

Esto muestra que

$$V^{\mathfrak{N}} \subseteq \{a \in A : a <^{\mathfrak{N}} \ulcorner\sigma\urcorner^{\mathfrak{N}}\} \ .$$

Pero $\{a \in A : a < \ulcorner\sigma\urcorner^{\mathfrak{N}}\}$ es finito, pues si $n = G\ddot{o}(\sigma)$,

$$\Delta \models \forall x(\ x < \overline{n} \longleftrightarrow x \simeq \overline{0} \vee x \simeq \overline{1} \vee \ldots \vee x \simeq \overline{n-1}\ )\ .$$

Entonces $V^{\mathfrak{N}}$ es también finito. Pero habíamos admitido que $V^{\mathfrak{N}}$ era infinito. Esto establece el punto $(*)$. El resto es como en la prueba del lema 2 del teorema 13.

Lema 3 Para cada $n \geqslant 1$, hay un K-modelo $\mathfrak{N}$ de Δ en el que $|V^{\mathfrak{N}}| = n$.

La prueba de este lema es como la del correspondiente lema del teorema 13, con la salvedad de que ahora elegimos una enumeración $\{\sigma_n : n \in \omega\}$ de Σ acorde con los números de Gödel de las sentencias, de manera que

si $n < m$, entonces $Gö(\sigma_n) < Gö(\sigma_m)$.

De este modo, definimos

$$V^{\sigma} = \{Gö(\sigma_0),\ldots,Gö(\sigma_{n-1})\}$$

y se verifica el nuevo axioma C2.

Establecidos los tres lemas, observamos que Δ es finito y que $\Delta \models \exists x\, Vx$. Entonces, la conjunción δ de Δ tiene las propiedades requeridas en (1) y (2) .

19. Teorema

Para cada K-lógica de tipo de semejanza finito, $\mathcal{L}_K$;

$\mathcal{L}_K$ es recursivamente compacta si y sólo si la clase de las estructuras finitas es RPC en $\mathcal{L}_K$.

Prueba:

Si la clase de las estructuras finitas es RPC en $\mathcal{L}_K$, es , en especial, RPC_d en $\mathcal{L}_K$, y el teorema 14 proporciona el resultado de que $\mathcal{L}_K$ no es recursivamente compacta.

Supongamos, pues, que $\mathcal{L}_K$ no es recursivamente compacta y veamos que, en ese caso, la clase J de las estructuras finitas es RPC en $\mathcal{L}_K$. Hay un conjunto recursivo Σ ,de sentencias de un tipo de semejanza recursivo τ , que es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$. Mostraremos que hay también un conjunto recursivo , Γ , de sentencias de un tipo de semejanza finito τ^* , que es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$. Una vez obtenido Γ , el lema 18 garantizará que J es RPC en $\mathcal{L}_K$.

Para la construcción de Γ admitamos de momento que $\tau - \tau_K$ es relacional. Posteriormente eliminaremos esta restricción. El tipo de semejanza τ^* constará de los signos de $\tau_K \cup \{U\}$ además de:

(i) Los signos aritméticos 0 , S .

(ii) f, un signo funcional diádico.

(iii) Q, un predicado diádico.

(iv) M, un predicado monádico.

Podemos suponer que ninguno de estos signos nuevos aparece en τ .

Dado que poseemos los signos 0 y S , podemos usar la notación $\bar{n}$ con su significado habitual como nombre del número natural n . El signo funcional f se utilizará como sustitutivo de par ordenado. La notación $f_n(t_1,\ldots,t_n)$ se justifica por :

$$\begin{cases} f_1(t) = t \\ f_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1}) = f\, f_n(t_1,\ldots,t_n)\, t_{n+1} \end{cases}$$

Con $f_n(t_1,\ldots,t_n)$ podemos resumir una secuencia de términos $t_1,\ldots,t_n$ en un sólo término $f_n(t_1,\ldots,t_n)$. Es, pues, un sustitutivo de n-tupla.

La función de Q será permitir cifrar, con ayuda también de las expresiones $f_n(t_1,\ldots,t_n)$, la información de en un tipo de semejanza finito . Sea $\{R_n : n \in \omega\}$ una enumeración recursiva de $\tau - (\tau_K \cup \{U\})$. Sustituiremos las expresiones de la forma

$$R_n t_1 \ldots t_m$$

por

$$Q\, \bar{n}\, f_m(t_1,\ldots,t_m) \, .$$

Este proceso de traducción tiene ciertas dificultades en modelos finitos. Para salvarlos, usaremos el predicado monádico M, que se interpretará en todo modelo $\mathfrak{A}$ como un modelo interno.

Usaremos la notación $r(n)$ para referirnos al número ádico del predicado R_n .

Asignamos, entonces, a cada fórmula φ de tipo τ

una fórmula φ^* de tipo τ^* : φ^* es el resultado de sustituir en φ cada fórmula atómica de la forma

$$R_n t_1 \ldots t_{r(n)}$$

por

$$Q\, \bar{n}\, f_{r(n)}(t_1, \ldots, t_{r(n)}) \;.$$

Definamos, $\Sigma^* = \{\sigma^* : \sigma \in \Sigma\}$. No es difícil mostrar que todo modelo de Σ^* da lugar, de modo natural, a un modelo de Σ. Sin embargo, el proceso inverso no es factible en modelos finitos de Σ . Por esta razón relativizaremos al predicado M las fórmulas de Σ^*.

Sea γ la conjunción de las siguientes sentencias de tipo τ^* :

- $\forall x(Ux \longrightarrow Mx)$
- $\forall x_1 \ldots x_n(Mx_1 \wedge \ldots \wedge Mx_n \longrightarrow M\, gx_1 \ldots x_n)$ para cada signo funcional n-ádico g de τ_K .

Observemos que en todo K-modelo $\mathfrak{A}$ de γ , $M^{\mathfrak{A}}$ es τ_K-cerrado y $U^{\mathfrak{A}} \subseteq M^{\mathfrak{A}}$. Por tanto, $\mathfrak{A} \restriction M^{\mathfrak{A}}$ será un K-modelo.

Definimos finalmente

$$\Gamma = \{\sigma^{*M} : \sigma \in \Sigma\} \cup \{\gamma\} \;.$$

Como la función que asigna a cada fórmula de tipo τ la correspondiente traducción φ^* de tipo τ^* es recursiva, Γ es recursivamente enumerable. Γ posee, entonces, un conjunto recursivo de axiomas. Supondremos, para simplificar la notación y sin perder generalidad, que Γ mismo es recursivo.

A continuación mostraremos que Γ es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$. Esto es lo único que precisamos, de acuerdo con lo ya establecido, y al margen de eliminar posteriormente la restricción de que $\tau - \tau_K$ sea relacional. Necesitamos dos lemas, que probamos a continuación, para obtener estos resultados.

__Lema 1__ Para cada K-modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ hay un K-modelo $\mathfrak{A}^*$ de tipo τ^* tal que para cada sentencia σ de tipo τ :

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}^* \models \overset{*}{\sigma}^M .$$

Además, $\mathfrak{A}^* \models \gamma$.

Prueba:

Definimos $\mathfrak{A}^*$ a partir de $\mathfrak{A}$ como se indica a continuación :

- $A^* = A \cup \omega$
- $r^{\mathfrak{A}^*} = r^{\mathfrak{A}}$ para cada signo r de $\tau_K \cup \{U\}$ (extendiendo de modo arbitrario las funciones para los argumentos en ω)
- $0^{\mathfrak{A}^*} = 0$ y $S^{\mathfrak{A}^*} = S$ (la función sucesor, S, de ω , se extiende de modo arbitrario a argumentos en A) .
- $M^{\mathfrak{A}^*} = A$
- $f^{\mathfrak{A}^*}$ es una función inyectiva arbitraria de $A^* \times A^*$ en A^* .
- $Q^{\mathfrak{A}^*} = \{ \langle n, f^{\mathfrak{A}^*}_{r(n)}(\langle a_1, \ldots, a_{r(n)} \rangle) \rangle : \langle a_1, \ldots, a_{r(n)} \rangle \in R^{\mathfrak{A}}_n \}$

donde $f^{\mathfrak{A}^*}_{r(n)}$ es la función obtenible a partir de $f^{\mathfrak{A}^*}$ de acuerdo con:

$$\begin{cases} f^{\mathfrak{A}^*}_1(a) = a \quad \text{para cada } a \in A^* \\ f^{\mathfrak{A}^*}_{n+1}(\langle a_1, \ldots, a_{n+1} \rangle) = f^{\mathfrak{A}^*}(\langle f^{\mathfrak{A}^*}_n(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle), a_{n+1} \rangle) \quad \text{para} \end{cases}$$

cualesquiera $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A^*$.

Así $M^{\mathfrak{A}^*}$ es τ_K-cerrado en $\mathfrak{A}^*$ y

$$(\mathfrak{A}^* \restriction \tau_K) | U^{\mathfrak{A}^*} = (\mathfrak{A} \restriction \tau_K) | U^{\mathfrak{A}}$$

de manera que $\mathfrak{A}^*$ es un K-modelo.

Es inmediato que para cada término t de tipo τ y cada asignación s en $\mathfrak{A}$,

$$t^{\mathfrak{A}^*}[s] = t^{\mathfrak{A}}[s] .$$

Veamos ahora que para cada fórmula φ de tipo τ y cada asignación s en $\mathfrak{A}$:

$(*)\ \mathfrak{A} \models \varphi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A}^* \models \varphi^{*M}[s]$

Establecemos $(*)$ por inducción en φ. Es obvio para el caso $\varphi = t_1 \approx t_2$. Consideremos el caso

$$\varphi = R_n t_1 \ldots t_{r(n)} \quad .$$

Supongamos, en primer lugar, que

$$\mathfrak{A} \models R_n t_1 \ldots t_{r(n)} \; [s] \; .$$

Entonces

$$< t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, t_{r(n)}^{\mathfrak{A}}[s] > \in R_n^{\mathfrak{A}}$$

y, como para cada i $(1 \leq i \leq r(n))$, $t_i^{\mathfrak{A}}[s] = t_i^{\mathfrak{A}^*}[s]$ tenemos, por definición de $Q^{\mathfrak{A}^*}$, que

$$< n, f_{r(n)}^{\mathfrak{A}^*}(< t_1^{\mathfrak{A}^*}[s], \ldots, t_{r(n)}^{\mathfrak{A}^*}[s] >) > \in Q^{\mathfrak{A}^*} \; .$$

Pero $n = \bar{n}^{\mathfrak{A}^*}$ y

$$(f_{r(n)}(t_1, \ldots, t_n))^{\mathfrak{A}^*}[s] = f_{r(n)}^{\mathfrak{A}^*}(< t_1^{\mathfrak{A}^*}[s], \ldots, t_{r(n)}^{\mathfrak{A}^*}[s] >)$$

y así

$$< \bar{n}^{\mathfrak{A}^*}[s] \; , \; (f_{r(n)}(t_1, \ldots, t_n))^{\mathfrak{A}^*}[s] > \in Q^{\mathfrak{A}^*} \; ,$$

con lo cual

$$\mathfrak{A}^* \models Q \, \bar{n} \, f_{r(n)}(t_1, \ldots, t_{r(n)}) \; [s] \; ,$$

esto es,

$$\mathfrak{A}^* \models (R_n t_1 \ldots t_{r(n)})^{*M}[s] \quad .$$

A la inversa, supongamos ahora que

$$\mathfrak{A}^* \models (R_n t_1 \ldots t_{r(n)})^{*M}[s] \quad ,$$

es decir,

$$< \bar{n}^{\mathfrak{A}^*}[s] \; , \; f_{r(n)}^{\mathfrak{A}^*}(< t_1^{\mathfrak{A}^*}[s], \ldots, t_{r(n)}^{\mathfrak{A}^*}[s] >) > \in Q^{\mathfrak{A}^*} .$$

Por definición de $Q^{\mathfrak{A}^*}$, y dado que $n = \bar{n}^{\mathfrak{A}^*} = \bar{n}^{\mathfrak{A}^*}[s]$, hay $a_1, \ldots, a_{r(n)}$ tales que $< a_1, \ldots, a_{r(n)} > \in R_n^{\mathfrak{A}}$ y

$$f_{r(n)}^{\mathfrak{A}^*}(< a_1, \ldots, a_{r(n)} >) = f_{r(n)}^{\mathfrak{A}^*}(< t_1^{\mathfrak{A}^*}[s], \ldots, t_{r(n)}^{\mathfrak{A}^*}[s] >) \; .$$

Como $f^{\mathfrak{N}^*}$ es inyectiva, también es inyectiva $f^{\mathfrak{N}^*}_{r(n)}$. Así, para cada i $(1 \leq i \leq r(n))$:

$$a_i = t_i^{\mathfrak{N}^*}[s] = t_i^{\mathfrak{N}}[s] .$$

Por tanto

$$< t_1[s], \ldots, t_{r(n)}[s] > \in R_n^{\mathfrak{N}}$$

y, en consecuencia,

$$\mathfrak{N} \models R_n t_1 \ldots t_{r(n)} \ [s] .$$

Esto justifica, pues, el resultado para el caso $\varphi = R_n t_1 \ldots t_{r(n)}$. Si φ es una fórmula atómica del tipo

$$P t_1 \ldots t_m$$

donde ahora $P \in \tau_K \cup \{U\}$, resulta que

$$P^{\mathfrak{N}^*} = P^{\mathfrak{N}} \quad \text{y} \quad \varphi^{*M} = \varphi$$

de manera que es inmediato que se verifica $(*)$.

Los casos $\varphi = \neg \psi$ y $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ de la inducción no ofrecen ninguna dificultad. Consideremos, entonces, el caso

$$\varphi = \exists x \psi .$$

Supongamos, en primer lugar, que $\mathfrak{N} \models \exists x \psi \ [s]$. Hay, en ese caso, un $a \in A$ tal que $\mathfrak{N} \models \psi[s^x_a]$. Por hipótesis inductiva, $\mathfrak{N}^* \models \psi^{*M} \ [s^x_a]$. Como $A = M^{\mathfrak{N}^*}$, $a \in M^{\mathfrak{N}^*}$ y así

$$\mathfrak{N}^* \models \exists x (Mx \wedge \psi^{*M}) \ [s] ,$$

esto es,

$$\mathfrak{N}^* \models (\exists x \ \psi)^{*M} [s] .$$

A la inversa, supongamos que $\mathfrak{N}^* \models (\exists x \psi)^{*M} \ [s]$. Entonces $\mathfrak{N}^* \models \exists x (Mx \wedge \psi^{*M}) \ [s]$ y hay, por tanto, un $a \in M^{\mathfrak{N}^*}$ tal que $\mathfrak{N}^* \models \psi^{*M} \ [s^x_a]$. Como $M^{\mathfrak{N}^*} = A$, s^x_a es una asignación en $\mathfrak{N}$. Entonces, el supuesto inductivo nos garantiza que $\mathfrak{N} \models \psi \ [s^x_a]$ y, por tanto, que $\mathfrak{N} \models \exists x \psi \ [s]$.

Con esto culmina la inducción y queda establecido $(*)$.

y, por tanto, el lema 1.

Lema 2 Para cada K-modelo $\mathfrak{B}$ de tipo τ^* tal que $\mathfrak{B} \models \gamma$, hay un K-modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ tal que para cada sentencia σ de tipo τ,

$$\mathfrak{A} \models \sigma \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \sigma^{*M} .$$

Prueba:

Definimos $\mathfrak{A}$ a partir de $\mathfrak{B}$ como sigue:

- $A = M^{\mathfrak{B}}$
- $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ para cada $c \in \tau_K$
- $g^{\mathfrak{A}} = g^{\mathfrak{B}} \restriction A^n$ para cada signo funcional n-ádico $g \in \tau_K$.
- $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} \cap A^n$ para cada predicado n-ádico $P \in \tau_K \cup \{U\}$.

(En particular, $U^{\mathfrak{A}} = U^{\mathfrak{B}}$ pues $U^{\mathfrak{B}} \subseteq M^{\mathfrak{B}} = A$).

- $R_n^{\mathfrak{A}} = \left\{ \langle a_1, \ldots, a_{r(n)} \rangle \in A^{r(n)} : \langle \bar{n}^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}}_{r(n)}(\langle a_1, \ldots, a_{r(n)} \rangle) \rangle \in Q^{\mathfrak{B}} \right\}$

para cada $n \in \omega$.

Como $\mathfrak{B}$ es un K-modelo y $\mathfrak{B} \models \gamma$, también $\mathfrak{A}$ es un K-modelo. Es inmediato, además, que para cada término t de tipo τ y cada asignación s en $\mathfrak{A}$,

$$t^{\mathfrak{A}}[s] = t^{\mathfrak{B}}[s] .$$

Basta ahora con mostrar que para cada fórmula φ de tipo τ y cada asignación s en $\mathfrak{A}$,

(* *) $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi^{*M}[s]$

Este punto se establece por inducción en φ. Es obvio para ecuaciones y para fórmulas atómicas de la forma

$$Pt_1 \ldots t_m$$

si $P \in \tau_K \cup \{U\}$. Consideremos, pues, el caso $\varphi = R_n t_1 \ldots t_{r(n)}$. Las siguientes aserciones son equivalentes:

(i) $\mathfrak{A} \models R_n t_1 \ldots t_{r(n)} [s]$

(ii) $\langle t_1[s], \ldots, t_{r(n)}[s] \rangle \in R_n^{\mathfrak{A}}$

(iii) $\langle \bar{n}^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}}_{r(n)}(\langle t_1^{\mathfrak{B}}[s], \ldots, t^{\mathfrak{B}}_{r(n)}[s] \rangle) \rangle \in Q^{\mathfrak{B}}$

(iv) $\langle \bar{n}^{\mathfrak{B}}[s], (f_{r(n)}(t_1, \ldots, t_{r(n)}))^{\mathfrak{B}}[s] \rangle \in Q^{\mathfrak{B}}$

(v) $\mathfrak{B} \models Q\, \bar{n}\, f_{r(n)}(t_1,\ldots,t_{r(n)})$ [s]

(vi) $\mathfrak{B} \models (Rt_1\ldots t_{r(n)})^{*M}$ [s] .

Por tanto, este caso está justificado. Los restantes casos de la inducción no ofrecen ninguna dificultad. Unicamente,en el caso $\varphi = \exists x\, \psi$ se ha de tener en cuenta que

$$(\exists x\, \psi)^{*M} = \exists x(Mx \wedge \psi^{*M})$$

y que $A = M^{\mathfrak{B}}$.

Establecidos, pues, los dos lemas, observamos que, por el lema 1, Γ es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ y , por el lema 2, Γ no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$. Esto es lo que era preciso justificar.

Sólo queda por eliminar la restricción de que $\tau - \tau_K$ sea relacional. Supongamos que este no es el caso. Sustituimos cada constante c de $\tau - \tau_K$ por un predicado monádico P_c y cada signo funcional n-ádico g de $\tau - \tau_K$ por un predicado n+1-ádico P_g . Sea τ^r el tipo de semejanza obtenido a partir de τ al sustituir cada constante y cada signo funcional de $\tau - \tau_K$ por los correspondientes predicados, que podemos suponer que no estám en τ . Definamos,

$$\sigma_c = \exists x\, P_c x \wedge \forall xy(P_c x \wedge P_c y \longrightarrow x \approx y) \quad \text{para cada } c \in \tau - \tau_K$$

$$\sigma_g = \forall x_1\ldots x_n\, \exists y\, P_g x_1\ldots x_n y \wedge \forall x_1\ldots x_n yz(P_g x_1\ldots x_n y \wedge$$

$$\wedge\, P_g x_1\ldots x_n z \longrightarrow y \approx z), \quad \text{para cada signo funcional n-ádico } g \in \tau - \tau_K.$$

Sea Φ el conjunto formado por estas sentencias. Φ es recursivo si τ es recursivo.

A cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ corresponde un modelo $\mathfrak{A}^r$ de tipo τ^r definido por

- $A^r = A$
- $P_c^{\mathfrak{A}^r} = \{c^{\mathfrak{A}}\}$ para cada $c \in \tau - \tau_K$.
- $P_g^{\mathfrak{A}^r} = g^{\mathfrak{A}}$ para cada $g \in \tau - \tau_K$

- $s^{\mathfrak{A}^r} = s^{\mathfrak{A}}$ para cualquier otro signo $s \in \tau$.

Si $\mathfrak{B}$ es un modelo de tipo τ^r y $\mathfrak{B} \models \Phi$, hay un modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ tal que $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^r$. Mediante el método usual de eliminación de constantes y signos funcionales podemos obtener una traducción σ^r a tipo τ^r de cualquier sentencia σ de tipo τ , de manera que para cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ

$$\mathfrak{A} \models \sigma \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A}^r \models \sigma^r \quad .$$

Definamos entonces,

$$\Sigma' = \{\sigma^r : \sigma \in \Sigma\} \cup \Phi \quad .$$

Se verifican los siguientes puntos :

(i) Σ' es recursivamente enumerable y , por tanto, posee un conjunto recursivo de axiomas.

(ii) El tipo de semejanza τ^r de Σ' tiene la propiedad de que $\tau^r - \tau_K$ es relacional.

(iii) Σ' es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$, pues Σ lo es .

(iv) Σ' no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$, pues Σ no lo es .

Usando ahora la parte ya establecida del teorema, concluimos igualmente que la clase J de las estructuras finitas es RPC en $\mathcal{L}_K$. Esto justifica, entonces, el teorema 19.

20. <u>Teorema</u>

Para cada K-lógica de tipo de semejanza finito, $\mathcal{L}_K$:

Si $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para validez, entonces $\mathcal{L}_K$ es recursivamente compacta.

Prueba:

El argumento es análogo al del teorema 15, pero usando ahora adicionalmente el teorema 19.

Supongamos que $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para validez pero que $\mathcal{L}_K$ no es recursivamente compacta. Por el teorema

19 tenemos que la clase de las estructuras finitas es RPC en $\mathcal{L}_K$. Hay, pues, un tipo de semejanza finito τ que contiene un predicado monádico V y hay una sentencia δ de tipo τ con las siguientes propiedades:

(1) En cada K-modelo $\mathfrak{A}$ de δ, $V^{\mathfrak{A}}$ es finito y no vacío.

(2) Para cada $n \geq 1$, hay un K-modelo $\mathfrak{A}$ de δ en el que $|V^{\mathfrak{A}}| = n$.

Por el teorema de Trahtenbrot citado en el teorema 15, hay un tipo de semejanza finito y relacional τ_0, que podemos suponer disjunto de τ, en el que el conjunto de las sentencias verdaderas en todos los modelos finitos no es recursivamente enumerable.

Como en la prueba del teorema 15, podemos justificar que para cada sentencia σ de tipo τ_0,

(*) σ es verdadera en todos los modelos finitos si y sólo si $\models_K (\delta \rightarrow \sigma^V)$.

Dado que $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para validez, el conjunto de las sentencias válidas en $\mathcal{L}_K$ del tipo de semejanza $\tau \cup \tau_0$ es recursivamente enumerable. Pero en ese caso también lo es el conjunto

$$\{ \sigma : \sigma \text{ es de tipo } \tau_0 \text{ y } \models_K (\delta \rightarrow \sigma^V) \} .$$

De acuerdo con (*), este es el conjunto de las sentencias de tipo τ_0 que son verdaderas en todos los modelos finitos y, por tanto, no es recursivamente enumerable.

Así pues, es contradictorio admitir que $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para validez pero no es recursivamente compacta.

21. Corolario

Para cada K-lógica de tipo de semejanza finito, $\mathcal{L}_K$:

$\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para validez si y sólo si $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para consecuencia .

Prueba: por los teoremas 20 y 16 .

22. Contraejemplo

Hay una lógica $\mathcal{L}_K$ de tipo de semejanza recursivo τ_K que es recursivamente enumerable para validez pero no es recursivamente enumerable para consecuencia.

Prueba:

Se trata de una versión de ω-lógica . Ha sido introducida en I.5.3 . Su tipo de semejanza es $\tau_K = \{c_n : n \in \omega\}$ y la clase K se define por :

$$K = \{\mathfrak{A} : A = \{c_n^{\mathfrak{A}} : n \in \omega\}\} .$$

Por tanto,

$$\mathfrak{A} \text{ es un K-modelo si y sólo si } U^{\mathfrak{A}} = \{c_n^{\mathfrak{A}} : n \in \omega\} .$$

Veamos en primer lugar que

(1) $\mathcal{L}_K$ no es recursivamente enumerable para consecuencia.

De acuerdo con el teorema 15, basta con mostrar que $\mathcal{L}_K$ no es recursivamente compacta. Pero esto es obvio, pues si c es una constante distinta de las de $\{c_n : n \in \omega\}$, el conjunto de sentencias

$$\{Uc\} \cup \{\neg c \approx c_n : n \in \omega\}$$

es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$ pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$.

Veamos a continuación que

(2) $\mathcal{L}_K$ es recursivamente enumerable para validez.

El motivo es que la lógica de primer orden es recursivamente enumerable para consecuencia y que en todo tipo de semejanza τ , para cada sentencia σ de τ :

$(*)$ $\models_K \sigma$ si y sólo si $\{Uc_n : n \in \omega\} \models \sigma$.

Para establecer $(*)$, supongamos primero que σ es consecuencia en primer orden de $\{Uc_n : n \in \omega\}$ y veamos que $\models_K \sigma$.

Sea $\mathfrak{A}$ un K-modelo arbitrario . Dado que para cada $n\in\omega$, $\mathfrak{A}\models Uc_n$, tenemos que $\mathfrak{A}\models\sigma$. Así pues, $\models_K \sigma$.

Ahora supongamos que σ es K-válida y veamos que $\{Uc_n : n\in\omega\}\models\sigma$. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de $\{Uc_n : n\in\omega\}$. Mostraremos que $\mathfrak{A}\models\sigma$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem, hay un modelo $\mathfrak{B}$ numerable tal que $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ (podemos suponer que el tipo de semejanza τ de $\mathfrak{A}$ es numerable dado que en σ no hay más que un número finito de signos) . Bastará, pues, con establecer que $\mathfrak{B}\models\sigma$. Sea m un número natural tal que

para cada $k > m$, c_k no está en σ .

Definimos un modelo $\mathfrak{C}$ de tipo τ por

- $C = B$
- $r^{\mathfrak{C}} = r^{\mathfrak{B}}$ para cada signo $r\in\tau-\{c_k : k>m\}$
- $c_k^{\mathfrak{C}} = b_{(k-m)-1}$ para cada $k > m$, donde $\{b_n : n\in\omega\}$

es una enumeración arbitraria de $U^{\mathfrak{B}}$.

Así $U^{\mathfrak{C}} = \{c_n^{\mathfrak{C}} : n\in\omega\}$, de manera que $\mathfrak{C}$ es un K-modelo . Como σ es K-válida, $\mathfrak{C}\models\sigma$. Pero $B = C$ y para cada signo r que aparece en σ , $r^{\mathfrak{B}} = r^{\mathfrak{C}}$, de modo que $\mathfrak{B}\models\sigma$. Esto justifica (*) y el punto (2) .

Obsérvese que este ejemplo muestra también que en los teoremas 19 y 20 la restricción de que τ_K sea finito no es eliminable.

Una última elaboración del teorema de Craig-Vaught nos proporciona el siguiente resultado:

23. <u>Teorema</u>

Si $\mathcal{L}_K$ es una lógica de tipo de semejanza finito τ_K y Σ es un conjunto recursivo de sentencias de tipo de semejanza finito τ , hay un tipo de semejanza finito τ' que extiende a τ y posee un predicado monádico M y hay una sentencia σ de tipo τ' tal que

$$\{\varphi : \Sigma \models_K \varphi\} = \{\varphi : \varphi \text{ es de tipo } \tau \text{ y } \sigma \models_K \varphi^M\} .$$

Prueba:

Modificamos la teoría Δ del teorema 13. Los grupos de axiomas A y B son finitos dado que τ es finito. Como Σ es recursivo, hay una fórmula $\varphi_\Sigma(x)$ que representa a los números de Gödel de las sentencias de Σ en A1-A11. Admitimos además que $\varphi_\Sigma(x) \models Nx$. Cambiamos entonces el grupo C de axiomas por los siguientes:

<u>Grupo C de axiomas de Δ</u>.

C1. $\forall x(\varphi_\Sigma(x) \longrightarrow Vx)$

C2. $\forall xy(\text{ASIG } x \wedge Vy \longrightarrow \text{SAT } x\ y)$

Dado que no hemos modificado los grupos de axiomas A y B, tenemos, como en el teorema 13, que

<u>Lema 1</u> Para cada sentencia φ de tipo τ, $\Delta \models (V\ulcorner\varphi\urcorner \longrightarrow \varphi^M)$.

Los siguientes lemas difieren de los del teorema 13.

<u>Lema 2</u> Para cada $\varphi \in \Sigma$, $\Delta \models \varphi^M$.

Pues, si $\varphi \in \Sigma$, tenemos $\Delta \models \varphi_\Sigma(\ulcorner\varphi\urcorner)$ y , por C1, $\Delta \models V\ulcorner\varphi\urcorner$. Así, el lema 1 proporciona el resultado.

<u>Lema 3</u> Para cada K-modelo $\mathfrak{B}$ de Σ hay un K-modelo $\mathfrak{A}$ de Δ tal que $(\mathfrak{A} \restriction \tau) | M^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$.

La prueba es análoga a la del lema 3 del teorema 13. $\mathfrak{A}$ se define como allí se indica, con la salvedad de que ahora $\mathfrak{B}$ es un modelo de Σ y no de un subconjunto finito de Σ y que ahora ponemos

$$V^{\mathfrak{A}} = \{\text{GÖ}(\varphi) : \varphi \in \Sigma\}$$

Sea, entonces, σ la conjunción de los axiomas de Δ y veamos que σ cumple las condiciones requeridas.

(1) Si φ es una sentencia de tipo τ tal que $\Sigma \models_K \varphi$ y $\mathfrak{A}$ es un K-modelo de σ , tenemos, por el lema 2, que para cada

$\psi \in \Sigma$, $\mathfrak{A} \models \psi^M$. Por el grupo B de axiomas de Δ, tenemos que $M^{\mathfrak{A}}$ es τ-cerrado y que $U^{\mathfrak{A}} \subseteq M^{\mathfrak{A}}$. Así, $(\mathfrak{A} \restriction \tau) \setminus M^{\mathfrak{A}}$ es un K-modelo de Σ y, por tanto, $(\mathfrak{A} \restriction \tau)|M^{\mathfrak{A}} \models \varphi$. En conclusión, $\mathfrak{A} \models \varphi^M$. Esto justifica que si $\Sigma \models_K \varphi$, entonces $\sigma \models_K \varphi^M$ para cada sentencia φ de tipo τ.

(2) Si φ es una sentencia de tipo τ y $\sigma \models_K \varphi^M$ y $\mathfrak{B}$ es un K-modelo de Σ, tenemos, por el lema 3, un K-modelo $\mathfrak{A}$ de σ tal que $(\mathfrak{A} \restriction \tau) \setminus M^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$. Entonces $\mathfrak{A} \models \varphi^M$ y, por tanto, $\mathfrak{B} \models \varphi$. Esto muestra que si $\sigma \models_K \varphi^M$, entonces $\Sigma \models_K \varphi$, para cada sentencia φ de tipo τ.

De (1) y (2) se sigue entonces que

$$\{\varphi : \Sigma \models_K \varphi\} = \{\varphi : \varphi \text{ es de tipo } \tau \text{ y } \sigma \models_K \varphi^M\} .$$

Para finalizar el estudio de las diversas formas de los teoremas de compacidad y completud para K-lógicas, ofrecemos unos ejemplos que muestran que ciertas combinaciones de propiedades pueden tener lugar.

24. Ejemplo.

Hay una lógica $\mathcal{L}_K$ de tipo de semejanza finito τ_K que es recursivamente compacta pero no es ω-compacta.

Prueba:

El tipo de semejanza τ_K consta de los signos de la aritmética $0, S, +, \cdot, <$. La clase K está formada por los modelos de la aritmética de Peano que no son elementalmente equivalentes al modelo

$$\mathbb{N} = \langle \omega, 0, S, +, \cdot, < \rangle .$$

Los axiomas de la aritmética de Peano, AP, están detallados en el apartado de notación. Recordemos que la teoría completa de números, TCN, es el conjunto de las sentencias verdaderas en $\mathbb{N}$.

Así pues, para cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ_K,

$\mathfrak{A} \in K$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models AP$ y $\mathfrak{A} \not\models TCN$.

(1) $\mathcal{L}_K$ no es ω-compacta.

El conjunto de sentencias $TCN \cup \{\forall x\ Ux\}$ es numerable pero no es satisfacible en $\mathcal{L}_K$. Veamos que, sin embargo, es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$. Esto justificará el punto (1). Sea Σ un subconjunto finito de TCN. Mostraremos que $\Sigma \cup \{\forall x\ Ux\}$ tiene un K-modelo. $AP \cup \Sigma$ es un conjunto recursivamente enumerable de enunciados y $\mathbb{N} \models AP \cup \Sigma$. Así, por el teorema de incompletud de Gödel, hay una sentencia σ de tipo τ_K tal que

$$\mathbb{N} \models \sigma \quad \text{pero} \quad AP \cup \Sigma \not\models \sigma \ .$$

Entonces $AP \cup \Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ tiene un modelo $\mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A} \models AP$ y $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$, $\mathfrak{A} \in K$. Sea $\mathfrak{A}^*$ la expansión de $\mathfrak{A}$ al tipo $\tau_K \cup \{U\}$ en la que $U^{\mathfrak{A}^*} = A$. Resulta entonces que $\mathfrak{A}^*$ es un K-modelo y $\mathfrak{A}^* \models \Sigma \cup \{\forall x\ Ux\}$. Esto es precisamente lo que había que justificar.

(2) $\mathcal{L}_K$ es recursivamente compacta.

Sea Σ un conjunto recursivo de sentencias de un tipo de semejanza recursivo τ y supongamos que Σ es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_K$. Mostraremos que Σ es satisfacible en $\mathcal{L}_K$. Sea Δ el siguiente conjunto de sentencias:

(i) φ^U para cada $\varphi \in AP$

(ii) $U0$

(iii) $\forall x(Ux \longrightarrow U\,Sx)$

(iv) $\forall xy(Ux \wedge Uy \longrightarrow U\,x+y \wedge U\,x\cdot y)$

Obsérvese que en todo K-modelo $\mathfrak{A}$ se tiene $\mathfrak{A} \models \Delta$. Por tanto, $\Sigma \cup \Delta$ es satisfacible (en primer orden) . Definamos:

$$\Gamma = \{\sigma : \Sigma \cup \Delta \models \sigma^U \ \text{ y } \sigma \text{ es de tipo } \tau_K\} \ .$$

Como $\Sigma \cup \Delta$ es recursivamente enumerable, Γ también es recursivamente enumerable. Pero además Γ es satisfacible (en primer orden),pues $\Sigma \cup \Delta$ lo es y si $\mathfrak{A}$ es un modelo de $\Sigma \cup \Delta$, $U^{\mathfrak{A}}$ es τ_K-cerrado y $(\mathfrak{A} \restriction \tau_K) | U^{\mathfrak{A}} \models \Gamma$. Entonces, por el teorema de incompletud de Gödel, hay una sentencia σ de tipo τ_K tal que

$$\mathbb{N} \models \sigma \text{ pero } \Gamma \not\models \sigma .$$

En ese caso $\Sigma \cup \Delta \not\models \sigma^U$, de manera que $\Sigma \cup \Delta \cup \{\neg \sigma^U\}$ tiene un modelo $\mathfrak{B}$. Como $\mathfrak{B} \models \Delta$, $U^{\mathfrak{B}}$ es τ_K-cerrado en $\mathfrak{B}$ y $(\mathfrak{B} \restriction \tau_K) | U^{\mathfrak{B}} \models$ AP . Pero además $(\mathfrak{B} \restriction \tau_K) | U^{\mathfrak{B}} \models \neg \sigma$, pues $\mathfrak{B} \models \neg \sigma^U$. Así $(\mathfrak{B} \restriction \tau_K) | U^{\mathfrak{B}} \in K$ y , por tanto, $\mathfrak{B}$ es un K-modelo de Σ . Esto establece el punto (2).

25. Ejemplo

Hay una lógica $\mathcal{L}_K$,de tipo de semejanza finito τ_K , que es compacta pero no es recursivamente enumerable para validez.

Prueba:

El tipo de semejanza τ_K es, como en el ejemplo anterior, el tipo de semejanza aritmético. La clase K está formada, en este caso, por los modelos elementalmente equivalentes a $\mathbb{N}$, esto es,

$$K = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \equiv \mathbb{N}\} .$$

Obsérvese que , en ese caso,

$\mathfrak{A} \in K$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models$ TCN .

Sea Δ el siguiente conjunto de sentencias:

(i) φ^U para cada $\varphi \in$ TCN .

(ii) $U0$

(iii) $\forall x(Ux \longrightarrow USx)$

(iv) $\forall xy(Ux \wedge Uy \longrightarrow U\, x+y \wedge U\, x \cdot y)$

Resulta entonces que para todo modelo $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A}$ es un K-modelo si y sólo si $\mathfrak{A} \models \Delta$.

Por tanto, para cada conjunto de sentencias Σ :

Σ tiene un K-modelo si y sólo si $\Sigma \cup \Delta$ tiene un modelo .

De aquí que $\mathcal{L}_K$ sea compacta. Si $\mathcal{L}_K$ fuera recursivamente enumerable para validez, sería recursivamente enumerable el conjunto

$$\{ \sigma : \quad \forall x\, Ux \models_{K} \sigma \quad \text{y } \sigma \text{ es de tipo } \tau_K \} \quad .$$

Pero este conjunto es precisamente TCN , que no es recursivamente enumerable. Por tanto, $\mathcal{L}_K$ no es recursivamente enumerable para validez.

Obsérvese que una situación análoga se da con cualquier clase de modelos de la forma

$$K = \{ \mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \}$$

si la teoría completa del modelo $\mathfrak{A}$ no es recursivamente enumerable.

NOTAS AL CAPITULO II

Los resultados de este capítulo son originales en su totalidad . En los teoremas 7,8 y 9 se adaptan pruebas establecidas para resultados análogos de lógicas abstractas, pero en el resto no hay resultados paralelos de los que tengamos noticia . Un teorema de Craig & Vaught (véase Craig & Vaught (1958)) ha sido fuente de inspiración para numerosos resultados.

CAPITULO III : COMPACIDAD EN $\mathfrak{M}$-LOGICAS

1. INTRODUCCION

1.1 Ya hemos podido observar alguna diferencia entre $\mathfrak{M}$-lógicas y K-lógicas en lo que atañe a compacidad : las $\mathfrak{M}$-lógicas ω-compactas son precisamente aquellas en las que $\langle\omega,<\rangle$ es RPC_δ , y esto no es así para K-lógicas en general (véase II.8 y II.11). Es natural, por tanto, dar un tratamiento específico a las $\mathfrak{M}$-lógicas e indagar si existen más diferencias interesantes. En II.24 se ofreció un ejemplo de una K-lógica recursivamente compacta pero no ω-compacta, pero no se trataba de una $\mathfrak{M}$-lógica. Este capítulo surgió de la pregunta acerca de si existen $\mathfrak{M}$-lógicas con tal propiedad. La respuesta es positiva y conduce a caracterizaciones de ω-compacidad y compacidad recursiva para $\mathfrak{M}$-lógicas asociadas a modelos numerables.

1.2 Si $\mathfrak{M}$ es una estructura finita, la lógica $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ es compacta y, por tanto, no hay nada que investigar en lo que respecta a otras versiones más débiles de compacidad. Exponemos a continuación el argumento que muestra que si $\mathfrak{M}$ es finita, $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ es compacta.

Sea Δ la teoría completa de $\mathfrak{M}$, es decir, el conjunto de sentencias de tipo $\tau_{\mathfrak{M}}$ verdaderas en $\mathfrak{M}$, y sea Γ el siguiente conjunto de sentencias:

(i) φ^U para cada $\varphi\in\Delta$.

(ii) $\exists x\, Ux$

(iii) Uc para cada constante $c\in\tau_{\mathfrak{M}}$.

(iv) $\forall x_1\ldots x_n(Ux_1\wedge\ldots\wedge Ux_n \longrightarrow U fx_1\ldots x_n)$ para cada signo funcional n-ádico $f\in\tau_{\mathfrak{M}}$.

Dado que $\mathfrak{M}$ es una estructura finita, para cada modelo $\mathfrak{A}$ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}}$:

$$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{M} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A}\models\Delta$$

Por tanto, para cada modelo $\mathfrak{A}$,

$\mathfrak{A}$ es un $\mathfrak{M}$-modelo si y sólo si $\mathfrak{A} \models \Gamma$.

Así, para cada conjunto de sentencias Σ ,

Σ tiene un $\mathfrak{M}$-modelo si y sólo si $\Sigma \cup \Gamma$ tiene un modelo.

Entonces, si Σ es un conjunto finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$, $\Sigma \cup \Gamma$ es finitamente satisfacible (en primer orden). Por compacidad de primer orden, $\Sigma \cup \Gamma$ tiene entonces un modelo. Pero en ese caso, Σ tiene un $\mathfrak{M}$-modelo . $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ es, pues, compacta.

1.3 En el caso de estructuras infinitas, la situación es muy distinta: si $\mathfrak{M}$ es una estructura infinita de cardinal κ , entonces la lógica $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ no puede ser μ-compacta para ningún cardinal $\mu > \kappa$. La razón es que, si las constantes $\{c_\eta : \eta < \mu\}$ no son de $\tau_{\mathfrak{M}}$, el conjunto de sentencias

$$\{\neg c_\eta \approx c_\xi : \eta < \xi < \mu\} \cup \{Uc_\eta : \eta < \mu\}$$

es finitamente satisfacible en $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ pero no tiene ningún $\mathfrak{M}$-modelo. Por tanto, si $\mathfrak{M}$ es un modelo infinito de cardinal κ , todo lo que podemos aspirar a obtener es una lógica $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ κ-compacta . A la vista de esto definimos:

1.4 <u>Definición</u> : Modelo compacto

Si $\mathfrak{M}$ es un modelo infinito de cardinal κ ,

$\mathfrak{M}$ es compacto si y sólo si $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ es κ-compacta .

Resulta más natural formular ciertas propiedades en términos del modelo $\mathfrak{M}$ que en términos de la lógica $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$. Usaremos frecuentemente las siguientes definiciones:

1.5 <u>Definiciones</u>

(1) $\mathfrak{M}$ es κ-compacto si y sólo si $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ es κ-compacta .

(2) $\mathfrak{M}$ es recursivamente compacto si y sólo si $\mathfrak{M}$ es recursivamente compacta.

1.6 Obsérvese que, de acuerdo con estas definiciones, un modelo infinito $\mathfrak{M}$ de cardinal κ es compacto si y sólo si es κ-compacto.

1.7 La cuestión que parece ser interesante es la de determinar qué modelos son compactos. En los próximos apartados se darán algunas respuestas. Obsérvese que es natural restringirse, a estos efectos, a considerar modelos $\mathfrak{M}$ cuyo tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}}$ tenga, a lo sumo, la cardinalidad de $\mathfrak{M}$, pues todo tipo de semejanza considerado debe incluir a $\tau_{\mathfrak{M}}$.

Veremos que los modelos compactos están muy relacionados con los modelos saturados. En el próximo apartado recordaremos la definición de los modelos saturados y expondremos los resultados necesarios para este capítulo. Los teoremas que obtendremos muestran que los modelos numerables compactos son los modelos numerables saturados y que los modelos numerables recursivamente compactos son los modelos numerables recursivamente saturados. Pero en el caso no numerable ya no se da este paralelismo : si bien todo modelo no numerable y saturado es compacto, hay modelos no numerables y compactos que no son saturados.

1.8 Estableceremos ahora un lema que contribuirá a simplificar las pruebas posteriores. Tiene que ver con lo siguiente: consideremos una estructura $\mathfrak{M}$ y un conjunto de sentencias Σ que es finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible. A efectos de probar que Σ es $\mathfrak{M}$-satisfacible es, a menudo, deseable poder suponer que $\Sigma \models \forall x\, Ux$, de manera que en todo modelo $\mathfrak{N}$ de Σ ocurra $U^{\mathfrak{N}} = A$ y, así, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N} \mid U^{\mathfrak{N}}$. El lema justifica que siempre se puede efectuar esta suposición sobre Σ a efectos de establecer la compacidad de $\mathfrak{M}$. Ofreceremos después una versión recursiva del mismo lema.

1.9 Lema

Supongamos que $\mathfrak{M}$ es una estructura de cardinal infinito κ y que μ es un cardinal infinito tal que $|\tau_{\mathfrak{M}}| \leq \mu \leq \kappa$. Bajo estas hipótesis:

Si todo conjunto Σ de $\leq \mu$ sentencias que verifica $\Sigma \models \forall x\, Ux$ y es finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible es $\mathfrak{M}$-satisfacible, entonces $\mathfrak{M}$ es μ-compacto.

Prueba:

Supongamos que $\mathfrak{M}$, κ y μ verifican las condiciones indicadas y que T es un conjunto de a lo sumo μ sentencias finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible. Mostraremos que T es $\mathfrak{M}$-satisfacible.

Para cada signo $r \in \tau_{\mathfrak{M}} \cup \{U\}$ escogemos un signo distinto r' no presente en el tipo de semejanza τ de T (una constante si r es una constante, un signo funcional n-ádico si r es un signo funcional n-ádico y un predicado n-ádico si r es un predicado n-ádico). En particular, U' es un predicado monádico nuevo correspondiente a U. Sea f un signo funcional monádico que no aparece en $\tau \cup \{r' : r \in \tau_{\mathfrak{M}}\}$ y definamos,

$$\tau' = \tau \cup \{r' : r \in \tau_{\mathfrak{M}} \cup \{U\}\} \cup \{f\} .$$

Para cada sentencia φ de tipo τ sea φ' la sentencia de tipo τ' obtenible al sustituir cada signo r de $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{U\}$ presente en φ por el correspondiente signo r', y sea

$$T' = \{\varphi' : \varphi \in T\} .$$

Sea Γ el conjunto de sentencias de tipo τ' que expresan en cada modelo $\mathfrak{A}$ que $U'^{\mathfrak{A}}$ está cerrado respecto al tipo de semejanza $\{r' : r \in \tau_{\mathfrak{M}}\}$ y que $f^{\mathfrak{A}}$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}}$ y $(\mathfrak{A} \upharpoonright \{r' : r \in \tau_{\mathfrak{M}}\}) | U'^{\mathfrak{A}}$. Concretamente, Γ consta de las siguientes sentencias:

(i) $U'c'$ para cada constante $c \in \tau_{\mathfrak{M}}$.

(ii) $\forall x_1 \ldots x_n (U'x_1 \wedge \ldots \wedge U'x_n \longrightarrow U'g'x_1 \ldots x_n)$ para cada signo funcional n-ádico $g \in \tau_{\mathfrak{m}}$.

(iii) $\forall x (U'x \longleftrightarrow \exists y \; fy \simeq x)$

(iv) $\forall xy (fx \simeq fy \longrightarrow x \simeq y)$

(v) $\forall x_1 \ldots x_n (Rx_1 \ldots x_n \longleftrightarrow R'fx_1 \ldots fx_n)$ para cada predicado n-ádico $R \in \tau_{\mathfrak{m}}$.

(vi) $\forall x_1 \ldots x_n (f\, gx_1 \ldots x_n \simeq g'fx_1 \ldots fx_n)$ para cada signo funcional n-ádico $g \in \tau_{\mathfrak{m}}$.

(vii) $fc \simeq c'$ para cada constante $c \in \tau_{\mathfrak{m}}$.

Sea, finalmente,

$$\Sigma = T' \cup \Gamma \cup \{\forall x \; Ux\} .$$

De este modo, Σ es un conjunto de $\leq \mu$ sentencias de tipo τ' y $\Sigma \models \forall x \; Ux$. Veamos que

(1) Σ es finitamente $\mathfrak{m}$-satisfacible.

Sea Δ un subconjunto finito de Σ y sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ las sentencias de T tales que

$$\varphi_1', \ldots, \varphi_m' \in \Delta .$$

Por hipótesis, $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m)$ tiene un $\mathfrak{m}$-modelo $\mathfrak{A}$. Como $|U^{\mathfrak{A}}| = \kappa$, tenemos que $\kappa \leq |A|$. El teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente nos garantiza que $\mathfrak{A}$ tiene una subestructura elemental $\mathfrak{B}$ de cardinal κ y tal que $U^{\mathfrak{A}} \subseteq B$. Por ello

$$(\mathfrak{B} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{m}}) | U^{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{A} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{m}}) | U^{\mathfrak{A}}$$

y, en consecuencia, $\mathfrak{B}$ es un $\mathfrak{m}$-modelo de $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m)$ de cardinal κ. Como $|U^{\mathfrak{B}}| = \kappa$, hay una biyección F entre B y $U^{\mathfrak{B}}$.

Definimos un modelo $\mathfrak{C}$ de tipo τ' mediante las siguientes cláusulas:

(i) $C = B$

(ii) $U^{\mathfrak{C}} = C$

(iii) $R^{\mathfrak{C}} = \{ \langle a_1,\dots,a_n\rangle : \langle F(a_1),\dots,F(a_n)\rangle \in R^{\mathfrak{B}} \}$

para cada predicado n-ádico $R \in \tau_{\mathfrak{m}}$.

(iv) $g^{\mathfrak{C}} = \{ \langle a_1,\dots,a_{n+1}\rangle : g^{\mathfrak{B}}(\langle F(a_1),\dots,F(a_n)\rangle) = F(a_{n+1}) \}$

para cada signo funcional n-ádico $g \in \tau_{\mathfrak{m}}$.

(v) $c^{\mathfrak{C}} = F^{-1}(c^{\mathfrak{B}})$ para cada constante $c \in \tau_{\mathfrak{m}}$.

(vi) $r'^{\mathfrak{C}} = r^{\mathfrak{B}}$ para cada signo $r \in \tau_{\mathfrak{m}} \cup \{U\}$.

(vii) $f^{\mathfrak{C}} = F$

(viii) $r^{\mathfrak{C}} = r^{\mathfrak{B}}$ para cualquier otro signo r de τ .

Obsérvese que cada signo $r \in \tau_{\mathfrak{m}} \cup \{U\}$ se interpreta en $\mathfrak{B}$ del mismo modo que el correspondiente signo r' en $\mathfrak{C}$. Por tanto, para cada sentencia φ de tipo τ ,

$$\mathfrak{B} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{C} \models \varphi'$$

y así

$$\mathfrak{C} \models (\varphi_1' \wedge \dots \wedge \varphi_m') \ .$$

No tiene ninguna dificultad verificar que las restantes sentencias de Δ también son satisfechas en $\mathfrak{C}$. Además $\mathfrak{C}$ es un $\mathfrak{m}$-modelo, pues

$$(\mathfrak{C} \restriction \tau_{\mathfrak{m}}) | U^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \restriction \tau_{\mathfrak{m}} \cong (\mathfrak{B} \restriction \tau_{\mathfrak{m}}) | U^{\mathfrak{B}} \ .$$

Así pues, $\mathfrak{C}$ es un $\mathfrak{m}$-modelo de Δ . Esto justifica el punto (1) .

Como $\Sigma \models \forall x\, Ux$ y $|\Sigma| \leq \kappa$, se sigue de (1) y de la hipótesis del lema que Σ es $\mathfrak{m}$-satisfacible. Veamos ahora que

(2) T es $\mathfrak{m}$-satisfacible.

Dado que Σ es $\mathfrak{m}$-satisfacible, hay un $\mathfrak{m}$-modelo $\mathfrak{D}$ de Σ . Construimos ahora a partir de $\mathfrak{D}$ un modelo $\mathfrak{A}$ de tipo τ como se indica a continuación :

(i) $A = D$

(ii) $r^{\mathfrak{A}} = r'^{\mathfrak{B}}$ para cada signo $r \in \tau_{\mathfrak{M}} \cup \{U\}$

(iii) $r^{\mathfrak{A}} = r^{\mathfrak{B}}$ para cualquier otro signo $r \in \tau_{\mathfrak{M}}$.

Como todo signo $r \in \tau_{\mathfrak{M}} \cup \{U\}$ se interpreta en $\mathfrak{A}$ del mismo modo que el correspondiente signo r' en $\mathfrak{B}$, tenemos que para cada sentencia φ de tipo τ,

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi' .$$

Entonces $\mathfrak{A} \models T$, pues $\mathfrak{B} \models \Sigma$ y $\{\varphi' : \varphi \in T\} \subseteq \Sigma$. Pero además $\mathfrak{A}$ es un $\mathfrak{M}$-modelo, pues $U'^{\mathfrak{B}}$ está cerrado en $\mathfrak{B}$ respecto al tipo de semejanza $\{r' : r \in \tau_{\mathfrak{M}}\}$ y $f^{\mathfrak{B}}$ es un isomorfismo entre

$$\mathfrak{B} \restriction \tau_{\mathfrak{M}} \quad \text{y} \quad (\mathfrak{B} \restriction \{r' : r \in \tau_{\mathfrak{M}}\}) \mid U'^{\mathfrak{B}} ,$$

en cuyo caso $U^{\mathfrak{A}}$ es $\tau_{\mathfrak{M}}$-cerrado en $\mathfrak{A}$ y

$$(\mathfrak{A} \restriction \tau_{\mathfrak{M}}) \mid U^{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{B} \restriction \{r' : r \in \tau_{\mathfrak{M}}\}) \mid U'^{\mathfrak{B}} \cong \mathfrak{B} \restriction \tau_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{B} \restriction \tau_{\mathfrak{M}}) \mid U^{\mathfrak{B}} .$$

Así pues, $\mathfrak{A}$ es un $\mathfrak{M}$-modelo de T. Esto justifica el punto (2) y el lema.

1.10 <u>Lema</u>

Si $\mathfrak{M}$ es una estructura infinita de tipo de semejanza recursivo y todo conjunto recursivo Σ de sentencias que es finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible y verifica $\Sigma \models \forall x U x$ es $\mathfrak{M}$-satisfacible, entonces $\mathfrak{M}$ es recursivamente compacto.

Prueba:

La prueba es paralela a la del lema 1.9. El tipo de semejanza τ' se puede suponer recursivo y, por hipótesis, el conjunto de sentencias T es recursivo. Entonces también son recursivos Γ y Σ. Los argumentos son, por lo demás, los mismos.

2. MODELOS SATURADOS

Este apartado está destinado a definir ciertos conceptos de teoría de modelos que serán usados en el resto del capítulo. La terminología se ciñe a la utilizada en Chang & Keisler (1977). Asimismo pueden encontrarse en el mencionado texto todos los teoremas que exponemos aquí y sus correspondientes pruebas. También son pertinentes a este respecto Chang (1973), Vaught (1961) Sacks (1972). Para la saturación recursiva véase Barwise (1975) Barwise & Schlipf (1976) y Schlipf (1978).

2.1 Definición : ω-saturación.

Un modelo $\mathfrak{A}$ es ω-saturado si para cualesquiera $a_1,\dots,a_n \in A$, todo conjunto de fórmulas $\Sigma(x)$ del tipo de semejanza de $\langle \mathfrak{A}, a_1,\dots,a_n \rangle$ consistente con $Th(\langle \mathfrak{A}, a_1,\dots,a_n\rangle)$ es realizado en $\langle \mathfrak{A}, a_1,\dots,a_n \rangle$.

Informalmente hablando, en un modelo ω-saturado $\mathfrak{A}$ toda propiedad no contradictoria y expresable nombrando a lo sumo un número finito de elementos de A es poseída por algún elemento de A.

2.2 Definición: ω-homogeneidad.

Un modelo $\mathfrak{A}$ es ω-homogéneo si para cualesquiera $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in A$ tales que

$$\langle \mathfrak{A}\ a_1,\dots,a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}\ b_1,\dots,b_n \rangle$$

y para cualquier $a \in A$ hay un $b \in A$ tal que

$$\langle \mathfrak{A}\ a_1,\dots,a_n,a \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}\ b_1,\dots,b_n,b \rangle \quad .$$

En particular, se entiende que para cada $a \in A$ hay un $b \in A$ tal que

$$\langle \mathfrak{A}\ a \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}\ b \rangle$$

2.3 Definición : ω_1-universalidad.

Un modelo $\mathfrak{A}$ es ω_1-universal si todo modelo numerable $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ es elementalmente inmersible en $\mathfrak{A}$, esto es, $\mathfrak{B} \precsim \mathfrak{A}$.

Los modelos ω_1-universales son modelos grandes, en el sentido de que poseen dentro de sí subestructuras elementales que representan todos los tipos de isomorfía de los modelos numerables de su teoría completa.

2.4 Lemas

(1) Si $\mathfrak{A}$ es un modelo numerable y de tipo de semejanza numerable, $\mathfrak{A}$ es ω-saturado si y sólo si $\mathfrak{A}$ es ω-homogéneo y ω_1-universal.

(2) Hay modelos numerables y de tipo de semejanza numerable que son ω_1-universales pero no son ω-saturados.

(3) Hay modelos numerables y de tipo de semejanza numerable que son ω-homogéneos pero no son ω-saturados.

2.5 Ejemplos

(1) El modelo $\mathbb{N} = \langle \omega, 0, S, +, \cdot, < \rangle$ es ω-homogéneo, pero no es ω_1-universal ni ω-saturado. De hecho, no hay ningún modelo numerable de la aritmética de Peano, AP, que sea ω_1-universal.

(2) Todo modelo de la teoría del orden denso sin extremos es ω-saturado.

(3) El modelo $\langle \omega, < \rangle$ es ω-homogéneo pero no ω-saturado. Su teoría completa posee un modelo numerable ω-saturado (su tipo de orden es $\omega + (\omega^* + \omega)\cdot\eta$) y un modelo ω-homogéneo no isomorfo a $\langle \omega, < \rangle$ que tampoco es ω-saturado (su tipo de orden es $\omega + (\omega^* + \omega)$).

(4) Todo modelo numerable de la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica nula es ω-homogéneo.

2.6 Lemas

(1) Si T es una teoría consistente de tipo de semejanza numerable y para cada $n \in \omega$ hay sólo un número numerable de conjuntos máximamente consistentes de fórmulas $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ consistentes con T, entonces T posee un modelo numerable ω-saturado.

(2) En particular, pues, si T es una teoría consistente de tipo de semejanza numerable y hay sólo un número numerable (salvo isomorfía) de modelos numerables de T, T tiene un modelo numerable ω-saturado.

(3) Todo modelo numerable de tipo de semejanza numerable posee una extensión elemental numerable y ω-homogénea.

(4) Cualesquiera dos modelos numerables ω-saturados y elementalmente equivalentes son isomorfos.

2.7 Observaciones

Los conceptos de ω-saturación y ω-homogeneidad son un instrumento indispensable en el estudio de los modelos numerables de las teorías completas. Pero, además, han contribuido a uniformizar muy diversas pruebas de resultados clásicos de teoría de modelos.

Estos conceptos poseen una versión generalizada a otros cardinales y, en el caso de la ω-saturación, una versión recursiva. Las exponemos a continuación.

2.8 Definición: Saturación recursiva

Un modelo $\mathfrak{A}$ de tipo de semejanza recursivo es recursivamente saturado si para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A$ todo conjunto recursivo de fórmulas $\Sigma(x)$ del tipo de semejanza de $\langle \mathfrak{A}\, a_1, \ldots, a_n \rangle$ consistente con $Th(\langle \mathfrak{A}\, a_1, \ldots, a_n \rangle)$ es realizado en $\langle \mathfrak{A}\, a_1, \ldots, a_n \rangle$.

2.9 Lemas

(1) Todo modelo recursivamente saturado de tipo de semejanza recursivo es ω-homogéneo.

(2) Todo modelo numerable de tipo de semejanza recursivo posee una extensión elemental numerable y recursivamente saturada.

2.10 Observaciones

De 2.9 (2) se desprende que toda teoría consistente de tipo de semejanza recursivo posee un modelo numerable recursivamente saturado. Pero puede tener varios modelos numerables y recursivamente saturados no isomorfos. No hay versión recursiva del teorema de unicidad 2.6 (4) (aunque sí hay un cierto teorema de pseudo-unicidad, que aquí no usaremos, para modelos numerables recursivamente saturados) .

La aritmética de Peano no posee ningún modelo numerable y ω-saturado, pero sí posee modelos numerables recursivamente saturados. Así pues, los conceptos de ω-saturación y saturación recursiva no coinciden para modelos numerables.

2.11 Definiciones

Sea κ un cardinal infinito.

(1) Un modelo $\mathfrak{A}$ es κ-saturado si para cada subconjunto X de A de cardinal menor que κ , todo conjunto $\Sigma(x)$ de fórmulas del tipo de semejanza de $\langle \mathfrak{A}\ a \rangle_{a\in X}$ consistente con $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{A}\ a \rangle_{a\in X})$ es realizado en $\langle \mathfrak{A}\ a \rangle_{a\in X}$.

(2) Un modelo $\mathfrak{A}$ es κ-homogéneo si para cada ordinal $\xi < \kappa$ y cualesquiera secuencias $\langle a_\eta \rangle_{\eta<\xi}$, $\langle b_\eta \rangle_{\eta<\xi}$ de elementos de A tales que

$$\langle \mathfrak{A}\ a_\eta \rangle_{\eta<\xi} \equiv \langle \mathfrak{A}\ b_\eta \rangle_{\eta<\xi}$$

y cualquier $a \in A$, hay un $b \in A$ tal que

$$\langle \mathfrak{A}\ a_\eta a \rangle_{\eta<\xi} \equiv \langle \mathfrak{A}\ b_\eta b \rangle_{\eta<\xi}$$

(3) Un modelo $\mathfrak{A}$ es κ-universal si todo modelo $\mathfrak{B}$ de cardinal menor que κ tal que $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ verifica: $\mathfrak{B} \precsim \mathfrak{A}$.

2.12 <u>Lemas</u>

(1) Si el tipo de semejanza de $\mathfrak{A}$ es de cardinal $\leq \kappa$, $\mathfrak{A}$ es κ-saturado si y sólo si $\mathfrak{A}$ es κ-homogéneo y κ^+-universal.

(2) Si $\mathfrak{A}$ es un modelo infinito de cardinal κ y $\mathfrak{A}$ es μ-saturado, entonces $\kappa \geqslant \mu$. En particular, $\mathfrak{A}$ no puede ser κ^+-saturado .

(3) Si $\mathfrak{A}$ es un modelo infinito de cardinal $\leq 2^\kappa$ y el tipo de semejanza de $\mathfrak{A}$ es de cardinal $\leq \kappa$, entonces $\mathfrak{A}$ posee una extensión elemental de cardinal 2^κ que es κ^+-saturada.

2.13 <u>Observación</u>

Como se indica en 2.12 (2), un modelo de cardinal κ es a lo sumo κ-saturado. Esto justifica la siguiente definición:

2.14 <u>Definición:</u> Saturación

Un modelo $\mathfrak{A}$ de cardinal κ es saturado si es κ-saturado.

2.15 <u>Ejemplos</u>

(1) Si T es una teoría κ-categórica, el único modelo de T (salvo isomorfía) de cardinal κ es saturado. En particular, el modelo de cardinal ω_1 de la teoría completa de $\langle \omega, 0, S \rangle$ es saturado.

(2) Si T es la teoría de las relaciones de equivalencia con infinitas clases de equivalencia y todas infinitas, el único modelo saturado de T de cardinal ω_1 (salvo isomorfía) es el que cuenta con ω_1 clases de equivalencia y todas de cardinal ω_1 . Sin embargo, T posee ω modelos no isomorfos de cardinal ω_1 .

(3) No hay ningún modelo de la teoría del orden total que sea saturado y tenga cardinal singular. En particular, la teoría del

orden denso sin extremos no posee modelos saturados en los cardinales $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega_1}$, $\beth_\omega$ y $\beth_{\omega_1}$.

2.16 Observaciones

Los modelos saturados cumplen un teorema de unicidad análogo a 2.6 (4) . Sin embargo, la existencia de modelos saturados es más problemática que en el caso numerable. En 2.15 (3) se menciona el caso de una teoría que no posee modelos saturados de cardinal singular. Pero incluso la existencia de modelos saturados de cardinal regular presenta dificultades, y no siempre se puede establecer. Para ciertas teorías, como la teoría del orden denso sin extremos, es precisa la hipótesis generalizada del continuo para garantizar la existencia de modelos saturados en todo cardinal regular. De hecho, la existencia de un modelo saturado de cardinal ω_1 de la teoría del orden denso sin extremos es equivalente (en ZFC) a la hipótesis del continuo.

2.17 Lemas

(1) Cualesquiera dos modelos saturados del mismo cardinal y elementalmente equivalentes son isomorfos.

(2) Bajo la hipótesis generalizada del continuo:
Todo conjunto de a lo sumo κ sentencias que tenga modelos infinitos tiene un modelo saturado en cada cardinal regular mayor que κ .

2.18 Observaciones

Los modelos saturados tienen múltiples aplicaciones en teoría de modelos. A pesar de que en ocasiones su existencia dependa de axiomas conjuntistas adicionales, los resultados que se obtienen aceptando su existencia son, a menudo, independientes de tales axiomas y se puede garantizar que son obtenibles también, posiblemente con más trabajo, sin ellos.

Un sustituto de los modelos saturados, que no presenta tantos problemas de existencia, son los modelos especiales, que definimos a continuación:

2.19 <u>Definición</u> : Modelos especiales.

Supongamos que $\mathfrak{A}$ es un modelo de cardinal κ y que I es el conjunto de los cardinales menores que κ. Entonces :

$\mathfrak{A}$ es especial si y sólo si hay una cadena de modelos $\langle \mathfrak{A}_\mu \rangle_{\mu \in I}$ tal que

(i) Si $\mu, \lambda \in I$ y $\mu < \lambda$, entonces $\mathfrak{A}_\mu \prec \mathfrak{A}_\lambda$.

(ii) $\mathfrak{A} = \bigcup_{\mu \in I} \mathfrak{A}_\mu$

(iii) Para cada $\mu \in I$, $\mathfrak{A}_\mu$ es μ^+-saturado.

2.20 <u>Lemas</u>

(1) Si $\mathfrak{A}$ es un modelo de cardinal regular κ,

$\mathfrak{A}$ es saturado si y sólo si $\mathfrak{A}$ es especial

(2) Cualesquiera dos modelos especiales del mismo cardinal y elementalmente equivalentes son isomorfos.

(3) Si κ es un cardinal tal que $\kappa = \sup\{2^\mu : \mu < \kappa\}$ y $\mathfrak{A}$ es un modelo infinito de cardinal $\leq \kappa$ cuyo tipo de semejanza es de cardinal $< \kappa$, entonces $\mathfrak{A}$ posee una extensión elemental especial de cardinal κ.

2.21 <u>Observación</u>

La condición $\kappa = \sup\{2^\mu : \mu < \kappa\}$ es satisfecha por cardinales no regulares. Así, por ejemplo, $\beth_\omega$ y $\beth_{\omega_1}$ la cumplen . Por tanto, la teoría del orden denso sin extremos sí tiene modelos especiales de cardinal $\beth_\omega$ y $\beth_{\omega_1}$.

3. MODELOS COMPACTOS NUMERABLES

En este apartado obtendremos una caracterización de los modelos numerables compactos: son los modelos numerables saturados.

3.1 Teorema

Todo modelo de tipo de semejanza numerable ω-compacto es ω-saturado.

Prueba:

Sea $\mathfrak{M}$ un modelo de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}}$ numerable y supongamos que $\mathfrak{M}$ es ω-compacto. Sean $a_1,\ldots,a_n \in M$ y $\Sigma(x)$ un conjunto de sentencias del tipo de semejanza de $\langle \mathfrak{M}\, a_1,\ldots,a_n\rangle$ que es consistente con $Th(\langle \mathfrak{M}\, a_1,\ldots,a_n\rangle)$. Sean $c_1,\ldots,c_n$ las constantes que en $\langle \mathfrak{M}\, a_1,\ldots,a_n\rangle$ denotan a $a_1,\ldots,a_n$ (estas constantes no son de $\tau_{\mathfrak{M}}$) . Hay un conjunto $\Phi(x_1,\ldots,x_n,x)$ de fórmulas del tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}}$ tal que

$$\Sigma(x) = \Phi(c_1,\ldots,c_n,x) \quad .$$

Sea $\{\varphi_m(x_1,\ldots,x_n,x) : m\in\omega\}$ una enumeración de $\Phi(x_1,\ldots,x_n,x)$ y definamos para cada $m\in\omega$:

$$\psi_m(x_1,\ldots,x_n,x) = \varphi_0(x_1,\ldots,x_n,x) \wedge \ldots \wedge \varphi_m(x_1,\ldots,x_n,x) \ .$$

Sea f un signo funcional n-ádico que no aparece en $\tau_{\mathfrak{M}}$ y definamos para cada $m\in\omega$,

$$\Theta_m = \forall x_1\ldots x_n\,(\,\exists x\,\psi_m(x_1,\ldots,x_n,x) \longrightarrow \psi_m(x_1,\ldots,x_n,fx_1\ldots x_n\,)).$$

Sea, finalmente,

$$\Delta = \{\Theta_m : m\in\omega\}\cup\{\forall x\ Ux\} \quad .$$

Veamos en primer lugar que

(1) Δ es finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible.

Sea Δ_0 un subconjunto finito de Δ . Hay entonces un $m\in\omega$ tal que

$$\Delta_0 \subseteq \{\Theta_0,\ldots,\Theta_m\} \cup \{\forall x\ Ux\} \quad .$$

Definimos un modelo $\mathfrak{M}^*$ de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{U, f\}$ por:

(i) $\mathfrak{M}^* \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$

(ii) $U^{\mathfrak{M}^*} = M$

(iii) Para cualesquiera $b_1, \dots, b_n \in M$,

a) Si $\mathfrak{M} \models \exists x \psi_0(x_1, \dots, x_n, x) [b_1, \dots, b_n]$, $f^{\mathfrak{M}^*}(\langle b_1, \dots, b_n \rangle)$ es arbitrario.

b) Si j es el mayor índice $\leq m$ tal que

$$\mathfrak{M} \models \exists x \psi_j(x_1, \dots, x_n, x) \ [b_1, \dots, b_n] ,$$

podemos escoger un $b \in M$ tal que

$$\mathfrak{M} \models \psi_j(x_1, \dots, x_n, x) [b_1, \dots, b_n, b]$$

en cuyo caso para cada $i \leq j$

$$\mathfrak{M} \models \psi_i(x_1, \dots, x_n, x) [b_1, \dots, b_n, b] ,$$

y definimos

$$f^{\mathfrak{M}^*}(\langle b_1, \dots, b_n \rangle) = b .$$

De este modo $\mathfrak{M}^* \models \theta_j$ para cada $j \leq m$. Como, además, $U^{\mathfrak{M}^*} = M$, $\mathfrak{M}^*$ es un $\mathfrak{M}$-modelo de Δ_0. Esto justifica el punto (1). Como, por hipótesis, $\mathfrak{M}$ es ω-compacto y Δ es numerable, tenemos que

(2) Δ es $\mathfrak{M}$-satisfacible.

Hay, entonces, un $\mathfrak{M}$-modelo $\mathfrak{N}$ de Δ. Resulta así que

$$(\mathfrak{N} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}}) | U^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}} \text{ y } (\mathfrak{N} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}}) | U^{\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{M} .$$

Podemos suponer, pues, que

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}} .$$

Por hipótesis $\Sigma(x)$ es consistente con $Th(\langle \mathfrak{M}\, a_1, \dots, a_m \rangle)$ y, por ello, para cada $m \in \omega$,

$$\mathfrak{M} \models \exists x \psi_m(x_1,\dots,x_n,x)\,[a_1,\dots,a_n] \quad .$$

Pero entonces, para cada $m \in \omega$,

$$\mathfrak{M} \models \psi_m(x_1,\dots,x_n,x)\ \ [a_1,\dots,a_n,\ f^{\delta}(\langle a_1,\dots,a_n\rangle)]$$

y, por tanto,

$$\mathfrak{M} \models \Phi(x_1,\dots,x_n,x)\ \ [a_1,\dots,a_n, f^{\delta}(\langle a_1,\dots,a_n\rangle)] \ .$$

Pero esto significa que

$$\langle \mathfrak{M}\ a_1,\dots,a_n\rangle \models \Sigma(x)\ \ [f^{\delta}(\langle a_1,\dots,a_n\rangle)]$$

y , en consecuencia, que $\Sigma(x)$ es realizado en $\langle \mathfrak{M}\ a_1,\dots,a_n\rangle$. Concluimos, entonces, que $\mathfrak{M}$ es ω-saturado.

3.2 Corolario

Todo modelo numerable y compacto de tipo de semejanza numerable es saturado.

Prueba:

Se sigue del teorema 3.1 y de las correspondientes definiciones.

3.3 Teorema

Todo modelo numerable y de tipo de semejanza numerable ω-saturado es ω-compacto.

Prueba:

Sea T un conjunto numerable de sentencias finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible. Por el lema 1.9 podemos suponer que $T \models \forall x\, Ux$ a efectos de mostrar que T es $\mathfrak{M}$-satisfacible. Definamos,

$$\Delta = \mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}\ a\rangle_{a \in M}) \ .$$

Para cada $a \in M$, sea c_a la constante que en el modelo $\langle \mathfrak{M}\ a\rangle_{a \in M}$ se interpreta como a (estas constantes no son de $\tau_{\mathfrak{M}}$).

Veamos en primer lugar que :

(1) $T \cup \Delta$ es finitamente satisfacible .

Sea Δ_0 un subconjunto finito de $T \cup \Delta$. Hay entonces fórmulas $\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots, \varphi_m(x_1,\dots,x_n)$ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}}$, elementos $a_1,\dots,a_n$ de M y un subconjunto finito T_0 de T tales que

$$\Delta_0 \subseteq \{\varphi_1(c_{a_1},\dots,c_{a_n}),\dots, \varphi_m(c_{a_1},\dots,c_{a_n})\} \cup T_0$$

$$\text{y} \quad \langle \mathfrak{M} a \rangle_{a \in M} \models \varphi_1(c_{a_1},\dots,c_{a_n}) \wedge \dots \wedge \varphi_m(c_{a_1},\dots,c_{a_n}) \ .$$

Como T es finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible y $T \models \forall x\, Ux$, $T_0 \cup \{\forall x\, Ux\}$ tiene un $\mathfrak{M}$-modelo $\mathfrak{A}$. Dado que

$$\mathfrak{M} \models \exists x_1 \dots x_n (\ \varphi_1(x_1,\dots,x_n) \wedge \dots \wedge \varphi_m(x_1,\dots,x_n)\ )$$

y

$$\mathfrak{A} \restriction \tau_{\mathfrak{M}} = (\ \mathfrak{A} \restriction \tau_{\mathfrak{M}}) | U^{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{M}$$

resulta

$$\mathfrak{A} \models \exists x_1 \dots x_n (\ \varphi_1(x_1,\dots,x_n) \wedge \dots \wedge \varphi_m(x_1,\dots,x_n)\ ) \ .$$

Hay así $b_1,\dots,b_n \in A$ tales que

$$\mathfrak{A} \models \varphi_1(x_1,\dots,x_n) \wedge \dots \wedge \varphi_m(x_1,\dots,x_n)\ [\, b_1,\dots,b_n \,] \ .$$

Por tanto, $\langle \mathfrak{A}\ b_1,\dots,b_n \rangle$ es un modelo de Δ_0 . Queda así establecido el punto (1) . Por compacidad de primer orden tenemos entonces que

(2) $T \cup \Delta$ tiene un modelo.

Como $T \cup \Delta$ es numerable, por el teorema de Löwenheim-Skolem , $T \cup \Delta$ tiene un modelo numerable $\mathfrak{B}$. Dado que

$$\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}\, a \rangle_{a \in M})$$

resulta que

$$\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{B} \restriction \tau_{\mathfrak{M}} \ .$$

En 2.6 se puntualizó que todo modelo numerable de tipo de semejanza numerable posee una extensión elemental numerable y ω-homogénea. Sea $\mathfrak{C}$ una tal extensión de $\mathfrak{B} \restriction \tau$ (donde τ es el tipo de semejanza de T, que, naturalmente, incluye a $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{U\}$) .

Resulta que $\mathfrak{C} \models T$ y que $(\mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}})|U^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}}$, pues $\mathfrak{C} \models \forall x\, Ux$. Como $\mathfrak{C}$ es ω-homogéneo, también

(3) $\mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}}$ es ω-homogéneo.

Pero además

(4) $\mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}}$ es ω_1-universal .

En efecto, si $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}}$ y $\mathfrak{D}$ es numerable tenemos que $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{B}\restriction\tau_{\mathfrak{M}}$ y así $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{M}$. Al ser $\mathfrak{M}$ ω-saturado y numerable, $\mathfrak{M}$ es ω_1-universal . Por ello $\mathfrak{D} \precsim \mathfrak{M}$. Resulta así que

$$\mathfrak{D} \precsim \mathfrak{M} \precsim \mathfrak{B}\restriction\tau_{\mathfrak{M}} \precsim \mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}}$$

y, por tanto, $\mathfrak{D} \precsim \mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}}$.

Esto justifica el punto (4) . Dado que, entonces, $\mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}}$ es ω-homogéneo y ω_1-universal , tenemos

(5) $\mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}}$ es ω-saturado .

Por 2.6 (4) concluimos entonces que

(6) $\mathfrak{C}\restriction\tau_{\mathfrak{M}} \stackrel{u}{=} \mathfrak{M}$.

Por tanto, $\mathfrak{C}$ es un $\mathfrak{M}$-modelo de T . Esto concluye la prueba del teorema 3.3.

3.4 <u>Corolario</u>

Si $\mathfrak{M}$ es un modelo numerable de tipo de semejanza numerable,

$\mathfrak{M}$ es saturado si y sólo si $\mathfrak{M}$ es compacto .

Prueba:

Por 3.2 y 3.3.

3.5 <u>Corolario</u>

Si $\mathfrak{M}$ es un modelo numerable de tipo de semejanza numerable,

$\mathfrak{M}$ es ω-saturado si y sólo si $\mathfrak{M}$ es ω-compacto .

Prueba:

Por 3.2 y 3.3 .

3.6 Observación

Formulamos de modo independiente los corolarios 3.4 y 3.5 debido a que expresan dos cuestiones relacionadas pero distintas. El corolario 3.4 es una caracterización de modelo compacto para modelos numerables. Veremos en el apartado 5 de este capítulo que esta caracterización ya no se mantiene para modelos no numerables. El corolario 3.5 es una caracterización de modelo ω-compacto para modelos numerables. Podemos ver ya que no es generalizable tampoco a modelos no numerables.

3.7 Contraejemplo

Hay un modelo no numerable y de tipo de semejanza finito que es ω-saturado pero no es ω-compacto.

Prueba:

Se trata del modelo ordenado $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ de los números reales. Como cualquier otro modelo de la teoría del orden denso sin extremos, es ω-saturado. Sin embargo, como se mostrará en el próximo capítulo, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ no es ω-compacto.

4. MODELOS RECURSIVAMENTE COMPACTOS

Obtendremos ahora una caracterización de los modelos numerables recursivamente compactos : son los modelos numerables recursivamente saturados. De ello se seguirá entonces la existencia de modelos numerables recursivamente compactos pero no ω-compactos.

4.1 Teorema

Todo modelo recursivamente compacto de tipo de semejanza recursivo es recursivamente saturado.

Prueba:

La prueba es paralela a la del teorema 3.1 . Sea $\mathfrak{M}$ un modelo de tipo de semejanza recursivo $\tau_{\mathfrak{M}}$ y supongamos que es recursivamente compacto. Sean $a_1,\dots,a_n \in M$ y $\Sigma(x)$ un conjunto recursivo de **fórmulas** del **tipo de semejanza** de $\langle \mathfrak{M}\, a_1,\dots,a_n \rangle$ que es consistente con $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}\, a_1,\dots,a_n \rangle)$. Sean $c_1,\dots,c_n$ las constantes que en $\langle \mathfrak{M}\, a_1,\dots,a_n \rangle$ denotan a $a_1,\dots,a_n$ (y no son de $\tau_{\mathfrak{M}}$) . Hay un conjunto recursivo $\Phi(x_1,\dots,x_n,x)$ de fórmulas de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}}$ tal que

$$\Sigma(x) = \Phi(c_1,\dots,c_n,x) .$$

Sea $\{\varphi_m(x_1,\dots,x_n,x) : m\in\omega\}$ una enumeración recursiva de $\Phi(x_1,\dots x_n,x)$ y definamos para cada $m\in\omega$,

$$\psi_m(x_1,\dots,x_n,x) = \varphi_0(x_1,\dots,x_n,x)\wedge\dots\wedge\varphi_m(x_1,\dots,x_n,x) .$$

Resulta entonces que $\{\psi_m(x_1,\dots,x_n,x) : m\in\omega\}$ es un conjunto recursivo de fórmulas. Sea f un signo funcional n-ádico que no aparece en $\tau_{\mathfrak{M}}$ y sea, para cada $m\in\omega$,

$$\Theta_m = \forall x_1\dots x_n\,(\exists x\,\psi_m(x_1,\dots,x_n,x) \longrightarrow \psi_m(x_1,\dots,x_n,fx_1\dots x_n))$$

y $\Delta = \{\Theta_m : m\in\omega\}$.

Δ es,entonces, también recursivo. Como en el teorema 3.1, se muestra ahora que Δ es finitamente **$\mathfrak{M}$-satisfacible.**

Como $\mathfrak{M}$ es recursivamente compacto y Δ es recursivo, se obtiene que Δ tiene un $\mathfrak{M}$-modelo $\mathfrak{N}$. Como en 3.1, se puede admitir que $\mathfrak{N} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$. Entonces $f^{\mathfrak{N}}(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle)$ realiza $\Sigma(x)$ en $\langle \mathfrak{M}\ a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Exponemos a continuación un lema que contribuirá a abreviar las pruebas posteriores.

4.2 <u>Lema</u>

Supongamos que:

(1) $\mathfrak{M}$ es un modelo de cardinal κ .

(2) $\{a_\xi : \xi < \kappa\}$ es una enumeración sin repeticiones de M .

(3) T es un conjunto de sentencias de un tipo de semejanza τ (que incluye a $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{U\}$) tal que $|\tau| \leq \kappa$, y $T \models \forall x\, Ux$.

(4) $C = \{c_\xi : \xi < \kappa\}$ es una colección de constantes distintas que no están en τ .

(5) $\{\sigma_\xi : \xi < \kappa\}$ es una enumeración de las sentencias del tipo de semejanza $\tau \cup C$.

y supongamos que obtenemos una sucesión $\langle b_\xi \rangle_{\xi < \kappa}$ de elementos de M y una cadena $\langle T_\xi \rangle_{\xi < \kappa}$ de conjuntos de sentencias (se entiende que $T_\eta \subseteq T_\xi$ para $\eta < \xi < \kappa$) con las siguientes propiedades:

(6) $T_0 = T$.

(7) Para cada $\xi < \kappa$, T_ξ es un conjunto de sentencias de tipo de semejanza $\tau \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ y para cada sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \models \sigma$,

$$\langle \mathfrak{M}\ b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi}$$

donde se entiende que en $\langle \mathfrak{M}\ b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi}$ cada constante c_η denota a b_η .

(8) Para cada $\xi < \kappa$, $a_\xi = b_{2\cdot\xi}$.

(9) Para cada $\xi < \kappa$, $\sigma_\xi \in T_{\xi+1}$ o bien $\neg\sigma_\xi \in T_{\xi+1}$.

(10) Para cada $\xi < \kappa$, si $\sigma_\xi \in T_{\xi+1}$ y $\sigma_\xi = \exists x\,\varphi(x)$, hay una constante $c \in C$ tal que $\varphi(c) \in T_{\xi+1}$.

Bajo estas hipótesis, T tiene un $\mathfrak{M}$-modelo.

Prueba:

Sea $T_\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} T_\xi$. T_κ es un conjunto de sentencias de tipo $\tau \cup C$. Por (5) y (9) T_κ es una teoría completa. Además, por (10), T_κ tiene ejemplificaciones en C. Por (7) obtenemos que

(11) Para cada sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup C$ tal que $\sigma \in T_\kappa$,

$$\langle \mathfrak{M}\ b_\eta \rangle_{\eta<\kappa} \models \sigma$$

entendiendo que en $\langle \mathfrak{M}\ b_\eta \rangle_{\eta<\kappa}$ cada constante c_η denota a b_η.

De (11) se sigue, en particular, que T_κ es consistente. Por tanto, T_κ tiene un modelo $\mathfrak{N}$ en el que $A = \{c_\eta^{\mathfrak{N}} : \eta < \kappa\}$. Como $T_0 = T$, $\mathfrak{N} \upharpoonright \tau$ es un modelo de T. Dado que $T \models \forall x\, Ux$, $U^{\mathfrak{N}} = A$. Para mostrar que $\mathfrak{N}$ es un $\mathfrak{M}$-modelo basta con mostrar que

$$\mathfrak{N} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}} \cong \mathfrak{M}\ .$$

Definimos una función $F : M \longrightarrow A$ por

$F(a_\eta) = c_{2\cdot\eta}^{\mathfrak{N}}$ para cada $\eta < \kappa$.

Veremos a continuación que F es un isomorfismo entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}}$. Con esto quedará justificado el lema.

(i) F es inyectiva.

Supongamos que $F(a_\eta) = F(a_\xi)$, esto es, $c_{2\cdot\eta}^{\mathfrak{N}} = c_{2\cdot\xi}^{\mathfrak{N}}$. En ese caso $\mathfrak{N} \models c_{2\cdot\eta} \approx c_{2\cdot\xi}$ y, por completud de T_κ, $c_{2\cdot\eta} \approx c_{2\cdot\xi} \in T_\kappa$. Pero esta sentencia es de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup C$ y así, por (11),

$$\langle \mathfrak{M}\ b_\eta \rangle_{\eta<\kappa} \models c_{2\cdot\eta} \approx c_{2\cdot\xi}.$$

Entonces $b_{2\cdot\eta} = b_{2\cdot\xi}$. Pero, por (8), $a_\eta = b_{2\cdot\eta}$ y $a_\xi = b_{2\cdot\xi}$

de manera que $a_\eta = a_\xi$.

(ii) F es una biyección entre M y A .

Basta con establecer que todo elemento de A es valor de F . Sea $a \in A$. Hay entonces un $\xi < \kappa$ tal que $a = c_\xi^{\mathfrak{N}}$. Como $b_\xi \in M$, hay un $\eta < \kappa$ tal que $b_\xi = a_\eta$. Pero , por (8), $a_\eta = b_{2\cdot\eta}$. Entonces $b_\xi = b_{2\cdot\eta}$ y así

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta<\kappa} \models c_\xi \simeq c_{2\cdot\eta} .$$

Por completud de T_κ y por (11) resulta que $c_\xi \simeq c_{2\cdot\eta} \in T_\kappa$. Por tanto $\mathfrak{N} \models c_\xi \simeq c_{2\cdot\eta}$ y , en consecuencia, $c_{2\cdot\eta}^{\mathfrak{N}} = c_\xi^{\mathfrak{N}}$. En ese caso $a = F(a_\eta)$.

(iii) F es un isomorfismo entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N} \upharpoonright \tau_{\mathfrak{M}}$.

Sea R un predicado n-ádico de $\tau_{\mathfrak{M}}$ y $\xi_1, \dots, \xi_n$ ordinales menores que κ . Resulta entonces que

$$\begin{aligned}
\langle a_{\xi_1}, \dots, a_{\xi_n} \rangle \in R^{\mathfrak{M}} &\text{ si y sólo si } \langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta<\kappa} \models Rc_{2\cdot\xi_1} \dots c_{2\cdot\xi_n} \\
&\text{ si y sólo si } Rc_{2\cdot\xi_1} \dots c_{2\cdot\xi_n} \in T_\kappa \\
&\text{ si y sólo si } \mathfrak{N} \models Rc_{2\cdot\xi_1} \dots c_{2\cdot\xi_n} \\
&\text{ si y sólo si } \langle c_{2\cdot\xi_1}^{\mathfrak{N}}, \dots, c_{2\cdot\xi_n}^{\mathfrak{N}} \rangle \in R^{\mathfrak{N}} \\
&\text{ si y sólo si } \langle F(a_{\xi_1}), \dots, F(a_{\xi_n}) \rangle \in R^{\mathfrak{N}} .
\end{aligned}$$

Análogamente, si f es un signo funcional n-ádico de $\tau_{\mathfrak{M}}$ y $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ son ordinales menores que κ ,

$$\begin{aligned}
f^{\mathfrak{M}}(\langle a_{\xi_1}, \dots, a_{\xi_n} \rangle) = a_{\xi_{n+1}} &\text{ si y sólo si } \langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta<\kappa} \models fc_{2\cdot\xi_1} \dots c_{2\cdot\xi_n} \simeq c_{2\cdot\xi_{n+1}} \\
&\text{ si y sólo si } fc_{2\cdot\xi_1} \dots c_{2\cdot\xi_n} \simeq c_{2\cdot\xi_{n+1}} \in T_\kappa \\
&\text{ si y sólo si } \mathfrak{N} \models fc_{2\cdot\xi_1} \dots c_{2\cdot\xi_n} \simeq c_{2\cdot\xi_{n+1}} \\
&\text{ si y sólo si } f^{\mathfrak{N}}(\langle c_{2\cdot\xi_1}^{\mathfrak{N}}, \dots, c_{2\cdot\xi_n}^{\mathfrak{N}} \rangle) = c_{2\cdot\xi_{n+1}}^{\mathfrak{N}} \\
&\text{ si y sólo si } f^{\mathfrak{N}}(\langle F(a_{\xi_1}), \dots, F(a_{\xi_n}) \rangle) = F(a_{\xi_{n+1}}) .
\end{aligned}$$

Finalmente, si c es una constante de tipo $\tau_{\mathfrak{M}}$ y ξ es un ordinal menor que κ ,

$$
\begin{aligned}
c^{\mathfrak{M}} = a_\xi \quad & \text{si y sólo si} \quad \langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta<\kappa} \models c \simeq c_{2\cdot\xi} \\
& \text{si y sólo si} \quad c \simeq c_{2\cdot\xi} \in T_\kappa \\
& \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{N} \models c \simeq c_{2\cdot\xi} \\
& \text{si y sólo si} \quad c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{N}}_{2\cdot\xi} \\
& \text{si y sólo si} \quad c^{\mathfrak{N}} = F(a_\xi) \quad .
\end{aligned}
$$

Así queda establecido (iii) y, por tanto, el lema .

4.3 Teorema

Todo modelo numerable y recursivamente saturado de tipo de semejanza recursivo es recursivamente compacto.

Prueba:

Sea $\mathfrak{M}$ un modelo numerable y recursivamente saturado de tipo de semejanza recursivo $\tau_{\mathfrak{M}}$ y sea T un conjunto recursivo de sentencias de tipo de semejanza recursivo τ . Supongamos que T es finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible. Por el lema 1.10 podemos suponer que $T \models \forall x\, Ux$. Sea $C = \{c_n : n\in\omega\}$ un conjunto recursivo de constantes distintas que no aparecen en τ , $\{a_n : n\in\omega\}$ una enumeración sin repeticiones de M y $\{\sigma_n : n\in\omega\}$ una enumeración recursiva de las sentencias del tipo de semejanza $\tau \cup C$ con la siguiente propiedad: para cada $n\in\omega$, σ_n es una sentencia de tipo de semejanza $\tau \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$.

Para concluir que T es $\mathfrak{M}$-satisfacible basta, de acuerdo con el lema 4.2 , con obtener una sucesión $\langle b_n \rangle_{n\in\omega}$ de elementos de M y una cadena de conjuntos de sentencias $\langle T_n \rangle_{n\in\omega}$ que verifiquen las siguientes condiciones:

(1) $T_0 = T$.

(2) Para cada $n\in\omega$, T_n es un conjunto recursivo de sentencias del tipo de semejanza $\tau \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$ y para cada sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$ tal que $T_n \models \sigma$,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n}\rangle \models \sigma \quad .$$

(3) Para cada $n\in\omega$, $a_n = b_{2n}$.

(4) Para cada $n\in\omega$, $\sigma_n \in T_{n+1}$ o bien $\neg\sigma_n \in T_{n+1}$.

(5) Para cada $n\in\omega$, si $\sigma_n \in T_{n+1}$ y $\sigma_n = \exists x\ \varphi(x)$, hay una constante $c\in C$ tal que $\varphi(c) \in T_{n+1}$.

Definimos por recursión las sucesiones $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$ y $\langle T_n\rangle_{n\in\omega}$.

Comenzamos con $T_0 = T$ y $b_0 = a_0$. T es , por hipótesis, recursivo. Veamos que se verifica la condición (2). Sea σ una sentencia del tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}}\cup\{c_0\}$ tal que $T\models\sigma$. Hay entonces una fórmula $\varphi(x)$ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}}$ tal que $\sigma = \varphi(c_0)$. Como c_0 no aparece en T, $T\models \forall x\,\varphi(x)$. Por compacidad de primer orden hay un subconjunto finito Δ de T tal que

$$\Delta \models \forall x\,\varphi(x) \quad .$$

Como T es finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible y $T\models \forall x\ Ux$, hay un modelo $\mathfrak{A}$ de Δ tal que $\mathfrak{A}\restriction\tau_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$. Así

$$\mathfrak{M} \models \forall x\,\varphi(x)$$

y, por tanto,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0\rangle \models \sigma \quad .$$

La obtención de T_{n+1} y $\langle b_0,\dots,b_{2n+2}\rangle$ a partir de T_n y $\langle b_0,\dots,b_{2n}\rangle$ es como se indica a continuación:

<u>Caso 1º</u> σ_n no es de la forma $\exists x\ \varphi(x)$ y para cada sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}}\cup\{c_0,\dots,c_{2n}\}$ tal que $T_n\cup\{\sigma_n\}\models\sigma$ ocurre:

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n}\rangle \models \sigma \quad .$$

Definimos $T_{n+1} = T_n\cup\{\sigma_n\}$, b_{2n+1} es un elemento arbitrario de M y $b_{2n+2} = a_{n+1}$. Como T_n es recursivo, también lo es T_{n+1} . Para garantizar que se cumple la condición (2), consideremos una sentencia σ del tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}}\cup\{c_0,\dots,c_{2n+2}\}$

tal que $T_{n+1} \models \sigma$. Hay, en ese caso, una fórmula $\varphi(x,y)$ del tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$ tal que $\sigma = \varphi(c_{2n+1},c_{2n+2})$. Como c_{2n+1},c_{2n+2} no aparecen en T_n ni en σ_n ,

$$T_{n+1} \models \forall xy\, \varphi(x,y) .$$

De acuerdo con la hipótesis de este caso,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n} \rangle \models \forall xy\, \varphi(x,y)$$

y, por tanto,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n+2} \rangle \models \sigma .$$

Caso 2º $\sigma_n = \exists x \varphi(x)$ y para cada sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$ tal que $T_n \cup \{\sigma_n\} \models \sigma$,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n} \rangle \models \sigma .$$

Sea $\Sigma(x)$ el conjunto de las fórmulas $\psi(x)$ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$ tales que

$$T_n \cup \{\sigma_n, \varphi(x)\} \models \psi(x) .$$

Como $T_n \cup \{\sigma_n, \varphi(x)\}$ es recursivo , $\Sigma(x)$ es recursivamente enumerable. Sea $\{\psi_m(x) : m \in \omega\}$ una enumeración recursiva de $\Sigma(x)$ y definamos para cada $m \in \omega$,

$$\theta_m(x) = \psi_0(x) \wedge \dots \wedge \psi_m(x) .$$

Resulta que $\{\theta_m(x) : m \in \omega\}$ es recursivo, y para cada fórmula $\alpha(x)$ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$,

$$\{\theta_m(x) : m \in \omega\} \models \alpha(x) \text{ si y sólo si } \Sigma(x) \models \alpha(x) .$$

Veamos que $\Sigma(x)$ es consistente con la teoría completa de $\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n} \rangle$. Si $\alpha_1(x),\dots,\alpha_m(x) \in \Sigma(x)$ tenemos

$$T_n \cup \{\sigma_n\} \models \exists x(\alpha_1(x) \wedge \dots \wedge \alpha_m(x))$$

y así

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n} \rangle \models \exists x(\alpha_1(x) \wedge \dots \wedge \alpha_m(x)) .$$

Hay pues un $a \in M$ tal que

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n}\rangle \models (\alpha_1(x) \wedge \dots \wedge \alpha_m(x))\ [a].$$

Por compacidad de primer orden, concluimos que $\Sigma(x)$ es consistente con $Th(\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n}\rangle)$. En ese caso, también $\{\Theta_m(x): m\in\omega\}$ es consistente con $Th(\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n}\rangle)$. Como $\mathfrak{M}$ es recursivamente saturado y $\{\Theta_m(x): m\in\omega\}$ es recursivo, hay un $b \in M$ tal que

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n}\rangle \models \{\Theta_m(x) : m\in\omega\}\ [b].$$

Así, también

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n}\rangle \models \Sigma(x)\ [b] .$$

Definimos entonces $b_{2n+1} = b$, $b_{2n+2} = a_{n+1}$ y $T_{n+1} = T_n \cup \{\sigma_n, \varphi(c_{2n+1})\}$. Veamos que se cumple la condición (2). Sea σ una sentencia de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\dots,c_{2n+2}\}$ tal que $T_{n+1} \models \sigma$. Hay, en ese caso, una fórmula $\alpha(x,y)$ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$ tal que $\sigma = \alpha(c_{2n+1},c_{2n+2})$. Entonces

$$T_n \cup \{\sigma_n, \varphi(x)\} \models \forall y\, \alpha(x,y)$$

y, por tanto,

$$\forall y\, \alpha(x,y) \in \Sigma(x) .$$

De acuerdo con lo ya establecido,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n}\rangle \models \forall y\, \alpha(x,y)\ [b]$$

y así

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n+2}\rangle \models \sigma .$$

<u>Caso 3º</u> Hay una sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$ tal que $T_n \cup \{\sigma_n\} \models \sigma$ pero

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\dots,b_{2n}\rangle \not\models \sigma .$$

En ese caso, para cada sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\dots,c_{2n}\}$ tal que $T_n \cup \{\neg\sigma_n\} \models \sigma$ ocurre

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\ldots,b_{2n}\rangle \models \sigma \quad .$$

En efecto, si esto no es así hay sentencias φ_1, φ_2 de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_0,\ldots,c_{2n}\}$ tales que

$T_n \cup \{\sigma_n\} \models \varphi_1$ pero $\langle \mathfrak{M}\, b_0,\ldots,b_{2n}\rangle \not\models \varphi_1$

$T_n \cup \{\neg\sigma_n\} \models \varphi_2$ pero $\langle \mathfrak{M}\, b_0,\ldots,b_{2n}\rangle \not\models \varphi_2$.

Entonces $T_n \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ y , por hipótesis inductiva,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_0,\ldots,b_{2n}\rangle \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) \quad ,$$

en contradicción con lo anterior.

Por tanto, definimos en este caso $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\sigma_n\}$, b_{2n+1} es un elemento arbitrario de M y $b_{2n+2} = a_{n+1}$ .Con el mismo argumento que en el primer caso (cambiando sólo σ_n por $\neg\sigma_n$) se muestra que también se verifica la condición (2) .

Esto finaliza la definición recursiva de $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$ y $\langle T_n\rangle_{n\in\omega}$ y, por tanto, la prueba del teorema.

4.4 Corolario

Si $\mathfrak{M}$ es numerable y de tipo de semejanza recursivo, entonces

$\mathfrak{M}$ es recursivamente compacto si y sólo si $\mathfrak{M}$ es recursivamente saturado.

Prueba:

Por los teoremas 4.1 y 4.3 .

4.5 Observación

Como en el caso de ω-compacidad (Corolario 3.5) , el corolario 4.4 no es generalizable a modelos no numerables. El contraejemplo 3.7 es aplicable también a esta situación, pues el modelo $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ no es recursivamente compacto. Esto se justificará en el próximo capítulo.

4.6 Corolario

Hay modelos numerables de tipo de semejanza recursivo (finito incluso) que son recursivamente compactos pero no ω-compactos. Por tanto, hay lógicas $\mathcal{L}_m$ recursivamente compactas pero no ω-compactas.

Prueba:

Hay modelos numerables recursivamente saturados de la aritmética de Peano, AP . De hecho, la parte numérica de cualquier modelo no estándar de la aritmética de segundo orden es recursivamente saturada. Sin embargo, la aritmética de Peano no posee ningún modelo numerable ω-saturado. Por tanto, cualquier modelo numerable y recursivamente saturado de la aritmética de Peano es recursivamente compacto pero no ω-compacto.

5. MODELOS COMPACTOS NO NUMERABLES

El paralelismo entre compacidad y saturación no se mantiene para modelos no numerables. Si bien todo modelo saturado no numerable es compacto, hay modelos no numerables que son compactos pero no saturados. La razón es que hay modelos especiales que no son saturados, y también los modelos especiales son compactos.

5.1 Teorema

Todo modelo saturado de cardinal infinito κ y tipo de semejanza de cardinal menor o igual que κ es compacto.

Prueba:

Sea T un conjunto de sentencias de tipo de semejanza τ, donde $|\tau| \leq \kappa$, y supongamos que T es finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible. Por el lema 1.9, podemos suponer que

$$T \models \forall x\, Ux \quad .$$

Sea $C = \{c_\xi : \xi < \kappa\}$ una colección de constantes distintas que no están en τ, $\{a_\xi : \xi < \kappa\}$ un enumeración sin repeticiones de M y $\{\sigma_\xi : \xi < \kappa\}$ una enumeración de las sentencias de tipo de semejanza $\tau \cup C$ tal que:

Para cada $\xi < \kappa$, σ_ξ es una sentencia de tipo de semejanza $\tau \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$.

Por el lema 4.2, para mostrar que T es $\mathfrak{M}$-satisfacible basta con obtener una sucesión $\langle b_\xi \rangle_{\xi<\kappa}$ de elementos de M y una cadena $\langle T_\xi \rangle_{\xi<\kappa}$ de conjuntos de sentencias con las siguientes propiedades:

(1) $T_0 = T$

(2) Para cada $\xi < \kappa$, T_ξ es un conjunto de sentencias del tipo de semejanza $\tau \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ y para cada sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \models \sigma$,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \sigma .$$

entendiendo que la constante c_η denota en $\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi}$ a b_η .

(3) Para cada $\xi < \kappa$, $a_\xi = b_{2\cdot\xi}$.

(4) Para cada $\xi < \kappa$, $\sigma_\xi \in T_{\xi+1}$ o bien $\neg\sigma_\xi \in T_{\xi+1}$.

(5) Para cada $\xi < \kappa$, si $\sigma_\xi \in T_{\xi+1}$ y $\sigma_\xi = \exists x \varphi(x)$, hay una constante $c \in C$ tal que $\varphi(c) \in T_{\xi+1}$.

Definimos por recursión las sucesiones $\langle b_\xi \rangle_{\xi < \kappa}$ y $\langle T_\xi \rangle_{\xi < \kappa}$. Comenzamos con $T_0 = T$ y $b_0 = a_0$. Se verifica que se cumple la condición (2) con los mismos argumentos que en la prueba de 4.3 .

Consideramos ahora la obtención de $T_{\xi+1}$ y $\langle b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi+2}$ a partir de T_ξ y $\langle b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi}$.

Caso 1º σ_ξ no es de la forma $\exists x\, \varphi(x)$ y para cada sentencia σ del tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \cup \{\sigma_\xi\} \models \sigma$,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \sigma \ .$$

Definimos en este caso $T_{\xi+1} = T_\xi \cup \{\sigma_\xi\}$, $b_{2\xi+1}$ es un elemento arbitrario de M y $b_{2\xi+2} = a_{\xi+1}$. Los detalles son como en el caso 1º de la prueba de 4.3 .

Caso 2º . $\sigma_\xi = \exists x \varphi(x)$ y para cada sentencia σ del tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \cup \{\sigma_\xi\} \models \sigma$,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\xi} \models \sigma \ .$$

Sea $\Sigma(x)$ el conjunto de las fórmulas $\psi(x)$ del tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tales que

$$T_\xi \cup \{\sigma_\xi, \varphi(x)\} \models \psi(x) \ .$$

Con los mismos argumentos que en el caso 2º de la prueba de 4.3, se establece que $\Sigma(x)$ es consistente con $Th(\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi})$. Como $\mathfrak{M}$ es saturado y de cardinal κ y $2\cdot\xi < \kappa$, $\Sigma(x)$ es realizado en $\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi}$. Hay, pues, un $b \in M$ tal que

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \Sigma(x)\ [b] \ .$$

Definimos entonces $T_{\xi+1} = T_\xi \cup \{\sigma_\xi,\ \varphi(c_{2\xi+1})\}$, $b_{2\xi+1} = b$

y $b_{2\xi+2} = a_{\xi+1}$. Los detalles restantes son como en el caso 2º de la prueba de 4.3 .

Caso 3º . Hay una sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}}\ \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \cup \{\sigma_\xi\} \models \sigma$, pero $\langle \mathfrak{M}\ b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \not\models \sigma$.

Como en el caso 3º de la prueba de 4.3, tenemos entonces que para cada sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \cup \{\neg\sigma_\xi\} \models \sigma$, $\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \sigma$.

Definimos entonces $T_{\xi+1} = T_\xi \cup \{\neg\sigma_\xi\}$, $b_{2\xi+1}$ es un elemento arbitrario de M y $b_{2\xi+2} = a_{\xi+1}$ .Los restantes detalles son como en la prueba de 4.3 .

Así queda definido $T_{\xi+1}$ y $\langle b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi+2}$. Consideramos, por último, el caso T_λ y $\langle b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\lambda}$ para un ordinal límite λ. Obsérvese que $2\lambda = \lambda$ y que la sucesión $\langle b_\eta \rangle_{\eta < \lambda}$ ya viene dada por la hipótesis de recursión. Definimos entonces $b_{2\lambda} = b_\lambda = a_\lambda$ y $T_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} T_\xi$. Veamos que se cumple el punto (2) .

Sea σ una sentencia del tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq \lambda\}$ tal que $T_\lambda \models \sigma$. Hay entonces una fórmula $\varphi(x)$ de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta < \lambda\}$ tal que $\sigma = \varphi(c_\lambda)$. Como c_λ no aparece en T_λ , $T_\lambda \models \forall x\ \varphi(x)$. Como en $\varphi(x)$ no aparecen más que un número finito de constantes de $\{c_\eta : \eta < \lambda\}$, y por compacidad de primer orden, hay un $\xi < \lambda$ tal que

$$T_\xi \models \forall x\, \varphi(x) \quad \text{y} \quad \forall x\ \varphi(x) \text{ es de tipo } \tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\} .$$

Por hipótesis inductiva tenemos entonces que

$$\langle \mathfrak{M}\ b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \forall x\, \varphi(x) .$$

Por tanto,

$$\langle \mathfrak{M}\ b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\lambda} \models \forall x\, \varphi(x)$$

y así

$$\langle \mathfrak{M}\ b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\lambda} \models \sigma .$$

Esto finaliza la recursión y, por tanto, también la prueba.

5.2 Observación

El teorema 5.1 se aplica también al caso numerable y proporciona así una nueva prueba, si bien más compleja, de 3.3 .

5.3 Teorema

Todo modelo especial de cardinal infinito κ y tipo de semejanza de cardinal menor o igual que κ es compacto.

Prueba:

Para el caso $\kappa = \omega$, $\mathfrak{M}$ es saturado y ya tenemos el resultado por el teorema 5.1 (o por 3.3) . Supongamos, pues, que $\mathfrak{M}$ es un modelo especial de cardinal no numerable κ . Sea I el conjunto de los cardinales infinitos menores que κ . Como $\mathfrak{M}$ es especial (y $\kappa > \omega$) hay una cadena de modelos $\langle \mathfrak{M}_\mu \rangle_{\mu \in I}$ tales que

(i) $\mathfrak{M} = \bigcup_{\mu \in I} \mathfrak{M}_\mu$

(ii) Para cada $\mu, \lambda \in I$, si $\mu < \lambda$, entonces $\mathfrak{M}_\mu \preccurlyeq \mathfrak{M}_\lambda$.

(iii) Para cada $\mu \in I$, $\mathfrak{M}_\mu$ es μ^+-saturado y, por tanto, de cardinal mayor o igual que μ^+.

Podemos obtener entonces una enumeración sin repeticiones $\{a_\xi : \xi < \kappa\}$ de M tal que para cada $\mu \in I$,

(∗) $\{a_\xi : \xi < \mu^+\} \subseteq M_\mu$.

Sea T un conjunto de sentencias de un tipo de semejanza τ de cardinal $\leq \kappa$ y supongamos que T es finitamente $\mathfrak{M}$-satisfacible. Por 1.9, podemos suponer que $T \models \forall x\, Ux$.

Sea $C = \{c_\xi : \xi < \kappa\}$ una colección de constantes distintas que no aparecen en τ y $\{\sigma_\xi : \xi < \kappa\}$ una enumeración de las sentencias de tipo de semejanza $\tau \cup C$ tal que para cada $\xi < \kappa$,

$$\sigma_\xi \text{ es de tipo } \tau \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\} \quad .$$

En virtud de 4.2 , todo lo que es preciso mostrar es que hay una sucesión $\langle b_\xi \rangle_{\xi<\kappa}$ de elementos de M y una cadena $\langle T_\xi \rangle_{\xi<\kappa}$ de conjuntos de sentencias con las siguientes propiedades:

(1) $T_0 = T$

(2) Para cada $\xi < \kappa$, T_ξ es un conjunto de sentencias del tipo de semejanza $\tau \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ y para cada sentencia σ de tipo $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \models \sigma$,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \sigma \quad .$$

(3) Para cada $\xi < \kappa$, $a_\xi = b_{2\cdot\xi}$.

(4) Para cada $\xi < \kappa$, $\sigma_\xi \in T_{\xi+1}$ o bien $\neg\sigma_\xi \in T_{\xi+1}$.

(5) Para cada $\xi < \kappa$, si $\sigma_\xi \in T_{\xi+1}$ y $\sigma_\xi = \exists x\, \varphi(x)$, hay una constante $c \in C$ tal que $\varphi(c) \in T_{\xi+1}$.

Exigiremos esta vez adicionalmente que

(6) Para cada $\xi < \kappa$, $\{b_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\} \subseteq M_{|\xi|+\omega}$.

En la definición por recursión de $\langle b_\xi \rangle_{\xi<\kappa}$ y $\langle T_\xi \rangle_{\xi<\kappa}$ justificaremos únicamente los puntos en los que el argumento difiere del ofrecido en la prueba análoga del teorema 5.1 .

Comenzamos con $T_0 = T$ y $a_0 = b_0$. Como, por ($*$), $a_0 \in M_\omega$, se verifica el punto (6) .

La obtención de $T_{\xi+1}$ y $\langle b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\xi+2}$ a partir de T_ξ y $\langle b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\xi}$ distingue, como es ya habitual, tres casos.

Sea $\mu = |\xi| + \omega$.

<u>Caso 1º</u> σ_ξ no es de la forma $\exists x\, \varphi(x)$ y para cada sentencia σ de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \cup \{\sigma_\xi\} \models \sigma$,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \sigma \quad .$$

Definimos $T_{\xi+1} = T_\xi \cup \{\sigma_\xi\}$, $b_{2\xi+1}$ es un elemento arbitrario de M_μ y $b_{2\xi+2} = a_{\xi+1}$. Obsérvese que también $a_{\xi+1} \in M_\mu$, de manera que se cumple (6).

<u>Caso 2º</u> $\sigma_\xi = \exists x\, \varphi(x)$ y para cada sentencia σ de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \cup \{\sigma_\xi\} \models \sigma$,

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \sigma \quad .$$

Sea $\Sigma(x)$ el conjunto de las fórmulas $\psi(x)$ de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tales que

$$T_\xi \cup \{\sigma_\xi, \varphi(x)\} \models \psi(x) \quad .$$

$\Sigma(x)$ es consistente con $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi})$. Pero como $\{b_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\} \subseteq M_\mu$ y $\mathfrak{M}_\mu \preccurlyeq \mathfrak{M}$, también $\Sigma(x)$ es consistente con $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}_\mu b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi})$. Dado que $\mathfrak{M}_\mu$ es μ^+-saturado y $2\xi < \mu^+$, $\Sigma(x)$ es realizado en $\langle \mathfrak{M}_\mu b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\xi}$. Podemos escoger entonces un $b \in M_\mu$ tal que

$$\langle \mathfrak{M}_\mu b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \Sigma(x)[b] \quad .$$

En ese caso también

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \Sigma(x)[b] \quad .$$

Definimos entonces $T_{\xi+1} = T_\xi \cup \{\sigma_\xi, \varphi(c_{2\xi+1})\}$, $b_{2\xi+1} = b$ y $b_{2\xi+2} = a_{\xi+1}$.

<u>Caso 3º</u>. Hay una sentencia σ de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \cup \{\sigma_\xi\} \models \sigma$, pero $\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \not\models \sigma$.

En ese caso, para cada sentencia σ de tipo de semejanza $\tau_{\mathfrak{M}} \cup \{c_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\}$ tal que $T_\xi \cup \{\neg\sigma_\xi\} \models \sigma$, se tiene

$$\langle \mathfrak{M}\, b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\xi} \models \sigma \quad .$$

Definimos entonces $T_{\xi+1} = T_\xi \cup \{\neg\sigma_\xi\}$, $b_{2\xi+1}$ es un elemento arbitrario de M_μ y $b_{2\xi+2} = a_{\xi+1}$.

Consideremos, por último, la obtención de T_λ y $\langle b_\eta \rangle_{\eta \leq 2\cdot\lambda}$ para el caso λ límite. Recordemos que $2\lambda = \lambda$ y que por hipótesis tenemos $\langle b_\eta \rangle_{\eta < \lambda}$. Definimos entonces, $b_\lambda = a_\lambda$ y $T_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} T_\xi$. Por hipótesis inductiva, para cada $\eta < \lambda$, $b_\eta \in M_{|\eta|+\omega}$. Así, para cada $\eta < \lambda$, $b_\eta \in M_{|\lambda|}$. Como también, por ($*$), $a_\lambda \in M_{|\lambda|}$, se verifica la condición (6),

$$\{b_\eta : \eta \leq 2\cdot\xi\} \subseteq M_{|\lambda|+\omega} \quad .$$

5.4 Corolario

Hay modelos compactos (no numerables y de tipo de semejanza finito) que no son saturados.

Prueba:

Como se indicó en 2.15 y 2.21, la teoría del orden denso sin extremos posee modelos especiales de cardinal $\beth_\omega$ y $\beth_{\omega_1}$, pero ningún modelo saturado de dichos cardinales. De acuerdo con 5.3, estos modelos especiales son compactos. Sin embargo, no son saturados.

5.5 Observación

Este último resultado no acaba de ser satisfactorio, pues los modelos especiales son una débil generalización de los modelos saturados. Todo modelo saturado es especial, y en cardinal regular los modelos saturados y los modelos especiales son los mismos. Si una teoría T tiene un modelo especial no saturado de cardinal κ, entonces T no tiene ningún modelo saturado de cardinal κ. Así pues, saber que hay modelos compactos no saturados pero especiales no ayuda a responder a una serie de preguntas naturales, como si existen modelos compactos no isomorfos pero del mismo cardinal y elementalmente equivalentes o si existen modelos compactos no saturados de cardinal regular. No sabemos si existen modelos compactos no especiales, de modo que no tenemos respuesta para estas preguntas.

NOTAS AL CAPITULO III

Los resultados de este capítulo han sido obtenidos sin tener noticias de resultados análogos. El lema 4.2 está inspirado en la prueba de un teorema de Ressayre sobre lógicas infinitarias (véase Ressayre (1977)) .

Finalizado ya este capítulo hemos conocido la existencia del artículo Morley (1973a), que no es citado en ninguna de las bibliografías habituales sobre lógicas abstractas y teoría de modelos y , en particular , no aparece en la bibliografía exhaustiva de Barwise & Feferman (1985) . En este artículo de Morley se obtienen resultados análogos a 3.1 y 3.3 . No se enuncian en términos de ω-compacidad de los modelos , sino en términos de ω-categoricidad de clases RPC$_\delta$, pero los argumentos que los justifican son similares a los que aquí hemos empleado. Dado que el interés de Morley en este artículo está en cuestiones de categoricidad y no de compacidad, no obtiene resultados paralelos a 4.1 y 4.3 . Por otra parte, no considera en absoluto el caso no numerable.

CAPITULO IV : APLICACIONES

1. ω-LOGICA

La ω-lógica es la lógica de los números naturales. Hay diversos modos de precisar esta afirmación, pues hay diversas versiones de ω-lógica. Todas ellas comparten una idea : se trata de convertir en lógicos ciertos conceptos relativos a los números naturales. La diversidad proviene de qué conceptos se escojan. En cualquier caso, la ω-lógica debe poseer un predicado monádico, N, destinado a interpretarse como el conjunto de los números naturales, y diversos signos, englobados en un tipo de semejanza, que denotarán números naturales o se interpretarán como operaciones o relaciones entre números naturales.

1.1 En su versión más simple, la ω-lógica posee, además del predicado N , un conjunto $\{c_n : n\in\omega\}$ de distintas constantes destinadas a nombrar a los números naturales. Los ω-modelos, o modelos propios de la ω-lógica, serán aquellos cuyo tipo de semejanza contenga los indicados signos e interpreten a N como el conjunto de las denotaciones de las constantes c_n . Así, si $\mathfrak{A}$ posee el adecuado tipo de semejanza, $\mathfrak{A}$ es un ω-modelo si y sólo si $N^{\mathfrak{A}} = \{c_n^{\mathfrak{A}} : n\in\omega\}$. En el marco general de las K-lógicas, esta primera versión de la ω-lógica viene definida por

$$U = N \ , \ \tau_K = \{c_n : n\in\omega\} \quad \text{y}$$

$$K = \{\mathfrak{A} : A = \{c_n^{\mathfrak{A}} : n\in\omega\}\}.$$

1.2 Una segunda versión de ω-lógica no usa constantes para denotar a los números naturales, sino que tiene únicamente una constante , 0 , para designar al número cero y un signo funcional monádico, S , para la operación de sucesión entre números naturales. Aquí también se dispone de un nombre para cada número natural, pero no es una constante sino un término complejo. El número natural n se designa mediante el término $\bar{n} = S\ldots S0$ (con n apariciones del signo S) . Más precisamente, definimos por recursión los términos $\bar{n}$ como sigue:

$$\bar{0} = 0$$

$$\overline{n+1} = S\,\bar{n} \quad .$$

Los ω-modelos serán ahora las estructuras $\mathfrak{A}$ que verifiquen $N^{\mathfrak{A}} = \{\bar{n}^{\mathfrak{A}} : n\in\omega\}$. La precisión de ω-lógica como K-lógica es ahora la siguiente:

$$U = N \ , \qquad \tau_K = \{0, S\} \quad \text{y}$$

$$K = \left\{\mathfrak{A} : \ \mathfrak{A} \text{ es de tipo } \tau_K \ \text{ y } \ A = \{\bar{n}^{\mathfrak{A}} : \ n\in\omega\}\right\} .$$

1.3 Ninguna de ambas versiones es recursivamente compacta. En efecto, si c es una constante distinta de cada c_n y distinta de 0 ,

$$\{\neg c_n \simeq c : n\in\omega\}\cup\{Nc\}$$

es finitamente satisfacible pero insatisfacible en la primera versión y

$$\{\neg\, \bar{n} \simeq c : n\in\omega\}\cup\{Nc\}$$

es finitamente satisfacible pero insatisfacible en la segunda versión.

Por tanto, ninguna de ambas versiones es , de acuerdo con II.15, recursivamente enumerable para consecuencia. Como el tipo de semejanza de la segunda versión es finito, podemos concluir por II.20 que esta segunda versión tampoco es recursivamente enumerable para validez. Sin embargo, la primera versión posee un tipo de semejanza infinito, de manera que no podemos usar II.20 para concluir lo mismo. De hecho la primera versión sí es recursivamente enumerable para validez, como se estableción en II.22 .

1.4 En ninguna de ambas versiones hemos exigido que los nombres de los números naturales deban interpretarse como objetos distintos . Los ω-modelos pueden interpretar a N como un conjunto finito. La razón de que no se exija esta condición está en que la lógica de primer orden puede suplirla mediante los enunciados

$\{\neg\, c_n \simeq c_m \;:\; n \neq m\}$ en la primera versión

y $\{\neg\, \bar{n} \simeq \bar{m} \;:\; n \neq m\}$ en la segunda versión.

Parece entonces razonable no recargar la ω-lógica con condiciones que puede expresar la lógica de primer orden. Las condiciones $N^{\mathfrak{A}} = \{c_n^{\mathfrak{A}} : n \in \omega\}$ y $N^{\mathfrak{A}} = \{\bar{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \omega\}$ no pueden expresarse , sin embargo, en la lógica de primer orden . Ahora bien, si no exigimos que numerales distintos se interpreten como objetos distintos, la ω-lógica no es una $\mathfrak{M}$-lógica sino una K-lógica cuya clase asociada K posee infinitos modelos no isomorfos. Para nuestros propósitos es más interesante desarrollar la ω-lógica como una $\mathfrak{M}$-lógica, como la lógica del modelo de los números naturales. Nos decidimos, además , por su versión en tipo de semejanza $\{0, S\}$ dado que no presenta la asimetría entre validez y consecuencia de la versión en tipo de semejanza $\{c_n : n \in \omega\}$. Definimos por tanto :

1.5 <u>Definición</u> : ω-lógica

ω-lógica es la $\mathfrak{M}$-lógica determinada por el tipo de semejanza $\tau_\omega = \{0, S\}$ y por el modelo $\langle \omega, 0, S \rangle$, donde ω es el conjunto de los números naturales, 0 es el número cero y S es la función de sucesión en ω . En particular, usamos el predicado monádico N para el papel de U . En cualquier tipo de semejanza que incluya a τ_ω poseemos un nombre $\bar{n}$ para cada número natural n . Los ω-modelos son las estructuras $\mathfrak{A}$ cuyo tipo de semejanza tiene los signos 0, S, N y verifican :

(1) $0^{\mathfrak{A}} \in N^{\mathfrak{A}}$

(2) $S^{\mathfrak{A}} \restriction N^{\mathfrak{A}} : N^{\mathfrak{A}} \longrightarrow N^{\mathfrak{A}}$

(3) $\langle N^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \restriction N^{\mathfrak{A}} \rangle \cong \langle \omega, 0, S \rangle$.

Estos modelos poseen, por tanto, una subestructura isomorfa a $\langle \omega, 0, S \rangle$.

La relación de consecuencia en ω-lógica , $\models_{\omega}$, se define por :

$$\Sigma \models_{\omega} \sigma \text{ si y sólo si todo } \omega\text{-modelo de } \Sigma \text{ es modelo de } \sigma \text{ .}$$

1.6 Teorema

La ω-lógica no es recursivamente compacta. Tampoco es recursivamente enumerable para consecuencia ni para validez.

Prueba:

Se aplican los argumentos expuestos en 1.3 para la versión más simple de ω-lógica en el tipo de semejanza $\{0, S\}$.

1.7 Lema

La teoría completa de números es finitamente axiomatizable en ω-lógica.

Prueba:

Recordemos que la teoría completa de números, TCN, es el conjunto de los enunciados verdaderos en la estructura

$$\mathbb{N} = \langle \omega, 0, S, +, \cdot, < \rangle \quad .$$

La axiomatización que obtenemos en ω-lógica es la conjunción de los siguientes enunciados:

(i) $\forall x \; Nx$

(ii) $\forall x \;\; x + 0 \simeq x$

(iii) $\forall xy(x + Sy \simeq S(x + y))$

(iv) $\forall x \;\; x \cdot 0 \simeq 0$

(v) $\forall xy(x \cdot Sy \simeq x \cdot y + x)$

(vi) $\forall xy(x < y \longleftrightarrow \exists z(\neg\, z \simeq 0 \wedge x + z \simeq y))$.

La teoría completa de números es el conjunto de las consecuencias en ω-lógica de los enunciados descritos en las que no aparece el predicado N .

1.8 Teorema

El conjunto de las sentencias válidas en ω-lógica en el tipo de semejanza $\{0, S, +, \cdot, <\}$ no es aritmético.

Prueba:

Es un conocido resultado de Tarski que TCN no es un conjunto aritmético (el conjunto de números de Gödel de las sentencias de TCN no es aritmético) . Pero si σ_{TCN} es la conjunción de axiomas indicada en el lema 1.7, tenemos que

$$TCN = \{\varphi : \sigma_{TCN} \models_{\omega} \varphi \quad \text{y} \quad \varphi \text{ es del tipo de semejanza } \tau_{\mathbb{N}}\} .$$

Si $\{\varphi : \sigma_{TCN} \models_{\omega} \varphi\}$ fuera aritmético, también lo sería TCN . Así pues, el conjunto $\{\varphi : \sigma_{TCN} \models_{\omega} \varphi\}$ no es aritmético. Tampoco lo es entonces $\{\varphi : \models_{\omega} \varphi\}$ para el citado tipo de semejanza, pues

$$\sigma_{TCN} \models_{\omega} \varphi \qquad \text{si y sólo si} \qquad \models_{\omega} \sigma_{TCN} \rightarrow \varphi \quad .$$

Posteriormente mejoraremos el resultado expuesto en 1.8 mostrando que,en un determinado tipo de semejanza finito, el conjunto de las sentencias válidas en ω-lógica no es ni siquiera hiperaritmético. El argumento del teorema 1.8 no puede proporcionar este resultado, pues TCN es hiperaritmético.

La ω-lógica posee un cálculo, en un sentido generalizado del término. Consiste en una extensión de un cálculo de primer orden mediante una regla infinitaria de inferencia: la ω-regla.

1.9 <u>Definición</u> : ω-regla

La ω-regla permite inferir $\forall x(Nx \rightarrow \varphi(x))$ de las infinitas premisas $\{\varphi(\bar{n}) : n \in \omega\}$. Es, pues, la regla de inferencia:

$$\frac{\varphi(\bar{n}) \qquad \text{para cada } n \in \omega}{\forall x(Nx \rightarrow \varphi(x))}$$

1.10 <u>Lema</u>

La ω-regla es correcta en ω-lógica, esto es : si para cada $n \in \omega$

$\Sigma \models_{\omega} \varphi(\bar{n})$, entonces $\Sigma \models_{\omega} \forall x(Nx \longrightarrow \varphi(x))$.

Prueba:

Supongamos que para cada $n \in \omega$, $\Sigma \models_{\omega} \varphi(\bar{n})$ y veamos que $\Sigma \models_{\omega} \forall x(Nx \longrightarrow \varphi(x))$. Sea $\mathfrak{A}$ un ω-modelo de Σ . Tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{n})$ para cada $n \in \omega$. Como $N^{\mathfrak{A}} = \{\bar{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \omega\}$, concluimos que $\mathfrak{A} \models \forall x(Nx \longrightarrow \varphi(x))$.

1.11 La teoría completa de $\langle \omega, 0, S \rangle$ posee una axiomatización recursiva en primer orden. Usaremos la notación TS (teoría de la sucesión) para referirnos a esta teoría. Una axiomatización recursiva de TS consta de los siguientes axiomas:

(i) $\forall xy(Sx \approx Sy \longrightarrow x \approx y)$

(ii) $\forall x \neg 0 \approx Sx$

(iii) $\forall x(\neg 0 \approx x \longrightarrow \exists y\, Sy \approx x)$

(iv) $\forall x \neg x \approx S^n x$ para cada $n \geqslant 1$

donde $S^1 = S$ y $S^{n+1} = S S^n$.

1.12 Definición : Axiomas de la ω-lógica

Llamaremos axiomas de la ω-lógica a los enunciados siguientes:

(i) $N0$

(ii) $\forall x(Nx \longrightarrow NSx)$

(iii) σ^N para cada axioma σ de TS .

1.13 Lema

Todo axioma de la ω-lógica es válido en ω-lógica.

Prueba:

Es inmediato que en todo ω-modelo son verdaderos los enunciados expuestos en 1.12 .

Una manera de precisar el cálculo de la ω-lógica consiste en definir una sucesión de conjuntos de sentencias , T_ξ , con índices ordinales, de manera que , comenzando con un conjunto T de enunciados y los axiomas de la ω-lógica, se obtenga $T_{\xi+1}$ a partir de T_ξ aplicando las reglas de inferencia (las reglas de primer orden y la ω-regla) . De este modo se irán obteniendo progresivamente consecuencias de T en ω-lógica. El cálculo será completo si toda consecuencia es obtenible de este modo. Definimos, pues :

1.14 <u>Definición</u> : Deducibilidad en ω-lógica

Para cada conjunto de sentencias T definimos :

(i) $T_0 = T \cup \{\sigma : \sigma$ es un axioma de la ω-lógica$\}$

(ii) $T_{\xi+1} = \{\sigma : T_\xi \models \sigma\} \cup \{\forall x(Nx \rightarrow \varphi(x)) : \varphi(\bar{n}) \in T_\xi$ para cada $n \in \omega\}$.

(iii) $T_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} T_\xi$ si λ es un ordinal límite .

Usamos la notación $T \vdash_\omega \sigma$ para indicar que σ es deducible en ω-lógica de T , es decir, que hay un ordinal ξ tal que $\sigma \in T_\xi$. Diremos que T es consistente en ω-lógica si no hay ninguna sentencia σ tal que $T \vdash_\omega (\sigma \wedge \neg \sigma)$, y que es inconsistente en ω-lógica en otro caso.

1.15 <u>Lema</u>

El cálculo de la ω-lógica es correcto, es decir, si $T \vdash_\omega \sigma$, entonces $T \models_\omega \sigma$.

Prueba:

Veamos por inducción ordinal que para cada ξ :

Para cada $\sigma \in T_\xi$, $T \models_\omega \sigma$.

Esto es obvio para $\xi = 0$ en virtud de 1.13 . Supuesto ahora que está establecido para ξ , veamos que también vale para $\xi + 1$. Sea $\sigma \in T_{\xi+1}$. Si $T_\xi \models \sigma$, la hipótesis inductiva nos proporciona el resultado $T \models_{\omega} \sigma$. En otro caso, hay una fórmula $\varphi(x)$ tal que $\sigma = \forall x(Nx \rightarrow \varphi(x))$ y para cada $n \in \omega$, $\varphi(\bar{n}) \in T_{\xi}$. Entonces, por la hipótesis inductiva, para cada $n \in \omega$, $T \models_{\omega} \varphi(\bar{n})$ y así , de acuerdo con 1.10 , $T \models_{\omega} \sigma$. Finalmente, en el caso límite , el resultado es inmediato en virtud de la hipótesis inductiva.

1.16 Corolario

Si T tiene un ω-modelo, T es consistente en ω-lógica.

Prueba:

Por 1.15 .

Hay un teorema de completud para el cálculo de la ω-lógica. Se denomina teorema de ω-completud. Vale únicamente para tipos de semejanza numerable. Posteriormente veremos un ejemplo de una teoría, en tipo de semejanza no numerable, que es consistente en ω-lógica pero no posee ningún ω-modelo. El teorema de ω-completud fue obtenido por vez primera , y de modo independiente, por Henkin y Orey. Posteriormente se generalizó y se aplicó a otros contextos bajo el nombre de teorema de omisión de tipos.

1.17 Definición: ω-completud

Un conjunto de sentencias T es ω-completo si para cada fórmula $\varphi(x)$ tal que $T \models \varphi(\bar{n})$ para cada $n \in \omega$, ocurre $T \models \forall x(Nx \rightarrow \varphi(x))$.

Así, una teoría es ω-completa si está cerrada bajo la ω-regla, es decir, si el resultado de aplicar la ω-regla a consecuencias (en primer orden) de T es una consecuencia (en primer orden) de T .

1.18 Lema

Las tres condiciones siguientes son equivalentes:

(1) T es ω-completa.

(2) Para cada fórmula $\varphi(x)$: si $T \cup \{\exists x(Nx \wedge \varphi(x))\}$ es consistente, hay $n \in \omega$ tal que $T \cup \{\varphi(\bar{n})\}$ es consistente .

(3) Para cada fórmula $\varphi(x)$: si $T \cup \{\exists x\, \varphi(x)\}$ es consistente, hay una fórmula $\sigma(x) \in \{Nx\} \cup \{\neg x \simeq \bar{n} : n \in \omega\}$ tal que

$$T \cup \{\exists x(\varphi(x) \wedge \neg \sigma(x))\}$$ es consistente.

Prueba:

(1) y (2) son trivialmente equivalentes, pues la condición

$$T \cup \{\varphi(\bar{n})\}$$ es consistente

equivale a

$$T \nvDash \neg \varphi(\bar{n})$$

y la condición

$$T \cup \{\exists x(Nx \wedge \varphi(x))\}$$ es consistente

equivale a

$$T \nvDash \forall x(Nx \longrightarrow \neg \varphi(x)) .$$

Respecto a la equivalencia entre (2) y (3) :

Prueba de (3) a partir de (2) :

Supongamos que $T \cup \{\exists x\, \varphi(x)\}$ es consistente pero que $T \cup \{\exists x(\neg Nx \wedge \varphi(x))\}$ no lo es . Entonces $T \vDash \forall x(\varphi(x) \longrightarrow Nx)$ y , por tanto, $T \cup \{\exists x(Nx \wedge \varphi(x))\}$ es consistente. Así, por (2), hay un $n \in \omega$ tal que $T \cup \{\varphi(\bar{n})\}$ es consistente. Pero esto es lo mismo que decir que $T \cup \{\exists x(\varphi(x) \wedge x \simeq \bar{n})\}$ es consistente.

Prueba de (2) a partir de (3) :

Supongamos que $T \cup \{\exists x(Nx \wedge \varphi(x))\}$ es consistente. Por (3), hay una fórmula $\sigma(x)$ en $\{Nx\} \cup \{\neg x \simeq \bar{n} : n \in \omega\}$ tal que $T \cup \{\exists x(Nx \wedge \varphi(x) \wedge \neg \sigma(x))\}$ es consistente. Obviamente, no puede ser $\sigma(x) = Nx$. Hay pues un $n \in \omega$ tal que $\sigma(x) = \neg x \simeq \bar{n}$. Pero entonces $T \cup \{\varphi(\bar{n})\}$ es consistente.

La condición (3) del lema 1.18 es especialmente útil a la vista del siguiente resultado:

1.19 Lema

Las dos condiciones siguientes son equivalentes:

(1) $\mathfrak{A}$ es un ω-modelo.

(2) $\mathfrak{A}$ es un modelo de los axiomas de la ω-lógica que omite el conjunto de fórmulas $\{Nx\} \cup \{\neg x \simeq \bar{n} \ : \ n \in \omega\}$.

Prueba:

Supongamos en primer lugar que $\mathfrak{A}$ es un ω-modelo y veamos que se verifica (2) . De acuerdo con 1.13 , $\mathfrak{A}$ es un modelo de los axiomas de la ω-lógica . Como $N^{\mathfrak{A}} = \{\bar{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \omega\}$, es obvio que ningún elemento de $\mathfrak{A}$ satisface $\{Nx\} \cup \{\neg x \simeq \bar{n} : n \in \omega\}$. Pero esto significa que $\mathfrak{A}$ omite este conjunto de fórmulas.

Supongamos que $\mathfrak{A}$ verifica la condición (2) . Entonces $0^{\mathfrak{A}} \in N^{\mathfrak{A}}$, pues $\mathfrak{A} \models N0$, y $S^{\mathfrak{A}} \restriction N^{\mathfrak{A}} : N^{\mathfrak{A}} \longrightarrow N^{\mathfrak{A}}$, pues $\mathfrak{A}$ satisface $\forall x(Nx \longrightarrow NSx)$. Además

$$\langle N^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \restriction N^{\mathfrak{A}} \rangle \models TS$$

pues para cada axioma σ de TS, $\mathfrak{A} \models \sigma^{N}$. Como $\mathfrak{A}$ omite $\{Nx\} \cup \{\neg x \simeq \bar{n} : n \in \omega\}$, resulta que $N^{\mathfrak{A}} = \{\bar{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \omega\}$. Entonces la función $h : N^{\mathfrak{A}} \longrightarrow \omega$ definida por

$$h(\bar{n}^{\mathfrak{A}}) = n \qquad \text{para cada } n \in \omega$$

es un isomorfismo entre $\langle N^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \restriction N^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\langle \omega, 0, S \rangle$. Por tanto, $\mathfrak{A}$ es un ω-modelo.

Existe un gran parentesco entre las condiciones (3) y (2) de los lemas 1.18 y 1.19 respectivamente. Si $\mathfrak{A}$ es un modelo que satisface la condición (2) del lema 1.19, su teoría completa satisface la condición (3) del lema 1.18 . Por tanto:

1.20 Lema

(1) Si $\mathfrak{A}$ es un ω-modelo, Th($\mathfrak{A}$) es ω-completa.

(2) Si T tiene un ω-modelo, T tiene una extensión consistente y ω-completa que incluye los axiomas de la ω-lógica.

Prueba:

(1) se sigue, como ya se ha indicado, de los lemas 1.18 y 1.19. Respecto a (2) : si $\mathfrak{A}$ es un ω-modelo de T, Th($\mathfrak{A}$) es la extensión de T que tiene las propiedades requeridas.

1.21 Teorema de ω-completud de Henkin-Orey

Si T es una teoría en tipo de semejanza numerable que posee una extensión consistente y ω-completa que incluye los axiomas de la ω-lógica, entonces T tiene un ω-modelo.

Prueba:

Este resultado se obtiene a partir del teorema de omisión de tipos: Si T es una teoría consistente en tipo de semejanza numerable y el conjunto de fórmulas $\Sigma(x_1,\dots,x_n)$ tiene la propiedad

(1) Para cada fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ tal que

$$T \cup \{\exists x_1 \dots x_n \ \varphi(x_1,\dots,x_n)\} \text{ es consistente}$$

hay una fórmula $\sigma(x_1,\dots,x_n) \in \Sigma(x_1,\dots,x_n)$ tal que

$$T \cup \{\exists x_1 \dots x_n (\varphi(x_1,\dots,x_n) \wedge \neg\sigma(x_1,\dots,x_n))\} \text{ es}$$

consistente ,

entonces

(2) T posee un modelo que omite $\Sigma(x_1,\dots,x_n)$.

Para una prueba del teorema de omisión de tipos véase, por ejemplo, Chang & Keisler (1977), pág. 79 . Indicaremos aquí cómo se obtiene el teorema de ω-completud a partir del teorema de omisión de tipos.

Consideremos una teoría T en tipo de semejanza numerable que posee una extensión T' consistente y ω-completa que incluye los axiomas de la ω-lógica. De acuerdo con el lema 1.18, T' cumple la hipótesis del teorema de omisión de tipos respecto al conjunto de fórmulas $\{Nx\} \cup \{\neg x \approx \bar{n} : n \in \omega\}$. Por tanto T' tiene un modelo $\mathfrak{A}$ que omite este conjunto de fórmulas . De acuerdo con el lema 1.19,

$\mathfrak{A}$ es un ω-modelo. Por tanto, T posee un ω-modelo.

1.22 Corolario : Completud de la ω-lógica.

Sea T un conjunto de sentencias de tipo de semejanza numerable τ .

(1) Para cada sentencia σ de tipo τ, si $T \models_{\omega} \sigma$, entonces $T \vdash_{\omega} \sigma$.

(2) Si T es consistente en ω-lógica, T posee un ω-modelo.

Prueba:

(1) y (2) son , obviamente, equivalentes. Por tanto, nos limitaremos a establecer (1) . Observemos que,en la construcción de la definición 1.14, si el tipo de semejanza de T es numerable, hay un ordinal $\eta < \omega_1$ tal que $T_\eta = T_{\eta+1}$, en cuyo caso $T_\eta = T_\xi$ para cada $\xi > \eta$. Entonces $T \vdash_{\omega} \sigma$ si y sólo si $\sigma \in T_\eta$. Supongamos, pues, que $T \models_{\omega} \sigma$ pero $T \not\vdash_{\omega} \sigma$. De acuerdo con lo indicado, $\sigma \notin T_\eta$. Como $T_\eta = T_{\eta+1}$, tampoco $T_\eta \models \sigma$. Así $T_\eta \cup \{\neg\sigma\}$ es consistente (en primer orden) . Veamos que $T_\eta \cup \{\neg\sigma\}$ es ω-completa. Para ello supongamos que $T_\eta \cup \{\neg\sigma\} \models \varphi(\bar{n})$ para cada $n \in \omega$. En ese caso $T_\eta \models \neg\sigma \rightarrow \varphi(\bar{n})$ para cada $n \in \omega$ y así , como $T_\eta = T_{\eta+1}$, $(\neg\sigma \rightarrow \varphi(\bar{n})) \in T_\eta$ para cada $n \in \omega$. Por tanto, usando de nuevo el hecho de que $T_\eta = T_{\eta+1}$,

$$(\neg\sigma \longrightarrow \forall x(Nx \longrightarrow \varphi(x))) \in T_\eta$$

y entonces $T_\eta \cup \{\neg\sigma\} \models \forall x(Nx \longrightarrow \varphi(x))$. Queda, pues, establecido que $T_\eta \cup \{\neg\sigma\}$ es consistente y ω-completa . Como cada axioma de la ω-lógica está en T_0 y $T_0 \subseteq T_\eta$, $T_\eta \cup \{\neg\sigma\}$ verifica las hipótesis del teorema de Henkin-Orey (teorema 1.21) y tiene, en consecuencia, un ω-modelo $\mathfrak{A}$. Como $T \subseteq T_\eta$, $\mathfrak{A}$ es un ω-modelo de $T \cup \{\neg\sigma\}$. En ese caso $T \not\models_{\omega} \sigma$.

Mostraremos a continuación que este cálculo sólo es completo para tipos de semejanza numerables.

1.23 Contraejemplo

Hay una teoría T en tipo de semejanza mo numerable que es consistente en ω-lógica aunque no posee ningún ω-modelo. Por tanto, hay una sentencia σ tal que $T \models_{\omega} \sigma$ pero $T \not\vdash_{\omega} \sigma$. Además T es ω-completa.

Prueba:

El tipo de semejanza de T tiene, junto a los signos propios de la ω-lógica, un conjunto $\{c_\eta : \eta<\omega_1\}$ de distintas constantes. Los axiomas de T son los axiomas de la ω-lógica y los enunciados

(i) $\forall x\, Nx$

(ii) $\neg c_\eta \approx c_\xi$ para $\eta<\xi<\omega_1$.

T no puede tener ningún ω-modelo, pues en cualquier modelo $\mathfrak{A}$ de T $N^{\mathfrak{A}}$ es no numerable. Veamos que T es ω-completa. A tal efecto supongamos que para cada $n\in\omega$, $T \models \varphi(\bar{n})$ y mostremos que $T \models \forall x(Nx \longrightarrow \varphi(x))$. En $\varphi(x)$ no aparecen más que un número finito de constantes de $\{c_\eta : \eta<\omega_1\}$. Para facilitar la notación, supongamos que son las primeras, $c_0,\ldots,c_k$. Entonces hay una fórmula $\psi(x,x_0,\ldots,x_k)$ de tipo de semejanza $\{0, S, N\}$ tal que

$$\varphi(x) = \psi(x,c_0,\ldots,c_k) .$$

Sea Δ el conjunto de los axiomas de la ω-lógica . Como para cada $n\in\omega$,

$$\Delta \cup \{\forall x\, Nx\} \cup \{\neg c_\eta \approx c_\xi : \eta<\xi<\omega_1\} \models \varphi(\bar{n})$$

y las constantes $\{c_\eta : \eta<\omega_1\}$ no aparecen en $\Delta \cup \{\forall x\, Nx\}$, tenemos que para cada $n\in\omega$,

$$\Delta \cup \{\forall x\, Nx\} \models \forall x_0\ldots x_k \Big(\bigwedge_{i<j\leq k} \neg\, x_i \approx x_j \longrightarrow \psi(\bar{n},x_0,\ldots,x_k)\Big)$$

Veamos que

$$(*)\ \Delta \cup \{\forall x\, Nx\} \models \forall x x_0\ldots x_k \Big(\bigwedge_{i<j\leq k} \neg\, x_i \approx x_j \longrightarrow \psi(x,x_0,\ldots,x_k)\Big)$$

En otro caso tendríamos un modelo $\mathfrak{A}$ de $\Delta \cup \{\forall x\, Nx\}$ tal que

$$\exists x x_0\ldots x_k \Big(\bigwedge_{i<j\leq k} \neg\, x_i \approx x_j \longrightarrow \psi(x,x_0,\ldots,x_k)\Big) .$$

Como $\mathfrak{A} \models \Delta$ y para cada axioma σ de la teoría de la sucesión, TS , $\sigma^N \in \Delta$, tenemos que

$$<A, 0^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}}> \models TS$$

y, por tanto

$$<A, 0^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}}> \equiv <\omega, 0, S> .$$

Sea $\mathfrak{B}$ la expansión de $<\omega, 0, S>$ definida por

$$\mathfrak{B} \upharpoonright \{0, S\} = <\omega, 0, S> \quad y \quad N^{\mathfrak{B}} = \omega .$$

También ocurre $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, pues para cada sentencia σ del tipo de semejanza $\{0, S, N\}$ hay una sentencia σ^* del tipo de semejanza $\{0, S\}$ tal que $\forall x\, Nx \models (\sigma \longleftrightarrow \sigma^*)$. Como $\mathfrak{A} \models \forall x\, Nx$ y $\mathfrak{B} \models \forall x\, Nx$, concluimos que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. En ese caso

$$\mathfrak{B} \models \exists x x_0 \ldots x_k (\bigwedge_{i<j\leq k} \neg x_i \simeq x_j \wedge \neg \psi (x, x_0, \ldots, x_k)) .$$

Hay, pues , un $n \in \omega$ tal que

$$\mathfrak{B} \models \exists x_0 \ldots x_k (\bigwedge_{i<j\leq k} \neg x_i \simeq x_j \wedge \neg \psi (\bar{n}, x_0, \ldots, x_k)) .$$

Pero $\mathfrak{B} \models \Delta \cup \{\forall x\, Nx\}$, de manera que

$$\Delta \cup \{\forall x\, Nx\} \not\models \forall x_0 \ldots x_k (\bigwedge_{i<j\leq k} \neg x_i \simeq x_j \longrightarrow \psi (\bar{n}, x_0, \ldots, x_k)) ,$$

en contra de lo anteriormente establecido.

Esto establece el punto (*) . Por tanto tenemos

$$T \models \forall x (Nx \longrightarrow \varphi (x))$$

y , en consecuencia , T es ω-completa. Veamos, finalmente, que T es consistente en ω-lógica.

En la construcción de la definición 1.14 obtenemos:

$$T_0 = T \cup \Delta = T$$

$$T_1 = \{\varphi : T_0 \models \varphi\} \cup \{\forall x (Nx \rightarrow \varphi(x)) : \text{Para cada } n \in \omega , \varphi (\bar{n}) \in T_0\}$$

$$= \{\varphi : T \models \varphi\} \quad , \text{ por } \omega\text{-completud de } T .$$

Así $T_2 = T_1$ y para cada $\eta > 1$, $T_\eta = T_1$.
Como T es consistente, resulta que T es consistente en ω-lógica .

En efecto, en otro caso habría un ordinal η y una sentencia σ tales que $(\sigma \wedge \neg\sigma) \in T_\eta$. Pero entonces $T \models (\sigma \wedge \neg\sigma)$, pues $T_\eta = T_1 = \{\varphi : T \models \varphi\}$.

Así pues, T es consistente en ω-lógica pero no tiene ningún ω-modelo.

Hay un concepto relacionado con los de ω-completud y consistencia en ω-lógica, pero distinto de ambos: la ω-consistencia.

1.24 Definición : ω-consistencia

Un conjunto de sentencias T es ω-consistente si no hay ninguna fórmula $\varphi(x)$ tal que $T \models \varphi(\bar{n})$ para cada $n \in \omega$ y, al mismo tiempo, $T \models \exists x(Nx \wedge \neg\varphi(x))$.

Gödel introdujo el concepto de ω-consistencia al formular sus teoremas de incompletud. Mostró que ninguna extensión recursiva y ω-consistente de la aritmética de Peano, AP, es completa. Posteriormente Rosser mejoró los teoremas de Gödel eliminando el requisito de ω-consistencia y sustituyéndolo por el de consistencia.

1.25. Lemas

Si T es una teoría numerable, entonces :

(1) Si T es ω-consistente, T es consistente .

(2) Si T es consistente en ω-lógica, T es ω-consistente.

(3) Si T es completa y consistente:
T es ω-completa si y sólo si T es ω-consistente.

(4) Si T incluye los axiomas de la ω-lógica,
T es consistente en ω-lógica si y sólo si T posee una extensión consistente y ω-completa.

(5) Si T incluye los axiomas de la ω-lógica y T es completa,
T es consistente en ω-lógica si y sólo si T es ω-consistente.

Pruebas:

(1) es inmediato . (2) se sigue del teorema de completud para ω-lógica (1.22) habida cuenta de que una teoría ω-inconsistente no puede tener ningún ω-modelo. (3) es inmediato a partir de las respectivas definiciones. (4) se obtiene de los teoremas 1.20 y 1.22 . (5) se sigue de los puntos previos.

Hay teorías consistentes pero ω-inconsistentes y , lo que es más interesante, hay teorías ω-inconsistentes que incluyen los axiomas de la ω-lógica pero no son consistentes en ω-lógica, de manera que no son extensibles a ninguna teoría ω-completa y consistente.

1.26. Ejemplo

Hay una teoría numerable que extiende a la aritmética de Peano , incluye todos los axiomas de la ω-lógica y es ω-consistente, pero no es consistente en ω-lógica. No tiene, por tanto, ningún ω-modelo ni ninguna extensión consistente ω-completa.

Prueba:

Recordemos que $\mathbb{N} = \langle \omega, 0, S, +, \cdot, < \rangle$.
Sea $\mathbb{N}^*$ la expansión de $\mathbb{N}$ al tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}} \cup \{N\}$ en la que $N^{\mathbb{N}^*} = \omega$, y definamos $AP^* = AP \cup \{\forall x\, Nx\}$. AP^* es la aritmética de Peano en el tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}} \cup \{N\}$.
Definamos a continuación:

$$\Sigma = AP^* \cup \{\forall x(Nx \rightarrow \varphi(x)) : \text{ para cada } n \in \omega,\ AP^* \models \varphi(\bar{n})\} .$$

Σ no es completa , pues el conjunto de números de Gödel de sus sentencias es definible en $\mathbb{N}^*$ y la teoría de $\mathbb{N}^*$ no lo es . Hay por tanto una sentencia σ tal que

$$\Sigma \not\models \sigma \quad \text{pero} \quad \mathbb{N}^* \models \sigma .$$

Sea entonces $T = AP^* \cup \{\neg\sigma\}$. Veamos que T tiene las propiedades anunciadas.

(1) T incluye todos los axiomas de la ω-lógica.

Esto es obvio dado que todos ellos son consecuencias de AP^*.

(2) T es inconsistente en ω-lógica.

La razón es que T no posee ningún ω-modelo. En efecto, el único ω-modelo de AP^* es $\mathbb{N}^*$, pero $\mathbb{N}^*$ no es un modelo de T.

(3) T es ω-consistente.

Supongamos que para cada $n \in \omega$, $T \models \varphi(\bar{n})$ y que $T \models \exists x(Nx \wedge \neg\varphi(x))$. Tenemos que para cada $n \in \omega$,

$$AP^* \models (\neg\sigma \longrightarrow \varphi(\bar{n}))$$

en cuyo caso

$$(\neg\sigma \longrightarrow \forall x(Nx \longrightarrow \varphi(x))) \in \Sigma$$

Pero al mismo tiempo

$$AP^* \models (\neg\sigma \longrightarrow \exists x(Nx \wedge \neg\varphi(x)))$$

y, por tanto,

$$\Sigma \models (\neg\sigma \longrightarrow \exists x(Nx \wedge \neg\varphi(x))).$$

Entonces concluimos que $\Sigma \models \sigma$, en contradicción con la hipótesis inicial sobre σ. Por tanto, (3) está justificado.

2. ω-LOGICA Y ANALISIS

El más fructífero campo de aplicación de la ω-lógica es el análisis, o aritmética de segundo orden. Es el estudio del modelo

$$\mathcal{O}(\omega) = \langle \omega \cup P(\omega), \omega, 0, S, +, \cdot, <, \in \rangle$$

y diversas teorías que tienen a $\mathcal{O}(\omega)$ como modelo principal.

Este apartado está destinado a utilizar resultados sobre $\mathcal{O}(\omega)$ y teorías del análisis a efectos de comparar ω-lógica y lógica de primer orden y obtener información adicional sobre la complejidad de las consecuencias en ω-lógica de conjuntos recursivamente enumerables de premisas.

Precisaremos en primer lugar la definición de la estructura $\mathcal{O}(\omega)$.

2.1 Definición

El tipo de semejanza de $\mathcal{O}(\omega)$ consta, además de los signos $0, S, +, \cdot, <$, de dos predicados, un predicado monádico N cuya interpretación en $\mathcal{O}(\omega)$ es ω y un predicado diádico ε que se interpreta en $\mathcal{O}(\omega)$ como la relación de pertenencia entre números naturales y conjuntos de números naturales, relación a la que nos referimos con " $\in$ ".

Si bien en la construcción usual de ω en teoría de conjuntos resulta que $\omega \subseteq P(\omega)$, aquí es conveniente admitir que $\omega \cap P(\omega) = \phi$, de manera que ningún número natural sea al mismo tiempo un conjunto de números naturales.

Las operaciones $S, +, \cdot$ se suponen extendidas a $P(\omega)$ de modo arbitrario. Por ejemplo,

$S(a) = 0$	para	$a \notin \omega$.		
$a + b = 0$	para	$a \notin \omega$	o	$b \notin \omega$.
$a \cdot b = 0$	para	$a \notin \omega$	o	$b \notin \omega$.

La definibilidad de los conjuntos de números naturales mediante fórmulas de segundo orden en el modelo

$$\mathbb{N} = \langle \omega, 0, s, +, \cdot, < \rangle$$

puede reducirse a definibilidad en primer orden en el modelo $\mathcal{P}(\omega)$. En particular, tenemos correlatos en primer orden (en el tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$) de las fórmulas Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_n y Π^1_n del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$. Esto se precisa en las siguientes definiciones:

2.2 Definiciones

(1) Las fórmulas acotadas del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ son las obtenibles con las siguientes reglas:

(i) Toda fórmula atómica es acotada.

(ii) Si φ, ψ son fórmulas acotadas, $\neg\varphi$ y $(\varphi \wedge \psi)$ son fórmulas acotadas.

(iii) Si φ es una fórmula acotada, $\exists x(x < y \wedge \varphi)$ es una fórmula acotada y $\forall x(x < y \longrightarrow \varphi)$ es una fórmula acotada.

(2) Las fórmulas Σ^0_n y Π^0_n del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ son las obtenibles con las siguientes reglas:

(i) Las fórmulas Σ^0_0 y las fórmulas Π^0_0 son las fórmulas acotadas.

(ii) φ es Σ^0_{n+1} si y sólo si hay una fórmula ψ que es Π^0_n y $\varphi = \exists x_1 \ldots x_k(Nx_1 \wedge \ldots \wedge Nx_k \wedge \psi)$

(iii) φ es Π^0_{n+1} si y sólo si hay una fórmula ψ que es Σ^0_n y $\varphi = \forall x_1 \ldots x_k(Nx_1 \wedge \ldots \wedge Nx_k \longrightarrow \psi)$.

(3) Las fórmulas Σ^1_n y Π^1_n del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ son las obtenibles con las siguientes reglas:

(i) Las fórmulas Σ^1_0 y las fórmulas Π^1_0 son las mismas, a saber, las fórmulas que son Σ^0_n para algún número natural n.

(ii) φ es Σ^1_{n+1} si y sólo si hay una fórmula ψ que es Π^1_n y $\varphi = \exists x_1 \ldots x_k(\neg Nx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Nx_k \longrightarrow \psi)$.

(iii) φ es Π^1_{n+1} si y sólo si hay una fórmula ψ que es Σ^1_n y $\varphi = \forall x_1 \ldots x_k(\neg Nx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Nx_k \wedge \psi))$.

2.3 Observación

A menos que se diga explícitamente lo contrario, las expresiones " fórmula Σ^0_n " , "fórmula Π^0_n " , "fórmula Σ^1_n" y "fórmula Π^1_n " remitirán a los conceptos usuales definidos en el apartado de notación y no a los de la definición 2.2 . Así, una fórmula Σ^1_n será una fórmula de segundo orden del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$. Los usos acordes con la definición 2.2 se puntualizarán en cada caso, diciendo, por ejemplo, "fórmula Σ^1_n de primer orden del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ " en vez de "fórmula Σ^1_n " . Definibilidad en $\mathcal{P}(\omega)$ será definibilidad en primer orden.

2.4 Lema

Sea $A \subseteq \omega^m$, donde $m \geqslant 1$.

(1) Si A es Σ^0_n (Π^0_n, Σ^1_n , Π^1_n) entonces A es definible en $\mathcal{P}(\omega)$ mediante una fórmula (de primer orden y de tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$) Σ^0_n (respectivamente, Π^0_n , Σ^1_n , Π^1_n) .

(2) Si A es aritmético, A es definible en $\mathcal{P}(\omega)$ mediante una fórmula (de primer orden) todos cuyos cuantificadores están relativizados a N .

(3) Si A es analítico, A es definible (en primer orden) en $\mathcal{P}(\omega)$.

Prueba:

Los puntos (2) y (3) se siguen del punto (1), habida cuenta que toda relación aritmética es Σ^0_n para algún n y toda relación analítica es Σ^1_n para algún n . Para justificar

(1) obsérvese que las fórmulas de segundo orden (cuyas variables de segundo orden son monádicas) del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ poseen una traducción natural a fórmulas de primer orden del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$. Para cada variable x de primer orden y de índice j sea x' la variable de primer orden de índice $2j$, y para cada variable monádica de segundo orden y de índice j X, sea X' la variable de primer orden de índice $2j+1$. A cada término t del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ corresponde un término t' del mismo tipo de semejanza, resultado de sustituir simultáneamente sus variables $x_1,\dots,x_k$ por $x'_1,\dots,x'_k$. Asignamos entonces a cada fórmula de segundo orden del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ (todas cuyas variables de segundo orden sean monádicas) una fórmula de primer orden del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ de acuerdo con lo siguiente :

(i) Si φ es una fórmula atómica de primer orden, φ' es el resultado de sustituir las variables $x_1,\dots,x_k$ de φ por las variables $x'_1,\dots,x'_k$ (simultáneamente).

(ii) $(Xt)' = t' \in X'$

(iii) $(\neg\varphi)' = \neg\varphi'$ y $(\varphi \wedge \psi)' = (\varphi' \wedge \psi')$.

(iv) $(\exists x\varphi)' = \exists x'(Nx' \wedge \varphi')$

(v) $(\exists X\varphi)' = \exists X'(\neg NX' \wedge \varphi')$

Entonces para cada fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_k)$ del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ todas cuyas variables de segundo orden son monádicas, y para cualesquiera $m_1,\dots,m_k \in \omega$,

$$\mathbb{N} \models \varphi(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_k) \text{ si y sólo si } \mathcal{P}(\omega) \models \varphi'(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_k).$$

Además, si φ es Σ^0_n (Π^0_n, Σ^1_n, Π^1_n), φ' es, de acuerdo con la definición 2.2, (equivalente a) una fórmula Σ^0_n (respectivamente, Π^0_n, Σ^1_n, Π^1_n).

Establecido este lema, comenzamos el estudio de la la relación de consecuencia en ω-lógica. En primer lugar exponemos un resultado conocido del que sacaremos partido más adelante.

2.5 Lema

La teoría completa de números es Δ^1_1.

Prueba:

Recordemos que la teoría completa de números, TCN, es la teoría del modelo $\mathbb{N}$. Debemos justificar que el conjunto de los números de Gödel de las sentencias de TCN es Σ^1_1 y Π^1_1. A tal efecto, observemos que :

(1) TCN es el único conjunto de sentencias Σ del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$ que verifica las siguientes condiciones:

(i) Σ es consistente.

(ii) $AP \subseteq \Sigma$.

(iii) Si $\Sigma \models \varphi$, entonces $\varphi \in \Sigma$.

(iv) Si para cada $n \in \omega$, $\Sigma \models \varphi(\bar{n})$, entonces $\Sigma \models \forall x\, \varphi(x)$.

La condición (iv) espresa la ω-completud pero sin necesidad del predicado N. En el contexto de esta prueba entenderemos por ω-completud la condición (iv).

De acuerdo con (1), tenemos

(2) $\varphi \in$ TCN si y sólo si hay una extensión consistente Φ de AP que es ω-completa y está cerrada bajo consecuencia tal que $\varphi \in \Phi$.

(3) $\varphi \in$ TCN si y sólo si para cada extensión consistente Φ de AP que es ω-completa y está cerrada bajo consecuencia, $\varphi \in \Phi$.

Podemos obtener fórmulas $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$ y $\alpha_4(x)$ (respectivamente Π^0_1, Π^0_1, Π^0_3 y Π^0_1) del tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}}$, tales que para cada $A \subseteq \omega$:

(i) $\mathbb{N} \models \alpha_1(x)\,[A]$ si y sólo si $\{Gö(\sigma) : \sigma \in AP\} \subseteq A$.

(ii) $\mathbb{N} \models \alpha_2(x)\,[A]$ si y sólo si A es el conjunto de los números de Gödel de un conjunto consistente de sentencias de tipo $\tau_{\mathbb{N}}$.

(iii) $\mathbb{N} \models \alpha_3(x)\,[A]$ si y sólo si A es el conjunto de los números de Gödel de un conjunto ω-completo de **sentencias** de tipo $\tau_{\mathbb{N}}$.

(iv) $\mathbb{N} \models \alpha_4(x)\,[A]$ si y sólo si A es el conjunto de los números de Gödel de un conjunto de sentencias de tipo $\tau_{\mathbb{N}}$ que está cerrado bajo consecuencia.

Usando estas fórmulas, concluimos, por (2) y (3) que

(4) $n \in \{Gö(\sigma) : \sigma \in TCN\}$ si y sólo si

$$\mathbb{N} \models \exists X(\alpha_1(X) \wedge \alpha_2(X) \wedge \alpha_3(X) \wedge \alpha_4(X) \wedge X\bar{n})$$

(5) $n \in \{Gö(\sigma) : \sigma \in TCN\}$ si y sólo si

$$\mathbb{N} \models \forall X(\alpha_1(X) \wedge \alpha_2(X) \wedge \alpha_3(X) \wedge \alpha_4(X) \longrightarrow X\bar{n})$$

(4) muestra que $\{Gö(\sigma) : \sigma \in TCN\}$ es Σ^1_1 y (5) que es Π^1_1. Por tanto, es Δ^1_1.

A la vista de los teoremas de **incompletud de Gödel para la aritmética**, podría pensarse que un resultado de incompletud para teorías verdaderas en $\mathcal{P}(\omega)$ se debe a su contenido estrictamente aritmético, es decir, a los enunciados de tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{N}} \cup \{N\}$ relativizados a N que contenga. Pero este contenido aritmético es a lo sumo TCN^N. Por tanto, es atinente el siguiente resultado:

2.6 <u>Lema</u>

Si T es un conjunto analítico de sentencias del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ (en particular, si T es recursivamente enumerable) y $\mathcal{P}(\omega) \models T$, entonces $T \cup TCN^N$ es incompleto.Hay, por tanto, una sentencia σ tal que

$\mathcal{P}(\omega) \models \sigma$ pero $T \cup TCN^N \not\models \sigma$.

Prueba:

Como para cada axioma σ de la teoría Q (véase el apartado de notación, sección 3) tenemos $T \cup TCN^N \models \sigma^N$, podemos usar el lema del punto fijo para $T \cup TCN^N$. Recordemos que este lema garantiza que para cada fórmula $\varphi(x)$ hay una sentencia σ tal que

$$T \cup TCN^N \models (\sigma \longleftrightarrow \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)) .$$

Así, la sentencia σ expresa en $T \cup TCN^N$ que ella misma tiene la propiedad que $\varphi(x)$ simboliza.

Por los lemas 2.5 y 2.4 sabemos que $\{Gö(\sigma) : \sigma \in TCN\}$ es definible (en primer orden) en $\mathcal{P}(\omega)$. Por tanto, también lo es $\{Gö(\sigma) : \sigma \in TCN^N\}$. Por hipótesis T es analítico , de manera que , por el lema 2.4, también $\{Gö(\sigma) : \sigma \in T\}$ es definible en $\mathcal{P}(\omega)$. Por tanto , $\{Gö(\sigma) : \sigma \in T \cup TCN^N\}$ es definible en $\mathcal{P}(\omega)$. Hay, pues, una fórmula (de primer orden) del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$, $\varphi(x)$, tal que

(1) $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\bar{n})$ si y sólo si n es el número de Gödel de una sentencia ψ del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ tal que $T \cup TCN^N \models \psi$.

Aplicando ahora el lema del punto fijo a $\neg\varphi(x)$ obtenemos una sentencia σ tal que

(2) $T \cup TCN^N \models (\sigma \longleftrightarrow \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner))$.

En ese caso

(3) $T \cup TCN^N \not\models \sigma$.

En efecto, si fuera $T \cup TCN^N \models \sigma$, tendríamos $T \cup TCN^N \models \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ y así $\mathcal{P}(\omega) \models \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$, pues $\mathcal{P}(\omega) \models T \cup TCN^N$. Pero en ese caso , por (1), $T \cup TCN^N \not\models \sigma$.

(4) $T \cup TCN^N \not\models \neg\sigma$.

Pues si $T \cup TCN^N \models \neg\sigma$, tenemos , por (2) , que $T \cup TCN^N \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ y así $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$. En ese caso, por (1) , $T \cup TCN^N \models \sigma$, en contra de (3) .

De (3) y (4) se sigue la incompletud de $T \cup TCN^N$. Esto justifica,entonces, el lema 2.6 .

La teoría TCN^N es ω-completa y , por tanto, son las mismas sus consecuencias en primer orden que en ω-lógica. Que obtengamos más consecuencias de $T \cup TCN^N$ en ω-lógica que en primer orden depende simplemente de que $T \cup TCN^N$ sea ω-completa o no. Por tanto, no puede obtenerse ningún resultado general acerca de sentencias no demostrables en primer orden pero sí en ω-lógica. Sin embargo, sí hay resultados de este tipo en la medida en que se precise la teoría T . Próximamente obtendremos algunos.

El siguiente teorema proporciona una cota a la complejidad de las consecuencias en ω-lógica de un conjunto recursivamente enumerable de premisas. Posteriormente se mostrará que no puede ser mejorado. Estos resultados hacen más preciso el ya conocido de que la ω-lógica no es recursivamente enumerable para consecuencia.

2.7 <u>Teorema</u>

Sea T un conjunto de sentencias de tipo de semejanza recursivo τ .

(1) Si T es analítico, el conjunto de consecuencias en ω-lógica de T también es analítico.

(2) Si T es Π^1_1 , (en particular, si T es recursivamente

enumerable) el conjunto de consecuencias en ω-lógica de T es también Π^1_1 .

Prueba:

Sea Δ el conjunto de los axiomas de la ω-lógica y recordemos que Δ es recursivo. Por los teoremas 1.20 y 1.21 tenemos

(1) T tiene un ω-modelo si y sólo si T tiene una extensión Φ consistente y ω-completa tal que $\Delta \subseteq \Phi$.

y , por tanto,

(2) $T \models_{\omega} \sigma$ si y sólo si para cada extensión Φ de T , consistente y ω-completa, que incluye a Δ , $\sigma \in \Phi$.

Si T es analítico hay una fórmula (de segundo orden) $\alpha_1(X)$ tal que

(i) $\mathbb{N} \models \alpha_1(X)\,[A]$ si y sólo si $\{G\ddot{o}(\sigma) : \sigma \in T\} \subseteq A$.

Si T es Π^1_1 podemos puntualizar que $\alpha_1(X)$ es Π^1_1 .

Hay, además, fórmulas $\alpha_2(X)$, $\alpha_3(X)$, $\alpha_4(X)$ y $\alpha_5(X,y)$, respectivamente Π^0_3, Π^0_1, Π^0_1 y Σ^0_1 tales que:

(ii) $\mathbb{N} \models \alpha_2(X)\,[A]$ si y sólo si A es el conjunto de los números de Gödel de un conjunto ω-completo de sentencias de tipo de semejanza τ .

(iii) $\mathbb{N} \models \alpha_3(X)\,[A]$ si y sólo si A es el conjunto de los números de Gödel de un conjunto consistente de sentencias de tipo de semejanza τ .

(iv) $\mathbb{N} \models \alpha_4(X)\,[A]$ si y sólo si $\{G\ddot{o}(\sigma) : \sigma \in \Delta\} \subseteq A$.

(v) $\mathbb{N} \models \alpha_5(X,y)\,[A,n]$ si y sólo si n es el número de Gödel de una sentencia de tipo τ que es deducible de premisas cuyos números de Gödel están en A .

En virtud de (2), tenemos entonces

(3) $n \in \{Gö(\sigma) : T \models_{\omega} \sigma\}$ si y sólo si

$\mathbb{N} \models \forall x(\alpha_1(x) \wedge \alpha_2(x) \wedge \alpha_3(x) \wedge \alpha_4(x) \longrightarrow \alpha_5(x,\bar{n}))$

y , por tanto,

$\{Gö(\sigma) : T \models_{\omega} \sigma\}$ es analítico , y es Π^1_1 si T es Π^1_1 .

A continuación obtenemos un resultado de incompletud en ω -lógica. Su formulación original se debe a Rosser.

2.8 Teorema

Si T es un conjunto analítico de sentencias del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ (en particular, si T es recursivamente enumerable) y $\mathcal{P}(\omega) \models T$, hay una sentencia σ tal que $T \not\models_{\omega} \sigma$ y $T \not\models_{\omega} \neg\sigma$. Por tanto, hay también una sentencia σ tal que $\mathcal{P}(\omega) \models \sigma$ pero $T \not\models_{\omega} \sigma$.

Prueba:

Si T es analítico, también $T \cup AP^N$ es analítico y, por el teorema 2.7, $\{\sigma : T \cup AP^N \models_{\omega} \sigma\}$ es analítico. Por el teorema 2.4 , $\{Gö(\sigma) : T \cup AP^N \models_{\omega} \sigma\}$ es definible (en primer orden) en $\mathcal{P}(\omega)$. Hay , pues, una fórmula $\varphi(x)$ del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ tal que para cada $n \in \omega$,

(1) $n \in \{G"(\sigma) : T \cup AP^N \models_{\omega} \sigma\}$ si y sólo si $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\bar{n})$.

Por tanto, para cada sentencia σ ,

(2) $T \cup AP^N \models_{\omega} \sigma$ si y sólo si $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$.

Aplicando ahora el lema del punto fijo a $\neg\varphi(x)$, obtenemos una sentencia σ tal que

(3) $T \cup AP^N \models (\sigma \leftrightarrow \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner))$

Veamos que ni σ ni $\neg\sigma$ son consecuencias de

$T \cup AP^N$ en ω-lógica , en cuyo caso tampoco lo serán de T .

(4) $T \cup AP^N \not\models_{\omega} \sigma$.

En efecto, si $T \cup AP^N \models_{\omega} \sigma$ resulta, por (3) , que $T \cup AP^N \models_{\omega} \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$. Como $\mathcal{P}(\omega)$ es un ω-modelo de $T \cup AP^N$ tenemos que $\mathcal{P}(\omega) \models \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$. Pero entonces, por (2) , $T \cup AP^N \not\models_{\omega} \sigma$.

(5) $T \cup AP^N \not\models_{\omega} \neg\sigma$.

Supongamos que $T \cup AP^N \models_{\omega} \neg\sigma$. Por (3) , tenemos que $T \cup AP^N \models_{\omega} \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ y , como $\mathcal{P}(\omega)$ es un ω-modelo de $T \cup AP^N$, $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$. En ese caso , por (2) , $T \cup AP^N \models_{\omega} \sigma$, en contra de (4) .

De (4) y (5) se sigue , como ya se ha indicado, el resultado.

A la vista de estos últimos teoremas, concluimos que no hay ninguna axiomatización razonable de la teoría de $\mathcal{P}(\omega)$ ni en primer orden ni en ω-lógica. Sin embargo, hay ciertos fragmentos de la teoría de $\mathcal{P}(\omega)$ que sí admiten axiomatización, incluso recursiva , y para ellos la ω-lógica es más fructífera que la lógica de primer orden. En particular vamos a considerar una teoría recursivamente axiomatizable que extiende a la aritmética de Peano e incluye los axiomas de extensionalidad, comprensión e inducción. La definimos a continuación.

2.9 <u>Definición :</u> A_2

Los axiomas de la teoría A_2 son los siguientes:

(1) Axiomas estructurales.

(i) $N0 \wedge \forall x(Nx \longrightarrow NSx)$

(ii) $\forall xy(Nx \wedge Ny \longrightarrow N\,x+y \wedge N\,x\cdot y)$

(iii) $\forall xy(\neg Nx \vee \neg Ny \longrightarrow x + y \simeq 0 \wedge x \cdot y \simeq 0)$

(iv) $\forall x(\neg Nx \longrightarrow Sx \simeq 0)$

(v) $\forall xy(x < y \longrightarrow Nx \wedge Ny)$

(vi) $\forall xy(x \varepsilon y \longrightarrow Nx \wedge \neg Ny)$

(2) σ^N para cada axioma σ de la aritmética de Peano, AP .

(3) Axioma de extensionalidad

$$\forall xy(\neg Nx \wedge \neg Ny \wedge \forall u(u \varepsilon x \longleftrightarrow u \varepsilon y) \longrightarrow x \simeq y)$$

(4) Principo de inducción

$$\forall x(0 \varepsilon x \wedge \forall y(y \varepsilon x \longrightarrow Sy \varepsilon x) \longrightarrow \forall y(Ny \longrightarrow y \varepsilon x))$$

(5) Axioma de comprensión

Para cada fórmula $\varphi(u,x_1,\ldots,x_n)$ en la que la variable y no está libre :

$$\forall x_1 \ldots x_n \ \exists y(\neg Ny \wedge \forall u(u \varepsilon y \longleftrightarrow Nu \wedge \varphi(u,x_1,\ldots,x_n))).$$

2.10 Observaciones

Todo ω-modelo de A_2 es isomorfo a una subestructura de $\mathcal{P}(\omega)$. En efecto, si $\mathfrak{A}$ es un ω-modelo de A_2 la inmersión F de $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{P}(\omega)$ viene dada por

$F(\bar{n}^{\mathfrak{A}}) = n$ para cada número natural n .

$F(B) = \{n \in \omega : \bar{n}^{\mathfrak{A}} \varepsilon^{\mathfrak{A}} B\}$ para cada $B \in A - N^{\mathfrak{A}}$.

Por tanto, los ω-modelos de A_2 sólo pueden diferir en los subconjuntos de ω que posean . Un clásico resultado de Kreisel, Gandy y Tait establece que los conjuntos de números naturales presentes en todos los ω-modelos de A_2 son precisamente los hiperaritméticos (los Δ^1_1) .

Las sentencias que tienen todos los cuantificadores relativizados al predicado N y son verdaderas en $\mathcal{P}(\omega)$

son verdaderas en cualquier ω-modelo de A_2 . Pero además, las sentencias Π^1_1 (en el sentido de la definición 2.2) verdaderas en $\mathcal{P}(\omega)$ son verdaderas en cualquier ω-modelo de A_2 . La razón es que, como ya se ha indicado, si $\mathfrak{A}$ es un ω-modelo de A_2 , hay una subestructura $\mathfrak{B}$ de $\mathcal{P}(\omega)$ tal que $\mathfrak{A} \underline{\subseteq} \mathfrak{B}$ y $N^{\mathfrak{B}} = \omega = N^{\mathcal{P}(\omega)}$ (y las sentencias universales se preservan bajo subestructuras) .Por tanto, si φ es una sentencia Σ^1_1 (en el sentido de 2.2) verdadera en algún ω-modelo de A_2 , φ es verdadera en $\mathcal{P}(\omega)$.

Usaremos a continuación esta última observación para obtener resultados sobre la complejidad de $\{\sigma : A_2 \models_{\omega} \sigma\}$, y con ello podremos fijar una cota inferior a la posible complejidad de las consecuencias en ω-lógica de un conjunto recursivo de premisas.

2.11 Teorema

El conjunto de las consecuencias en ω-lógica de A_2 no es Σ^1_1.

Prueba:

Supongamos que $\{\sigma : A_2 \models_{\omega} \sigma\}$ es Σ^1_1 . Hay , por 2.4, una fórmula Σ^1_1 (en el sentido de 2.2) , $\varphi(x)$, tal que para cada $n \in \omega$,

(1) $n \in \{G\ddot{o}(\sigma) : A_2 \models_{\omega} \sigma\}$ si y sólo si $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\bar{n})$.

y así, para cada sentencia σ ,

(2) $A_2 \models_{\omega} \sigma$ si y sólo si $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$.

Podemos aplicar el lema del punto fijo a A_2 y $\neg\varphi(x)$ obteniendo así una sentencia σ tal que

(3) $A_2 \models (\sigma \longleftrightarrow \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner))$.

Veamos ahora que esta situación es contradictoria:

(4) $A_2 \not\models_{\omega} \sigma$.

En efecto, si $A_2 \models_{\omega} \sigma$, tenemos que $A_2 \models_{\omega} \neg \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$, por (3), y que $\mathcal{O}(\omega) \models \neg \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$, pues $\mathcal{O}(\omega)$ es un ω-modelo de A_2 . Pero , por (2) , $\mathcal{O}(\omega) \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$.

(5) $A_2 \models_{\omega} \sigma$.

Por (4) sabemos que hay un ω-modelo $\mathfrak{A}$ de A_2 tal que $\mathfrak{A} \models \neg \sigma$. Por (3) , $\mathfrak{A} \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$. Pero $\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ es una sentencia Σ^1_1 y, de acuerdo con lo indicado en la observación previa, tenemos entonces que $\mathcal{O}(\omega) \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$. Por (2) concluimos entonces que $A_2 \models_{\omega} \sigma$.

La contradicción entre (4) y (5) proviene de admitir que $\{\sigma : A_2 \models_{\omega} \sigma\}$ es Σ^1_1 . Por tanto, está justificado el teorema.

Con estos resultados podemos mejorar el teorema 1.6, acotando la complejidad de las consecuencias en ω-lógica de un conjunto recursivo, o recursivamente enumerable, de premisas.

2.12 <u>Corolario</u>

(1) Si T es un conjunto recursivo de sentencias, el conjunto de consecuencias en ω-lógica de T es Π^1_1 .

(2) Hay un conjunto recursivo de sentencias, en tipo de semejanza finito, cuyo conjunto de consecuencias en ω-lógica no es Σ^1_1 .

Prueba:

(1) se sigue de 2.7 y (2) de 2.11 .

2.13 <u>Corolario</u>

(1) En todo tipo de semejanza recursivo el conjunto de sentencias válidas en ω-lógica es Π^1_1 .

(2) Hay un tipo de semejanza finito en el que el conjunto de sentencias válidas en ω-lógica no es Σ^1_1 .

Prueba:

(1) es consecuencia inmediata del punto (1) de 2.12 . (2) se obtiene del punto (2) de 2.12 y del teorema II.23 . En efecto, como el tipo de semejanza de la ω-lógica es finito, podemos usar II.23 para obtener una sentencia σ en un tipo de semejanza finito τ' que extiende al tipo de semejanza τ de $\wp(\omega)$ y verifica :

$$\{\varphi : A_2 \models_\omega \varphi\} = \{\varphi : \varphi \text{ es de tipo } \tau \text{ y } \sigma \models_\omega \varphi^M\}$$

donde M es un predicado monádico de τ' . Si el conjunto de sentencias válidas en tipo τ' fuera Σ^1_1 , también sería Σ^1_1 el conjunto

$$\{\varphi : \varphi \text{ es de tipo } \tau \text{ y } \sigma \models_\omega \varphi^M\}$$

y por tanto $\{\varphi : A_2 \models_\omega \varphi\}$ sería Σ^1_1 . Pero ya sabemos que éste no es el caso.

La ω-lógica permite extraer más consecuencias de A_2 que la lógica de primer orden . Esto es claro dado que para cada sentencia σ tal que $\mathbb{N} \models \sigma$ tenemos $A_2 \models_\omega \sigma^N$, pero hay sentencias σ verdaderas en $\mathbb{N}$ y tales que $A_2 \not\models \sigma^N$. Pero aunque añadamos a A_2 toda la teoría completa de números, siguen habiendo sentencias obtenibles en ω-lógica pero no en primer orden. Esto es lo que expone este último corolario :

2.14 <u>Corolario</u>

Hay una sentencia σ tal que $A_2 \models_\omega \sigma$ pero $A_2 \cup TCN^N \not\models \sigma$.

Prueba:

Sea $T_1 = \{\sigma : A_2 \cup TCN^N \models \sigma\}$ y $T_2 = \{\sigma : A_2 \models_\omega \sigma\}$. Como $TCN^N \subseteq T_2$, tenemos que $T_1 \subseteq T_2$. Por el lema 2.5 sabemos que TCN es Δ^1_1 . Por tanto, también es Δ^1_1 $A_2 \cup TCN^N$ y , en consecuencia, T_1 . Pero por 2.11 sabemos que T_2 no es Δ^1_1 . Así $T_1 \neq T_2$ y hay, entonces, una sentencia σ tal que $\sigma \in T_2$ pero $\sigma \notin T_1$. Entonces $A_2 \models_{\omega} \sigma$, pero $A_2 \cup TCN^N \not\models \sigma$.

2.15 Observación

La situación descrita en los corolarios 2.12 y 2.13 es análoga a la que se da en primer orden, cambiando Π^1_1 por Σ^0_1 y Σ^1_1 por Π^0_1 . En ω-lógica el conjunto de sentencias válidas es siempre Π^1_1 pero no siempre hiperaritmético (Δ^1_1) . En lógica de primer orden el conjunto de sentencias válidas es siempre recursivamente enumerable (Σ^0_1) pero no siempre recursivo (Δ^0_1) . Otro tanto ocurre para las consecuencias de un conjunto recursivo o recursivamente enumerable.

Este paralelismo se ve reforzado por la representabilidad en las teorías AP y A_2 . A_2 es una teoría para $\mathcal{P}(\omega)$ análoga a AP para $\mathbb{N}$. Los conjuntos representables en AP son los recursivos y los débilmente representables son los recursivamente enumerables. En Grzegorczyk & Mostowski & Ryll-Nardzewski (1958) se establece que los conjuntos representables en $\{\sigma : A_2 \models_{\omega} \sigma\}$ son los hiperaritméticos (Δ^1_1) y que los débilmente representables son los Π^1_1 .

Esto sugiere que hiperaritmeticidad corresponde en ω-lógica a recursividad en primer orden y que el concepto de conjunto Π^1_1 en ω-lógica corresponde a enumerabilidad recursiva en primer orden . Sin embargo este paralelismo no es total. En otros contextos hiperaritmeticidad en ω-lógica es un correlato de finitud en primer orden. Así, por ejemplo, una versión del teorema de compacidad para ω-lógica debida a Kreisel (véase Kreisel (1965)) establece que:

Si T es Π^1_1 y cada subconjunto hiperaritmético de T posee un ω-modelo , T posee un ω-modelo.

2.16 Observación

Una lógica muy parecida a la ω-lógica es la lógica de los números enteros, que llamaremos $\mathbb{Z}$-lógica. Se trata de la lógica asociada al modelo

$$\mathbb{Z} = \langle Z , S \rangle$$

donde Z es el conjunto de los números enteros y S es la función de sucesión en Z (usamos el mismo signo para designar a esta función que para la función de sucesión en ω, pero son funciones distintas) .

El tipo de semejanza de $\mathbb{Z}$ consta de un único signo funcional monádico , S . Los tipos de semejanza a los que se aplica la $\mathbb{Z}$-lógica poseen el signo S y un predicado monádico U . Los $\mathbb{Z}$-modelos son las estructuras $\mathfrak{A}$ en las que $U^{\mathfrak{A}}$ es $\{S\}$-cerrado y

$$\langle Z , S \rangle \cong \langle U^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \upharpoonright U^{\mathfrak{A}} \rangle \quad .$$

La teoría de $\mathbb{Z}$ es recursivamente axiomatizable. Un conjunto recursivo de axiomas es el siguiente:

(i) $\forall xy(Sx \approx Sy \longrightarrow x \approx y)$

(ii) $\forall x \; \exists y \; Sy \approx x$

(iii) $\forall x \neg x \approx S^n x$ para cada $n \geq 1$,
donde $S^1 = S$ y $S^{n+1} = SS^n$.

$\mathbb{Z}$ es el único modelo de estos axiomas que omite el conjunto de fórmulas

$$\{ \neg S^n x \approx y \; : n \in \omega \}$$

donde ahora la notación S^n se extiende al caso $n = 0$ entendiendo que $S^0 x = x$.

Sea Δ el siguiente conjunto de sentencias :

(i) $\forall x \, Ux$

(ii) $\forall x(Ux \longrightarrow U S x)$

(iii) σ^U para cada axioma σ de la teoría de $\mathbb{Z}$.

Resulta entonces que :

$\mathfrak{A}$ es un $\mathbb{Z}$-modelo si y sólo si $\mathfrak{A}$ es un modelo de Δ que omite el conjunto de fórmulas $\{(Ux \wedge Uy)\} \cup \{\neg S^n x \simeq y : n \in \omega\}$.

La $\mathbb{Z}$-lógica posee un cálculo análogo al descrito en 1.14 para la ω-lógica. Los axiomas de la $\mathbb{Z}$-lógica son las sentencias del conjunto Δ y la regla infinitaria de inferencia correspondiente a la ω-regla, la $\mathbb{Z}$-regla, es:

$$\frac{\forall xy(\, Ux \wedge Uy \wedge S^n x \simeq y \longrightarrow \varphi(x,y))}{\forall xy(\, Ux \wedge Uy \longrightarrow \varphi(x,y))} \quad \text{para cada } n \in \omega .$$

que también puede formularse, de manera más simple, como :

$$\frac{\forall x(Ux \longrightarrow \varphi(x, S^n x))}{\forall xy(Ux \wedge Uy \longrightarrow \varphi(x,y))} \quad \text{para cada } n \in \omega .$$

3. LOGICA DEL BUEN ORDEN

La lógica del buen orden, $\mathcal{L}_{WO}$, es la lógica asociada a la clase WO de los buenos órdenes. El tipo de semejanza de WO consta de un único predicado diádico, $\underset{w}{<}$, para la correspondiente relación de buen orden y

WO $= \left\{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A}\right.$ es de tipo $\{\underset{w}{<}\}$ y $\underset{w}{<}^{\mathfrak{A}}$ es un buen orden de $\left. A \right\}$.

Llamaremos modelos bien ordenados a los WO-modelos. Estos son, pues, las estructuras $\mathfrak{A}$ cuyo tipo de semejanza incluye los signos $\underset{w}{<}$ y U (U es el predicado monádico propio de la lógica) y $\underset{w}{<}^{\mathfrak{A}}$ restringida a $U^{\mathfrak{A}}$ es un buen orden de $U^{\mathfrak{A}}$ (que es un conjunto no vacío).

La relación de consecuencia $\models_{WO}$ de $\mathcal{L}_{WO}$ está definida por

$\Sigma \models_{WO} \sigma$ si y sólo si todo modelo bien ordenado de Σ es un modelo de σ.

3.1 <u>Lema</u>

$\mathcal{L}_{WO}$ no es recursivamente compacta. Tampoco es recursivamente enumerable para consecuencia ni para validez.

Prueba:

El conjunto de sentencias

$$\{Uc_n : n \in \omega\} \cup \{c_{n+1} \underset{w}{<} c_n : n \in \omega\}$$

no tiene ningún modelo bien ordenado, aunque todo subconjunto finito suyo sí lo tiene. Por tanto $\mathcal{L}_{WO}$ no es recursivamente compacta. Por II.15 obtenemos que $\mathcal{L}_{WO}$ no es recursivamente enumerable para consecuencia. Como el tipo de semejanza de WO es finito, concluimos, por II.20, que $\mathcal{L}_{WO}$ tampoco es recursivamente enumerable para validez.

3.2 Observación

La teoría de WO, es decir el conjunto de sentencias verdaderas en todo modelo de la clase WO, no sólo posee una axiomatización recursiva, sino que es una teoría recursiva. (Véase Doner & Mostowski & Tarski (1978)). Un conjunto de axiomas para la teoría de WO es el siguiente:

(i) $\forall xyz(x \lessdot_{w} y \wedge y \lessdot_{w} z \longrightarrow x \lessdot_{w} z)$

(ii) Para cada fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n,x)$

$\forall x_1 \dots x_n(\exists x\, \varphi(x_1,\dots,x_n,x) \longrightarrow \exists x(\varphi(x_1,\dots,x_n,x) \wedge$

$\wedge \forall y(\varphi(x_1,\dots,x_n,y) \longrightarrow \neg\, y \lessdot_{w} x))) .$

(iii) $\forall xy(x \lessdot_{w} y \vee y \lessdot_{w} x \vee y \simeq x)$

La simplicidad de la teoría de WO contrasta con lo expuesto en 3.1 y aún más con los resultados que obtendremos en breve . Mostraremos que el conjunto de las sentencias válidas de $\mathcal{L}_{WO}$ en un cierto tipo de semejanza finito no es ni siquiera Δ^1_2 . Esto debe interpretarse como una nueva indicación de que es muy distinta la lógica $\mathcal{L}_K$ asociada a una clase K de estructuras, de la lógica de primer orden suplementada con la teoría de K .

3.3 Definición : Axiomas de $\mathcal{L}_{WO}$.

Para cada tipo de semejanza τ , los axiomas de $\mathcal{L}_{WO}$ de tipo τ son :

(i) $\exists x\, Ux$

(ii) $\forall xyz(Ux \wedge Uy \wedge Uz \wedge x \lessdot_{w} y \wedge y \lessdot_{w} z \longrightarrow x \lessdot_{w} z)$

(iii) Para cada fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n,x)$ de tipo τ ,

$\forall x_1 \dots x_n(\exists x(\varphi(x_1,\dots,x_n,x) \wedge Ux) \longrightarrow \exists x(\varphi(x_1,\dots,x_n,x) \wedge$

$\wedge Ux \wedge \forall y(\varphi(x_1,\dots,x_n,y) \wedge Uy \longrightarrow \neg y \lessdot_{w} x))) .$

(iv) $\forall xy(Ux \wedge Uy \longrightarrow x \lessdot_{w} y \vee y \lessdot_{w} x \vee x \simeq y) .$

Obsérvese que de (iii) ya se sigue que

$\forall x\ (\ Ux \longrightarrow \neg\ x \underset{w}{<} x\ )$.

Así , en todo modelo $\mathfrak{A}$ de estos axiomas , $U^{\mathfrak{A}}$ es un conjunto no vacío y $\underset{w}{<}^{\mathfrak{A}}$ (restringida a $U^{\mathfrak{A}}$) es un orden total de $U^{\mathfrak{A}}$. Además, por el grupo de axiomas (iii) , todo subconjunto no vacío de $U^{\mathfrak{A}}$ que sea definible en $\mathfrak{A}$ con parámetros posee un menor elemento en $\underset{w}{<}^{\mathfrak{A}}$. Sin embargo $\underset{w}{<}^{\mathfrak{A}}$ no tiene por qué ser un buen orden .

$\Delta_{WO}(\tau)$ será el conjunto de los axiomas de $\mathcal{L}_{WO}$ de tipo τ . Obsérvese que para todo modelo bien ordenado $\mathfrak{A}$ de tipo τ ,

$$\mathfrak{A} \models \Delta_{WO}(\tau\ ) .$$

3.4 <u>Definición</u>

Sea τ un tipo de semejanza . $\mathbf{S}_\tau$ es el conjunto de las secuencias de fórmulas $\langle\varphi_n\rangle_{n\in\omega}$ tales que para cada $n\in\omega$,

φ_n es una fórmula de tipo $\tau\cup\{\underset{w}{<}, U\}$ con a lo sumo las variables libres $v_0,\ldots,v_n$.

Si $\langle\varphi_n(v_0,\ldots,v_n)\rangle_{n\in\omega}\in \mathbf{S}_\tau$, $\langle\widehat{\varphi}_n\rangle_{n\in\omega}$ es la secuencia de sentencias definida como sigue:

(i) $\widehat{\varphi}_0 = \exists v_0(\ Uv_0 \wedge \varphi_0(v_0))$

(ii) $\widehat{\varphi}_{n+1} = \forall v_0\ldots v_n(Uv_0 \wedge \ldots \wedge Uv_n \wedge \varphi_n(v_0,\ldots,v_n)$
$\exists v_{n+1}(Uv_{n+1} \wedge \varphi_{n+1}(v_0,\ldots,v_{n+1}) \wedge v_{n+1} \underset{w}{<} v_n\ )\ )$

Estas definiciones nos permitirán ahora formular y probar un teorema que caracteriza los conjuntos de sentencias (de tipo de semejanza numerable) que poseen un modelo bien ordenado.

3.5 <u>Teorema</u>

Sea τ un tipo de semejanza numerable y T una teoría completa y consistente de tipo τ y que incluye a $\Delta_{WO}(\tau)$. Bajo estas hipótesis:

T tiene un modelo bien ordenado si y sólo si para cada

$\langle \varphi_n(v_0,\ldots,v_n)\rangle_{n\in\omega} \in \mathbf{S}_\tau$, hay un $m\in\omega$ tal que $T \models \neg\breve{\varphi}_m$.

Prueba:

Supongamos primero que T es completa y posee un modelo bien ordenado $\mathfrak{A}$ y sea $\langle \varphi_n(v_0,\ldots,v_n)\rangle_{n\in\omega}$. Supongamos además, a efectos de obtener una contradicción, que para cada $m\in\omega$, $T \not\models \neg\breve{\varphi}_m$. Como T es completa, para cada $m\in\omega$, $\mathfrak{A} \models \breve{\varphi}_m$.

Definimos por recursión una secuencia $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ de elementos de $U^{\mathfrak{A}}$ tal que

(i) Para cada $n\in\omega$, $a_n \overset{\mathfrak{A}}{\underset{w}{>}} a_{n+1}$.

(ii) Para cada $n\in\omega$, $\mathfrak{A} \models \varphi_n(v_0,\ldots,v_n)\,[a_0,\ldots,a_n]$.

La construcción de $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ comienza escogiendo un elemento arbitrario $a_0 \in U^{\mathfrak{A}}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_0(v_0)\ [a_0]$. Esto es posible dado que $\mathfrak{A} \models \breve{\varphi}_0$ y $\breve{\varphi}_0 = \exists v_0(Uv_0 \wedge \varphi_0(v_0))$.

Supuesto ahora obtenida $a_0,\ldots,a_n$ de manera que $a_0,\ldots,a_n \in U^{\mathfrak{A}}$, $a_0 \overset{\mathfrak{A}}{\underset{w}{>}} a_1 \overset{\mathfrak{A}}{\underset{w}{>}} \cdots \overset{\mathfrak{A}}{\underset{w}{>}} a_n$ y además

$$\mathfrak{A} \models \varphi_n(v_0,\ldots,v_n)\,[a_0,\ldots,a_n]$$

observamos que $\mathfrak{A} \models \breve{\varphi}_{n+1}$ y , por tanto,

$$\exists v_{n+1}(Uv_{n+1} \wedge \varphi_{n+1}(v_0,\ldots,v_{n+1}) \wedge v_{n+1} \underset{w}{<} v_n)\,[a_0,\ldots,a_n] .$$

Hay entonces un elemento $a \in U^{\mathfrak{A}}$ tal que $a \overset{\mathfrak{A}}{\underset{w}{<}} a_n$ y

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{n+1}(v_0,\ldots,v_{n+1})\,[a_0,\ldots,a_n,a] .$$

Definimos entonces $a_{n+1} = a$.

Justificada la existencia de $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ con las propiedades (i) y (ii) , constatamos que $\underset{w}{<}^{\mathfrak{A}}$ (restringida a $U^{\mathfrak{A}}$) no es un buen orden de $U^{\mathfrak{A}}$, pues posee una cadena descendente infinita. Pero entonces $\mathfrak{A}$ no es un modelo bien ordenado.

Esto establece parte del teorema. Para la otra parte, supongamos que τ es numerable, que T es una teoría de tipo τ consistente y completa que incluye a $\Delta_{WO}(\tau)$ y que para cada $\langle \varphi_n(v_0,\dots,v_n)\rangle_{n\in\omega} \in \mathbf{S}_\tau$ hay un $m\in\omega$ tal que $T \models \neg\breve{\varphi}_m$.

Para cada $n\in\omega$ y cada fórmula $\alpha(v_0,\dots,v_n)$ de tipo τ sea

$$\overset{<}{\alpha}(v_0,\dots,v_n) = \alpha(v_0,\dots,v_n) \wedge \forall x_0\dots x_n(\alpha(x_0,\dots,x_n) \wedge$$
$$\wedge Ux_0 \wedge\dots\wedge Ux_n \longrightarrow (v_0 \underset{w}{\leq} x_0) \vee (v_0 \approx x_0 \wedge v_1 \underset{w}{\leq} x_1) \vee\dots$$
$$\dots\vee (v_0 \approx x_0 \wedge\dots\wedge v_{n-1} \approx x_{n-1} \wedge v_n \underset{w}{\leq} x_n) \vee (v_0 \approx x_0 \wedge \dots \wedge$$
$$\wedge v_n \approx x_n)) .$$

Obsérvese que si $\mathfrak{A}$ es un modelo de T, $\underset{w}{\leq}^{\mathfrak{A}}$ (restringida a $U^{\mathfrak{A}}$) es un orden total de $U^{\mathfrak{A}}$ y si $a_0,\dots,a_n$ son elementos de $U^{\mathfrak{A}}$ tales que $\mathfrak{A} \models \overset{<}{\alpha}(v_0,\dots,v_n)[a_0,\dots,a_n]$, entonces $a_0,\dots,a_n$ es la menor $n+1$-tupla (en el orden lexicográfico correspondiente a $\underset{w}{\leq}^{\mathfrak{A}}$) que satisface la fórmula $\alpha(v_0,\dots,v_n)$ en $\mathfrak{A}$.

Observemos además que:

(1) $T \models \forall v_0\dots v_n(\overset{<}{\alpha}(v_0,\dots,v_n) \longrightarrow \alpha(v_0,\dots,v_n))$

(2) $T \models \forall v_0\dots v_n w_0\dots w_n(Uv_0 \wedge\dots\wedge Uv_n \wedge Uw_0 \wedge\dots\wedge Uw_n \wedge$
$\wedge\overset{<}{\alpha}(v_0,\dots,v_n) \wedge \overset{<}{\alpha}(w_0,\dots,w_n) \longrightarrow v_0 \approx w_0 \wedge\dots\wedge v_n \approx w_n)$

(3) $T \models \exists v_0\dots v_n(Uv_0 \wedge\dots\wedge Uv_n \wedge \alpha(v_0,\dots,v_n)) \longrightarrow$
$\exists v_0\dots v_n(Uv_0 \wedge\dots\wedge Uv_n \wedge \overset{<}{\alpha}(v_0,\dots,v_n)))$.

(1) es inmediato. (2) se obtiene del hecho de que en todo modelo $\mathfrak{A}$ de T, $\underset{w}{\leq}^{\mathfrak{A}}$(restringida a $U^{\mathfrak{A}}$) es un orden total de $U^{\mathfrak{A}}$. (3) se establece por inducción en n usando el grupo (iii) de axiomas de $\Delta_{WO}(\tau)$.

Adicionalmente se verifica:

(4) Para cada fórmula $\alpha(v_0,\dots,v_n)$ de tipo τ, si

$T \cup \{\exists v_0\dots v_n(\alpha(v_0,\dots,v_n) \wedge Uv_0 \wedge \dots \wedge Uv_n)\}$ es consistente,

también lo es

$T \cup \{\exists v_0\dots v_n(\alpha(v_0,\dots,v_n) \wedge Uv_0 \wedge \dots \wedge Uv_n \wedge \alpha^{<}(v_0,\dots,v_n))\}$.

Ello se sigue de (3) y (1) y del hecho de que T es, por hipótesis, completa.

Como τ es numerable, por el teorema de omisión de tipos (véase Chang & Keisler (1977), pág. 82), hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que:

(5) $\mathfrak{A} \models T$ y para cada $n \in \omega$, $\mathfrak{A}$ omite el conjunto

$\{(Uv_0 \wedge \dots \wedge Uv_n) \wedge \neg \alpha^{<}(v_0,\dots,v_n) : \alpha$ es de tipo $\tau\}$.

En ese caso,

(6) Para cualesquiera $a_0,\dots,a_n \in U^{\mathfrak{A}}$ hay una fórmula $\alpha(v_0,\dots,v_n)$ de tipo τ tal que $\mathfrak{A} \models \alpha^{<}(v_0,\dots,v_n)\,[a_0,\dots,a_n]$.

Veamos ahora que

(7) $\mathfrak{A}$ es un modelo bien ordenado de T.

En caso contrario habría una sucesión $\langle a_n \rangle_{n\in\omega}$ de elementos de $U^{\mathfrak{A}}$ tales que para cada $n \in \omega$,

$$a_n \overset{\mathfrak{A}}{\underset{W}{>}} a_{n\,1} .$$

Para cada $n \in \omega$, (6) garantiza la existencia de una fórmula $\alpha_n(v_0,\dots,v_n)$ tal que $\mathfrak{A} \models \alpha_n^{<}(v_0,\dots,v_n)\,[a_0,\dots,a_n]$.

Veamos que para cada $n \in \omega$, $\mathfrak{A} \models \widetilde{\alpha}^{<}_n$.

Para $n = 0$, tenemos $\widetilde{\alpha}^{<}_0 = \exists v_0(Uv_0 \wedge \alpha_0^{<}(v_0))$ y $\mathfrak{A} \models Uv_0 \wedge \alpha_0^{<}(v_0)\,[a_0]$.

Para $n+1$ tenemos

$$\widetilde{\alpha}^{<}_{n+1} = \forall v_0\dots v_n(Uv_0 \wedge \dots \wedge Uv_n \wedge \alpha_n^{<}(v_0,\dots,v_n) \longrightarrow \exists v_{n+1}(Uv_{n+1} \wedge$$

$\wedge\, v_{n+1} \leqslant_{w} v_n \wedge \alpha^{<}_{n+1}(v_0,\ldots,v_{n+1})\ )\ \}$.

A efectos de establecer que $\mathfrak{A} \models \widetilde{\alpha}^{<}_{n+1}$, supongamos que $b_0, \ldots, b_n \in U^{\mathfrak{A}}$ y que $\mathfrak{A} \models \alpha^{<}_n(v_0,\ldots,v_n)\,[b_0,\ldots,b_n]$. Por (2) tenemos que $\langle b_0,\ldots,b_n\rangle = \langle a_0,\ldots,a_n\rangle$ y , como

$$\mathfrak{A} \models Uv_{n+1} \wedge v_{n+1} \leqslant_{w} v_n \wedge \alpha^{<}_{n+1}(v_0,\ldots,v_{n+1})[\,a_0,\ldots,a_{n+1}\,],$$

concluimos que

$$\mathfrak{A} \models \exists v_{n+1}(Uv_{n+1} \wedge v_{n+1} \leqslant_{w} v_n \wedge \alpha^{<}_{n+1}(v_0,\ldots,v_{n+1}))\ [b_0,\ldots,b_n].$$

Así pues, también $\mathfrak{A} \models \widetilde{\alpha}^{<}_{n+1}$. De este modo $\langle \alpha^{<}_n(v_0,\ldots,v_n)\rangle_{n\in\omega} \in \mathbf{S}_\tau$ y para cada $n\in\omega$, $\mathfrak{A} \models \widetilde{\alpha}^{<}_n$. Esto contradice la hipótesis inicial sobre T . Esta contradicción justifica , entonces, el punto (7) .

Establecido (7) , hemos obtenido un modelo bien ordenado de T . Por tanto, finaliza la prueba del teorema .

3.6 Observación

El teorema 3.5 es generalizable también a tipos de semejanza no numerables . Véase Kotlarski (1978) a este respecto. Sin embargo, la prueba para el caso numerable es más simple y este caso es , por otra parte, el único que tomaremos en consideración .

3.7 Corolario

Si τ es un tipo de semejanza numerable y T un conjunto de sentencias de tipo τ , son equivalentes :

(1) T tiene un modelo bien ordenado.

(2) T tiene una extensión completa y consistente, Φ, que incluye a $\Delta_{WO}(\tau)$ y tal que para cada $\langle\varphi_n(v_0,\ldots,v_n)\rangle_{n\in\omega}$ de $\mathbf{S}_\tau$, hay un $m\in\omega$ tal que $\Phi \models \neg\widetilde{\varphi}_m$.

Prueba:

Por 3.5 .

Usando ahora el corolario 3.7 obtendremos una cota a la complejidad de las consecuencias en $\mathcal{L}_{WO}$ de un conjunto recursivamente enumerable de premisas . Este resultado es análogo al teorema 2.7 de ω-lógica, pero ahora la cota es Π^1_2 y no Π^1_1 .

3.8 <u>Teorema</u>

Sea T un conjunto de sentencias de tipo de semejanza recursivo τ .

(1) Si T es analítico, el conjunto de consecuencias de T en $\mathcal{L}_{WO}$ también es analítico.

(2) Si T es Π^1_2 , (en particular, si T es recursivamente enumerable) el conjunto de consecuencias de T en $\mathcal{L}_{WO}$ también es Π^1_2 .

Prueba:

Por el corolario 3.7, tenemos

$T \models_{WO} \sigma$ si y sólo si para cada extensión consistente y completa Φ de T que incluye a $\Delta_{WO}(\tau)$ y tal que para cada $\langle \varphi_n(v_0,\dots,v_n)\rangle_{n\in\omega} \in \mathbf{S}_\tau$ hay un $m\in\omega$ tal que $\Phi \models \neg \breve{\varphi}_m$, se tiene $\Phi \models \sigma$.

Observemos ahora que hay una fórmula $\alpha_1(Y)$ (donde Y es una variable diádica de segundo orden) del tipo de semejanza de $\mathbb{N}$ que sólo contiene cuantificación de primer orden y verifica, para cada $R \subseteq \omega^2$,

(i) $\mathbb{N} \models \alpha_1(Y)[R]$ si y sólo si R es una función con dominio ω y para cualesquiera $n,m\in\omega$ tales que $\langle n,m\rangle \in R$, m es el número de Gödel de una fórmula de tipo τ con a lo sumo las variables $v_0,\dots,v_n$ libres.

Por tanto,

$$\mathbb{N} \models \alpha_1(Y)[R] \text{ si y sólo si } \{\langle n,\varphi\rangle : \langle n, \mathrm{G\ddot{o}}(\varphi)\rangle \in R\} \in \mathbf{S}_\tau$$

A continuación observemos que hay dos fórmulas, $\alpha_2(x,y)$

y $\alpha_3(x,y,z,u)$ del tipo de semejanza de $\mathbb{N}$ y de primer orden, tales que :

(ii) $\mathbb{N} \models \alpha_2(x,y)\ [n,m]$ si y sólo si n es el número de Gödel de una fórmula φ del tipo de semejanza τ y m es el número de Gödel de $\neg \exists v_0(Uv_0 \wedge \varphi)$.

(iii) $\mathbb{N} \models \alpha_3(x,y,z,u)\ [n,m,k,j]$ si y sólo si n, m son los números de Gödel de fórmulas φ, ψ del tipo de semejanza τ y j es el número de Gödel de la fórmula

$\neg \forall v_0 \ldots v_k(Uv_0 \wedge \ldots \wedge Uv_k \wedge \varphi \rightarrow \exists v_{k+1}(Uv_{k+1} \wedge v_{k+1} \leqslant_{W} v_k \wedge$
$\wedge \psi))$

De este modo, si $\langle \varphi_n \rangle_{n \in \omega} \in S_\tau$ y $R = \{\langle n, Gö(\varphi_n)\rangle : n \in \omega\}$ resulta:

(iv) $\mathbb{N} \models \exists x(Y0x \wedge \alpha_2(x,u)) \vee \exists xyz(\,Yzx \wedge YSzy \wedge \alpha_3(x,y,z,u))$ $[R,n]$ si y sólo si hay un $k \in \omega$ tal que $n = Gö(\neg \widehat{\varphi}_k)$.

Abreviemos esta última fórmula mediante $\alpha_4(Y,u)$ y recordemos que sólo posee cuantificación de primer orden.

Finalmente, observemos que hay fórmulas $\alpha_5(X)$, $\alpha_6(X)$, $\alpha_7(X)$, $\alpha_8(X)$ y $\alpha_9(X,y)$ (donde X es una variable monádica de segundo orden) tales que
$\alpha_5(X)$ es de segundo orden (y Σ^1_2 si T es Π^1_2) y las restantes son, respectivamente, Π^0_1, Π^0_1, Π^0_1 y Σ^0_1 y :

(v) $\mathbb{N} \models \alpha_5(X)\ [A]$ si y sólo si $\{Gö(\sigma) : \sigma \in T\} \subseteq A$.

(vi) $\mathbb{N} \models \alpha_6(X)\ [A]$ si y sólo si A es el conjunto de los número de Gödel de un conjunto completo de sentencias de tipo τ.

(vii) $\mathbb{N} \models \alpha_7(X)\ [A]$ si y sólo si A es el conjunto de los números de Gödel de un conjunto consistente de sentencias de tipo τ.

(viii) $\mathbb{N} \models \alpha_8(X)\ [A]$ si y sólo si $\{Gö(\sigma) : \sigma \in \Delta_{WO}(\tau)\} \subseteq A$.

(ix) $\mathbb{N} \models \alpha_9(X,y)\,[A,n]$ si y sólo si n es el número de Gödel de una sentencia de tipo T que es deducible de sentencias cuyo número de Gödel está en A .

Reuniendo estos resultados tenemos:

(x) $\mathbb{N} \models \forall X(\ \alpha_5(X) \wedge \alpha_6(X) \wedge \alpha_7(X) \wedge \alpha_8(X) \wedge\ \forall Y(\ \alpha_1(Y) \longrightarrow \exists u(\ \alpha_4(Y,u) \wedge \alpha_9(X,u))) \longrightarrow \alpha_9(X,y)\ )\ [n]$ si y sólo si $n \in \{ Gö(\sigma) : T \models_{\overline{WO}} \sigma \}$.

Esto muestra que $\{\sigma : T \models_{\overline{WO}} \sigma\}$ es analítico. Si además T es Π^1_2 , $\alpha_5(X)$ es Σ^1_2 , digamos

$$\alpha_5(X) = \exists Z\ \forall W\ \varphi(X,Z,W)\ ,$$

entonces

(xi) $\mathbb{N} \models \forall XZ\ \exists WY(\ \varphi(X,Z,W) \wedge \alpha_6(X) \wedge \alpha_7(X) \wedge \alpha_8(X) \wedge (\ \alpha_1(Y) \longrightarrow \exists u(\ \alpha_4(Y,u) \wedge \alpha_9(Y,u)\ )) \longrightarrow \alpha_9(X,y)\ )\ [n]$

si y sólo si $n \in \{ Gö(\sigma) : T \models_{\overline{WO}} \sigma \}$.

Esta última fórmula es equivalente (en $\mathbb{N}$) a una fórmula Π^1_2 , pues la cuantificación sobre la variable **diádica** Y es eliminable en función de cuantificación monádica sin introducir otros cuantificadores de segundo orden. Por tanto, si T es Π^1_2 , $\{\sigma : T \models_{\overline{WO}} \sigma\}$ es también Π^1_2 .

3.9 <u>Notación</u>

Volvemos a considerar la teoría A_2 , definida en 2.9 , a efectos de establecer que el teorema 3.8 no puede ser mejorado. En este contexto, $\varphi_J(x,y,z)$ será una fórmula del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$ sin cuantificadores y con las siguientes propiedades:

(i) $A_2 \models \forall xyz(\ \varphi_J(x,y,z) \longrightarrow Nx \wedge Ny \wedge Nz\ )$

(ii) $A_2 \models \forall xyzuv(\ \varphi_J(x,y,z)\ \wedge\ {}_J(u,v,z) \longrightarrow x \simeq u \wedge y \simeq v\ )$

(iii) $A_2 \models \forall xy(Nx \wedge Ny \longrightarrow \exists z\ \varphi_J(x,y,z))$

A tal efecto podemos usar :

$$\varphi_J(x,y,z) = Nx \wedge Ny \wedge Nz \wedge \bar{2} \bullet z \simeq (x + y)\bullet(x + y) + \bar{3}\bullet x + y \ .$$

La función J de ω^2 en ω definida por

$$J(<n,m>) = 1/2\ (\ (n+m)^2 + 3\cdot n + m)$$

es inyectiva y para cualesquiera $n,m,k \in \omega$,

$$\mathfrak{O}(\omega) \models \varphi_J(\bar{n},\bar{m},\bar{k}) \quad \text{si y sólo si} \quad J(<n,m>) = k \ .$$

Por tanto la fórmula $\varphi_J(x,y,z)$ nos permite hablar indirectamente de pares ordenados de números naturales. Emplearemos además la notación

$$(x,y)\ \varepsilon\ z$$

para abreviar

$$\exists u(u\ \varepsilon\ z \wedge \varphi_J(x,y,u)) \ .$$

Finalmente, $\varphi_{WO}(x)$ será la conjunción de las siguientes fórmulas :

(i) $\neg Nx \wedge \forall y(y\,\varepsilon\, x \longrightarrow \exists uv\ \varphi_J(u,v,y))$

(ii) $\forall uvw(\ (u,v)\varepsilon\, x \wedge (v,w)\ \varepsilon\ x \longrightarrow (u,w)\ \varepsilon\ x\ )$

(iii) $\forall u \neg (u,u)\varepsilon\ x$

(iv) $\forall y(\ \exists z\ z\varepsilon\ y \wedge \forall z(z\varepsilon\ y \longrightarrow \exists u(\ (z,u)\ \varepsilon\ x \vee (u,z)\ \varepsilon\ x)) \longrightarrow$
$\exists z(z\varepsilon\ y \wedge \forall w(w\ \varepsilon\ y \longrightarrow z \simeq w \vee (z,w)\ \varepsilon\ x\ )\ )$

De este modo,

$$\mathfrak{O}(\omega) \models \varphi_{WO}(x)\ [A] \quad \text{si y sólo si} \quad J^{-1}[A] \text{ es un buen}$$

orden , es decir, si y sólo si la relación

$$\{<n,m> : \ \mathfrak{O}(\omega) \models (\bar{n},\bar{m})\varepsilon\ x\ \ [A]\}$$

es un buen orden .

La fórmula $\varphi_{WO}(x)$ nos permite hablar indirectamente de buenos órdenes de ω.

3.10 __Definición__ : β-modelos de A_2

Un modelo $\mathfrak{A}$ de A_2 es un β-modelo si para cada $B \in A$ que satisface $\varphi_{WO}(x)$ en $\mathfrak{A}$, la relación

$$\{ \langle a,b\rangle \in A \times A : \mathfrak{A} \models (u,v) \,\varepsilon\, x \; [a,b,B] \}$$

es un buen orden .

La fórmula $\varphi_{WO}(x)$ expresa con naturalidad en $\mathcal{P}(\omega)$ la condición de buen orden, pero la cuantificación sobre conjuntos que entraña permite que sea interpretada anómalamente incluso en ω-modelos de A_2. De hecho hay ω-modelos de A_2 que no son β-modelos. Sin embargo, todo β-modelo de A_2 es un ω-modelo . La razón de esta última aserción está en que la fórmula

$$\varphi_<(x) = \neg Nx \wedge \forall y(y \,\varepsilon\, x \longleftrightarrow \exists uv(\varphi_J(u,v,y) \wedge u < v))$$

que define al conjunto

$$\{ J(\langle n,m\rangle) : n < m \} \qquad \text{en} \quad \mathcal{P}(\omega)$$

tiene las siguientes propiedades :

(i) $A_2 \models \exists x\, \varphi_<(x)$

(ii) $A_2 \models \forall x.(\varphi_<(x) \longrightarrow \varphi_{WO}(x))$.

Por tanto, en todo β-modelo $\mathfrak{A}$ de A_2 hay un conjunto $B \in A$ tal que

$$\{\langle a,b\rangle : \mathfrak{A} \models (u,v) \,\varepsilon\, x \; [a,b,B]\} = \{\langle a,b\rangle : \mathfrak{A} \models (Nu \wedge Nv \wedge u < v)[a,b]\}$$

y estas relaciones en A son buenos órdenes. Entonces $<^{\mathfrak{A}}$ es un buen orden de $N^{\mathfrak{A}}$, con lo cual

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright \tau_{\mathbb{N}})\, N^{\mathfrak{A}} \cong \mathbb{N}$$

Los β-modelos de A_2 son, pues, ω-modelos. El único resultado que precisaremos es el siguiente :

Si σ es una sentencia Π^1_2 (en el sentido de la definición 2.2) verdadera en $\mathcal{P}(\omega)$, σ es verdadera en todo β -modelo de A_2 . (Véase Apt & Marek (1974)) .

3.11 Definición

Para cada conjunto de sentencias Σ y cada sentencia σ del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega)$:

$\Sigma \models_\beta \sigma$ si y sólo si todo β-modelo de Σ es un modelo de σ .

3.12 Lema

$\{\sigma : A_2 \models_\beta \sigma\}$ no es Σ^1_2 .

Prueba:

Supongamos que $\{\sigma : A_2 \models_\beta \sigma\}$ es Σ^1_2 . Por 2.4 hay una fórmula Σ^1_2 (en el sentido de la definición 2.2) , $\varphi(x)$, tal que :

(1) $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\bar{n})$ si y sólo si $n \in \{G\ddot{o}(\sigma) : A_2 \models_\beta \sigma\}$.

Por tanto, para cada sentencia σ ,

(2) $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ si y sólo si $A_2 \models_\beta \sigma$.

Por el lema del punto fijo, aplicado a $\neg\varphi(x)$ y A_2 , hay una sentencia σ tal que

(3) $A_2 \models (\sigma \longleftrightarrow \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner))$.

Veamos en primer lugar que

(4) $A_2 \not\models_\beta \sigma$.

En efecto, si $A_2 \models_\beta \sigma$, entonces , de acuerdo con (2), $\mathcal{P}(\omega) \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$. Como $\mathcal{P}(\omega)$ es un modelo de A_2 tenemos, por (3), que $\mathcal{P}(\omega) \models \neg\sigma$. Y como $\mathcal{P}(\omega)$ es un β-modelo de A_2 y $A_2 \models_\beta \sigma$, al mismo tiempo $\mathcal{P}(\omega) \models \sigma$.

Según (4), hay un β-modelo $\mathfrak{A}$ de A_2 tal que $\mathfrak{A} \not\models \sigma$. Por otra parte, (2) garantiza que $\mathcal{P}(\omega) \models \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$. Como

$\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ es Σ^1_2 , $\neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ es Π^1_2 . Por lo indicado en 3.10 resulta entonces que $\neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ es verdadera en todo β-modelo de A_2 . En particular, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$. Pero entonces, por (3) , $\mathfrak{A} \models \sigma$, en contradicción con la hipótesis sobre $\mathfrak{A}$. Esta contradicción muestra que el conjunto $\{\sigma : A_2 \models_{\beta} \sigma\}$ no es Σ^1_2 .

Obtendremos ahora un resultado análogo a 2.11 , que fija una cota inferior a la complejidad de las consecuencias en $\mathcal{L}_{WO}$ de un conjunto recursivo de premisas . En este caso la cota es Σ^1_2 , mientras en ω-lógica era Σ^1_1 .

3.13 <u>Teorema</u>

Hay un conjunto recursivo de sentencias , en tipo de semejanza finito, cuyo conjunto de consecuencias en $\mathcal{L}_{WO}$ no es Σ^1_2 .

Prueba:

El conjunto en cuestión , T , será una extensión de A_2 . Introducimos un nuevo signo funcional diádico f. El tipo de semejanza τ de T constará de los signos propios de $\mathfrak{P}(\omega)$ además de $\{f, U, \leq_W\}$. Las sentencias de T serán los axiomas de A_2 junto con

(i) $\forall xy\, U fxy$

(ii) $\forall x(\varphi_{WO}(x) \rightarrow \forall uv((u,v) \in x \rightarrow fxu \leq_W fxv))$

Veamos en primer lugar que

(1) Todo modelo bien ordenado de T es un β-modelo .

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo bien ordenado de T . A efectos de mostrar que $\mathfrak{A}$ es un β-modelo, consideremos un $B \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_{WO}(x)\,[B]$. Sea $R = \{\langle a,b\rangle : \mathfrak{A} \models (u,v) \in x\,[a,b,B]\}$, y veamos que R es un buen orden . Sea D el campo de R (la unión del dominio y el recorrido de R) y definamos:

$$g = \{\langle a, f^{\mathfrak{A}}(\langle B,a\rangle)\rangle : a \in D\} .$$

Obviamente , $g : D \longrightarrow U^{\mathfrak{A}}$. Además, para cualesquiera $a,b \in D$,

si $\langle a,b\rangle \in R$, entonces $g(a) \leq_{w}^{\mathfrak{A}} g(b)$.

Como $\mathfrak{A}$ es un modelo bien ordenado, $\leq_{w}^{\mathfrak{A}}$ (restringida a $U^{\mathfrak{A}}$) es un buen orden de $U^{\mathfrak{A}}$. Como g es una inmersión de R en $\leq_{w}^{\mathfrak{A}}$, también R es un buen orden.

Esto justifica el punto (1) . Veamos a continuación que

(2) Todo β-modelo $\mathfrak{A}$ de A_2 posee una expansión bien ordenada que es modelo de T .

Sea $\mathfrak{A}$ un β-modelo de A_2 . Diremos que un ordinal η es representable en $\mathfrak{A}$ si hay un $B \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_{WO}(x)\ [B]$ y η es el tipo de orden de

$$\{\langle a,b\rangle : \mathfrak{A} \models (u,v)\ \varepsilon\ x\ [a,b,B]\} .$$

Sea δ el supremo de los ordinales representables en $\mathfrak{A}$. Como todo buen orden representable en $\mathfrak{A}$ es numerable (pues los buenos órdenes representados son buenos órdenes de ω), tenemos que $\delta \leq \omega_1$. Distinguiremos dos casos para la obtención de la expansión de $\mathfrak{A}$, según $\delta < \omega_1$ o $\delta = \omega_1$.

Caso 1º $\delta < \omega_1$.

Hay en ese caso un buen orden R de $N^{\mathfrak{A}}$ de tipo δ . Definimos la expansión $\mathfrak{A}^*$ de $\mathfrak{A}$ poniendo $U^{\mathfrak{A}^*} = N^{\mathfrak{A}}$, $\leq_{w}^{\mathfrak{A}^*} = R$ y definiendo $f^{\mathfrak{A}^*}$ de acuerdo con lo siguiente : Para cada $B \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_{WO}(X)\ [B]$, sea η_B el tipo de orden de

$$\{\langle a,b\rangle : \mathfrak{A} \models (u,v)\ \varepsilon\ x\ [a,b,B]\}.$$

Como $\eta_B \leq \delta$, hay una inmersión g_B de este orden en R . Definimos entonces

$f^{\mathfrak{A}^*}(\langle B,a\rangle) = g_B(a)$ si $\mathfrak{A} \models \varphi_{WO}(x)\ [B]$ y $\mathfrak{A} \models \exists v(\ (u,v)\ \varepsilon\ x \vee (v,u)\ \varepsilon\ x\ )\ [a,B]$.

$f^{\mathfrak{A}^*}(\langle B,a\rangle) = 0^{\mathfrak{A}}$ en otro caso .

Caso 2º $\delta = \omega_1$.

Entonces $|A| \geq \omega_1$. Escojamos un subconjunto arbitrario D de A de cardinal ω_1 , y sea R un buen orden de D de tipo ω_1 . Definimos entonces la expansión $\mathfrak{A}^*$ de $\mathfrak{A}$ poniendo $U^{\mathfrak{A}^*} = D$, $<_w^{\mathfrak{A}^*} = R$ y determinando los valores de $f^{\mathfrak{A}^*}$ de acuerdo con lo siguiente :

Para cada $B \in A$ que satisface $\varphi_{WO}(x)$ en $\mathfrak{A}$, si η_B es el tipo de orden de

$$\{ \langle a,b \rangle : \mathfrak{A} \models (u,v) \in x \ [a,b,B] \}$$

resulta $\eta_B < \omega_1$ y hay así una inmersión g_B de este orden en R. Definimos entonces,

$f^{\mathfrak{A}^*}(\langle B,a \rangle) = g_B(a)$ si $\mathfrak{A} \models \varphi_{WO}(x) [B]$ y $\mathfrak{A} \models \exists v((u,v) \in x \wedge \wedge (v,u) \in x) [a,B]$.

$f^{\mathfrak{A}^*}(\langle B,a \rangle)$ es un elemento arbitrario de $U^{\mathfrak{A}^*}$ en otro caso.

Esto justifica el punto (2) . De (1) y (2) se sigue que

(3) $\{ \sigma : A_2 \models_\beta \sigma \} = \{ \sigma : T \models_{WO} \sigma$ y σ es del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega) \}$.

Por el lema 3.12 sabemos que $\{\sigma : A_2 \models_\beta \sigma\}$ no es Σ^1_2 . Así pues, tampoco

$\{ \sigma : T \models_{WO} \sigma$ y σ es del tipo de semejanza de $\mathcal{P}(\omega) \}$

es Σ^1_2 , en cuyo caso

$\{ \sigma : T \models_{WO} \sigma \}$ no es Σ^1_2 . Esto es precisamente lo que pretendíamos justificar.

3.14 <u>Corolario</u>

(1) En todo tipo de semejanza recursivo, el conjunto de sentencias válidas en $\mathcal{L}_{WO}$ es Σ^1_2 .

(2). Hay un tipo de semejanza finito en el que el conjunto de las sentencias válidas en $\mathcal{L}_{WO}$ no es Σ^1_2.

Prueba:

(1) se sigue del punto (2) de 3.8 . (2) se obtiene del teorema 3.13 y del teorema II.23 . En efecto, dado que el tipo de semejanza de $\mathcal{L}_{WO}$ es finito, el teorema II.23 garantiza la existencia de una sentencia σ en un tipo de semejanza finito τ', que extiende al tipo de semejanza τ del conjunto de sentencias T de 3.13 , y verifica:

$$\{\varphi : T \models_{WO} \varphi\} = \{\varphi : \sigma \models_{WO} \varphi^M \text{ y } \varphi \text{ es de tipo } \tau\}$$

donde M es un predicado monádico de τ'. Si el conjunto de sentencias válidas en $\mathcal{L}_{WO}$ de tipo τ' fuera Σ^1_2, también sería Σ^1_2 el conjunto

$$\{\varphi : \sigma \models_{WO} \varphi \text{ y } \varphi \text{ es de tipo } \tau\},$$

pero esto no es así.

4. LOGICA DE LOS NUMEROS REALES

La lógica de los números reales es la lógica en la cual ciertos conceptos relativos a los números reales se asumen como conceptos lógicos. La primera cuestón, por tanto, es decidir qué conceptos van a ser lógicos. Quizás la respuesta más inmediata sea tomar como tales los propios del cuerpo ordenado de los números reales. En ese caso la lógica será la asociada al modelo

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle .$$

El orden es prescindible, dado que es definible en

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$$

mediante la fórmula $\exists z(\neg\, z \approx 0 \wedge x + z \cdot z \approx y)$.

También son definibles 0 y 1 en

$$\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$$

pero la ausencia de constantes que los denoten dificulta la notación. Por tanto, parece que lo más natural es definir la lógica de los números reales como la lógica asociada al modelo

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle .$$

Sin embargo, hay una decisión más cómoda y equivalente en resultados : consiste en definir la lógica de los números reales como la lógica asociada al modelo

$$\langle \mathbb{R}, < \rangle .$$

La razón de que no haya pérdida de resultados es que

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$$

es caracterizable a partir de $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, pues es el único cuerpo ordenado completo (salvo isomorfía) y es, por tanto, el único modelo (salvo isomorfía) de la teoría de cuerpos ordenados cuyo orden es isomorfo al de los reales.

Por tanto, tomaremos como concepto lógico únicamente el orden de los números reales.

4.1 <u>Definición</u> : $\mathbb{R}$-lógica .

La $\mathbb{R}$-lógica , o lógica de los números reales es la lógica asociada al modelo

$$\langle \mathbb{R}, < \rangle$$

donde $<$ es el orden usual de $\mathbb{R}$.

Su tipo de semejanza , $\tau_{\mathbb{R}}$, consta de un único predicado diádico $<$ para la relación de orden . Los $\mathbb{R}$-modelos serán las estructuras $\mathfrak{A}$ cuyo tipo de semejanza posea el predicado $<$ y un predicado monádico U y verifiquen

$$\langle U^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}} \rangle \cong \langle \mathbb{R}, < \rangle$$

(más precisamente , la relación $<^{\mathfrak{A}}$ debe estar restringida a $U^{\mathfrak{A}}$) . La relación de consecuencia , $\models_{\mathbb{R}}$, es , pues,

$\Sigma \models_{\mathbb{R}} \sigma$ si y sólo si todo $\mathbb{R}$-modelo de Σ es modelo de σ.

4.2 <u>Observaciones</u>

La teoría del modelo $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ es finitamente axiomatizable, pues se trata de la teoría del orden denso sin extremos. La axiomatización usual de esta teoría es la conjunción de las siguientes sentencias :

(i) $\forall xyz(x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z)$

(ii) $\forall x \neg x < x$

(iii) $\forall x \; \exists y \quad x < y$

(iv) $\forall x \; \exists y \quad y < x$

(v) $\forall xy(x < y \longrightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$

(vi) $\forall xy(x < y \vee x \approx y \vee y < x)$

(vii) $\exists xy \neg x \approx y$

El tipo de semejanza del modelo $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ consta de los signos $0, 1, +, \cdot, <$. La teoría de este modelo es recursivamente axiomatizable, pero no finitamente axiomatizable. Se trata de la teoría de cuerpos cerrados ordenados . Una axiomatización consta de los axiomas de cuerpos ordenados y los siguientes axiomas adicionales :

(i) $\forall x\ \exists y\ (y^2 \approx x \vee y^2 + x \approx 0)$

(ii) Para cada $n \geqslant 1$,

$$\forall x_1 \ldots x_n (x_1^2 + \ldots + x_n^2 \approx 0 \longrightarrow x_1 \approx 0 \wedge \ldots \wedge x_n \approx 0)$$

(iii) Para cada $n \geqslant 1$ impar,

$$\forall x_0 \ldots x_n (\neg x_n \approx 0 \longrightarrow \exists y (x_n \cdot y^n + \ldots + x_1 \cdot y^1 + x_0 \approx 0))$$

donde la notación t^n para $n \geqslant 1$, se introduce por :

$$\begin{cases} t^1 = t \\ t^{n+1} = t \cdot t^n \end{cases}$$

Estos resultados de primer orden sobre estos modelos contrastan fuertemente con la complejidad de la $\mathbb{R}$-lógica. Como veremos, no sólo no es recursivamente enumerable para validez, sino que incluso en un determinado tipo de semejanza finito el conjunto de las sentencias válidas no es ni siquiera analítico.

4.3 Teorema

La $\mathbb{R}$-lógica no es recursivamente compacta. Tampoco es recursivamente enumerable para consecuencia ni para validez.

Prueba:

Basta con justificar que la $\mathbb{R}$-lógica no es recursivamente compacta. En efecto, por II.15 ya se sigue de este resultado que no es recursivamente enumerable para consecuencia. Como además el tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{R}}$ es finito, podemos usar II.20 para concluir que tampoco es recursivamente enumerable para validez.

Veamos, pues, que la $\mathbb{R}$-lógica no es recursivamente compacta.

Sea T_{CO} la teoría de cuerpos ordenados y definamos:

$$T = T_{CO} \cup \{\forall x\, Ux\} \cup \{\bar{n} < c : n \in \omega\}$$

donde c es una constante nueva y la notación $\bar{n}$ se define por :

$$\begin{cases} \bar{0} = 0 \\ \overline{n+1} = \bar{n}+1 \end{cases} .$$

Cada subconjunto finito de T tiene un $\mathbb{R}$-modelo. En efecto, en un subconjunto finito Δ de T no aparece más que un número finito de sentencias de la forma $\bar{n} < c$ y hay , entonces, un número natural m mayor que cualquier número natural n tal que $\bar{n} < c \in \Delta$. Definimos una expansión $\mathfrak{A}$ de $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ por

$U^{\mathfrak{A}} = \mathbb{R}$

$c^{\mathfrak{A}} = m$.

De este modo, $\mathfrak{A} \models \Delta$ y $\mathfrak{A}$ es un $\mathbb{R}$-modelo .

Sin embargo, T no posee ningún $\mathbb{R}$ -modelo. La razón es que todo modelo de T es un cuerpo ordenado no arquimediano, pero ningún cuerpo ordenado no arquimediano posee un orden isomorfo al de los reales (los números estándar del modelo están acotados pero no poseen supremo) .

A continuación mostraremos que el conjunto de consecuencias en $\mathbb{R}$ -lógica de un determinado conjunto recursivo de sentencias no es analítico . Para ello necesitamos garantizar previamente que todo conjunto analítico de números reales es definible (en primer orden) en una cierta expansión del modelo

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle .$$

4.4 Definición

$\mathfrak{R}$ es el modelo de tipo de semejanza

$$\{N, 0, 1, +, \cdot, <\}$$

cuyo universo es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales e interpreta $N^{\mathfrak{R}} = \omega$ y $0, 1, +, \cdot, <$ como los correspondientes elementos, operaciones y relaciones en $\mathbb{R}$.

4.5 Lema

Toda relación analítica entre números naturales es definible (en primer orden) en $\mathfrak{R}$.

Prueba:

Las relaciones aritméticas tienen una sencilla definición en $\mathfrak{R}$: sólo es preciso sustituir los términos del tipo $S \ldots S\ t$ por $1 + \ldots + 1 + t$ en la fórmula que define a la relación en $\mathbb{N}$ y relativizar los cuantificadores al predicado N . De este modo se obtiene para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de primer orden y del tipo de semejanza de $\mathbb{N}$ una fórmula $\varphi^*(x_1, \ldots, x_n)$ del tipo de semejanza de $\mathfrak{R}$ tal que para cualesquiera $m_1, \ldots, m_n \in \omega$, son equivalentes :

$$\mathbb{N} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)\ [m_1, \ldots, m_n]$$

$$\mathfrak{R} \models \varphi^*(x_1, \ldots, x_n)\ [m_1, \ldots, m_n].$$

La traducción de las fórmulas con cuantificación de segundo orden posee una complicación mayor . Podemos suponer que esta cuantificación es únicamente sobre variables monádicas, pues en $\mathbb{N}$ toda fórmula de segundo orden posee una equivalente de este tipo. Podemos representar entonces cada conjunto de números naturales como un número real entre cero y uno (que codifica su función característica) y reemplazar la cuantificación monádica de segundo orden en $\mathbb{N}$ por cuantificación de primer orden sobre números reales en $\mathfrak{R}$. Lo detallamos a continuación.

Definamos,

$F = \{\langle r,n,k\rangle \in \mathbb{R}\times\omega\times\omega : \; 0 \leq r < 1$ y $k \in \{0,1\}$ y k es la $n+1$-ésima cifra decimal de $r\}$.

Así, para cada $r \in \mathbb{R}$ y $n,k \in \omega$

$\langle r,n,k\rangle \in F$ si y sólo si $0 \leq r < 1$ y $k \in \{0,1\}$ y k es la diferencia entre el mayor número natural menor o igual que $10^{n+1} \cdot r$ y el menor número natural divisible por 10 que es menor o igual que $10^{n+1} \cdot r$.

Veamos, en primer lugar, que F es definible en $\mathfrak{R}$. La exponenciación de números naturales es una relación recursiva y , por tanto, definible en primer orden en $\mathbb{N}$. Hay entonces una fórmula $\varphi_E(x,y,z)$ que define a la exponenciación de números naturales en $\mathfrak{R}$, esto es ,

$\mathfrak{R} \models \varphi_E(x,y,z)\,[a,b,c]$ si y sólo si $a,b,c \in \omega$ y $a^b = c$.

Podemos obtener entonces fórmulas $\alpha_1(x,y,z)$ y $\alpha_2(x,y,z)$ tales que

$\mathfrak{R} \models \alpha_1(x,y,z)\,[a,b,c]$ si y sólo si $b \in \omega$ y c es el mayor número natural menor o igual que $10^{b+1} \cdot a$.

$\mathfrak{R} \models \alpha_2(x,y,z)\,[a,b,c]$ si y sólo si $b \in \omega$ y c es el mayor número natural divisible por 10 que es menor o igual que $10^{b+1} \cdot a$.

A tal efecto podemos usar las siguientes fórmulas :

$\alpha_1(x,y,z) = Ny \wedge Nz \wedge \exists u(\varphi_E(\overline{10},\, y + \overline{1}, u) \wedge \neg\, u\bullet x < z \wedge$
$\wedge\, \forall v(Nv \wedge \neg\, u\bullet x < v \rightarrow \neg\, z < v\,)\,)$.

$\alpha_2(x,y,z) = Ny \wedge Nz \wedge \exists u(\varphi_E(\overline{10},\, y + \overline{1},\, u) \wedge \neg\, u\bullet x < z \wedge$
$\wedge\, \exists w(Nw \wedge w\bullet\overline{10} \simeq z) \wedge \forall v(Nv \wedge \exists w(Nw \wedge w\bullet\overline{10} \simeq v) \wedge \neg\, u\bullet x < v \rightarrow$
$\rightarrow \neg\, z < v\,))$

donde $\overline{0} = 0$ y $\overline{n+1} = \overline{n} + 1$.

Entonces, F se define en $\mathfrak{R}$ mediante la fórmula :

$$\varphi_F(x,y,z) = \neg\, x < 0 \wedge x < 1 \wedge Ny \wedge (z \simeq 0 \vee z \simeq 1) \wedge$$
$$\wedge\ \exists x_1 x_2 (\ \alpha_1(x,y,x_1) \wedge \alpha_2(x,y,x_2) \wedge x_2 + z \simeq x_1\ ) .$$

Para cada subconjunto A de ω sea r_A el número real cuya parte entera es cero y cuya $n+1$-ésima cifra decimal es

1 si $n \in A$

0 si $n \notin A$.

Observemos que

$\mathfrak{R} \models \varphi_F(x,y,1)\ [r_A,n]$ si y sólo si $n \in A$.

y , por tanto,

$\mathfrak{R} \models \varphi_F(x,y,1)\ [r_A,n]$ si y sólo si $\mathbb{N} \models Xy\ [A,n]$

Esto nos permitirá traducir las fórmulas de segundo orden de la forma Xt y por tanto la cuantificación monádica de segundo orden.

Definimos a continuación la traducción de las fórmulas de segundo orden con sólo variables monádicas de segundo orden a fórmulas de primer orden del tipo de semejanza de $\mathfrak{R}$.

Para cada variable de primer orden, x , y de índice j sea x' la variable de primer orden de índice $2\cdot j$, y para cada variable monádica de segundo orden , X , y de índice j sea X' la variable de primer orden de índice $2\cdot j+1$. Asignamos a cada término t del tipo de semejanza de $\mathbb{N}$ un término t' del tipo de semejanza de $\mathfrak{R}$ y a cada fórmula de segundo orden con sólo variables monádicas de segundo orden, φ , y del tipo de semejanza de $\mathbb{N}$ una fórmula φ' del tipo de semejanza de $\mathfrak{R}$ de acuerdo con lo siguiente :

(i) $0' = 0$

(ii) $(S\,t)' = t+1$

(iii) $(t_1 + t_2)' = t'_1 + t'_2$

(iv) $(t_1 \cdot t_2)' = t_1' \cdot t_2'$

(v) $(t_1 \simeq t_2)' = t_1' \simeq t_2'$

(vi) $(t_1 < t_2)' = t_1' < t_2'$

(vii) $(Xt)' = \varphi_F(X', t', 1)$

(viii) $(\neg \varphi)' = \neg \varphi'$

(ix) $(\varphi \wedge \psi)' = (\varphi' \wedge \psi')$

(x) $(\exists x \varphi)' = \exists x' (Nx' \wedge \varphi')$

(xi) $(\exists X \varphi)' = \exists X' \varphi'$.

Resulta entonces que para cualesquiera subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de ω y números naturales $m_1, \ldots, m_k$ y cada fórmula $\varphi(X_1, \ldots, X_n, x_1, \ldots, x_k)$ con sólo variables monádicas de segundo orden y del tipo de semejanza de $\mathbb{N}$, son equivalentes :

(1) $\mathbb{N} \models \varphi(X_1, \ldots, X_n, x_1, \ldots, x_k) \; [A_1, \ldots, A_n, m_1, \ldots, m_k]$

(2) $\mathfrak{R} \models \varphi'(X_1', \ldots, X_n', x_1', \ldots, x_k') \; [r_{A_1}, \ldots, r_{A_n}, m_1, \ldots, m_k]$

De ello se sigue, entonces, que toda relación analítica entre números naturales es definible en $\mathfrak{R}$.

4.6 <u>Teorema</u>

Hay un conjunto recursivo de sentencias, en tipo de semejanza finito, cuyo conjunto de consecuencias en $\mathbb{R}$-lógica no es analítico.

Prueba:

El tipo de semejanza finito τ consta de los signos

$0, 1, +, \cdot, <, N, U$

y el conjunto recursivo T de tipo τ consta de los axiomas de la teoría de cuerpos ordenados y las siguientes sentencias:

(i) $N0$

(ii) $\forall x(Nx \longrightarrow N\, x + 1)$

(iii) $\forall x(\, x < 0 \longrightarrow \neg Nx\,)$

(iv) Para cada $n \in \omega$,

$$\forall x(\,\bar{n} < x \wedge x < \overline{n+1} \longrightarrow \neg Nx\,)$$

(v) $\forall x\, Ux$.

Obsérvese que el único $\mathbb{R}$-modelo (salvo isomorfía) de T es la expansión $\mathfrak{R}^*$ de $\mathfrak{R}$ en la que $U^{\mathfrak{R}^*} = \mathbb{R}$.

Supongamos, a efectos de obtener una contradicción, que $\{\sigma : T \models_{\mathbb{R}} \sigma\}$ es analítico. Por 4.5, $\{G\ddot{o}(\sigma) : T \models_{\mathbb{R}} \sigma\}$ es definible en $\mathfrak{R}$. Hay , pues, una fórmula $\varphi(x)$ tal que para cada $n \in \omega$,

(1) $\mathfrak{R} \models \varphi(\bar{n})$ si y sólo si $n \in \{G\ddot{o}(\sigma) : T \models_{\mathbb{R}} \sigma\}$.

Así, para cada sentencia σ del tipo de semejanza τ ,

(2) $\mathfrak{R} \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ si y sólo si $T \models_{\mathbb{R}} \sigma$.

y también

(3) $\mathfrak{R}^* \models \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ si y sólo si $T \models_{\mathbb{R}} \sigma$.

Como $\mathfrak{R}^*$ es el único $\mathbb{R}$-modelo de T , para cada sentencia σ de tipo τ ,

(4) $\mathfrak{R}^* \models \sigma$ si y sólo si $T \models_{\mathbb{R}} \sigma$.

De (3) y (4) concluimos que para cada sentencia σ de tipo τ,

(5) $\mathfrak{R}^* \models (\sigma \longleftrightarrow \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner))$.

El lema del punto fijo es aplicable a la teoría T pues , salvo por el uso de $t + 1 \ldots + 1$ en vez de $S \ldots S\, t$, todo axioma ψ de la teoría Q de Tarski & Mostowski & Robinson verifica $T \models \psi^N$. Este lema garantiza entonces la existencia de una sentencia σ tal que :

(6) $T \models (\sigma \leftrightarrow \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner))$.

En ese caso

(7) $\mathfrak{R}^* \models (\sigma \leftrightarrow \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner))$

y , entonces, por (5)

(8) $\mathfrak{R}^* \models (\sigma \leftrightarrow \neg\sigma)$.

Por tanto, $\{\sigma : T \models_{\mathbb{R}} \sigma\}$ no es analítico.

4.7 <u>Corolario</u>

Hay un tipo de semejanza finito en el que el conjunto de las sentencias válidas en $\mathbb{R}$ -lógica no es analítico.

Prueba:

El argumento es análogo al de 2.13 y 3.14 , usando II.23 y , en este caso , 4.6 y el hecho de que el tipo de semejanza de la $\mathbb{R}$-lógica es finito.

4.8 <u>Observación</u>

La lógica asociada al modelo ordenado $\langle Q, < \rangle$ de los números racionales es , esencialmente,lógica de primer orden pues $\langle Q, < \rangle$ es el único modelo numerable de la teoría del orden denso sin extremos. Si σ es una sentencia que axiomatiza esta teoría, tenemos que para cada conjunto numerable de sentencias T :

T tiene un modelo en la lógica asociada a $\langle Q, < \rangle$ si y sólo si $T \cup \{\sigma^U , \exists x Ux\}$ tiene un modelo .

Por tanto, esta lógica es ω-compacta y recursivamente enumerable para consecuencia.

Una situación análoga se da en la lógica asociada al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, pues $\mathbb{C}$ es el único modelo de cardinal 2^{ω} de la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica nula. Esta lógica es, entonces, 2^{ω}-compacta y recursivamente enumerable para consecuencia.

NOTAS AL CAPITULO IV

Los resultados expuestos en este capítulo están dispersos en la literatura lógica y , en ocasiones, no han sido formulados explícitamente.

En lo que atañe a ω-lógica, el teorema de ω-completud aparece por vez primera en Henkin (1954) y Orey (1956). Se conocen ejemplos de teorías ω-consistentes pero inconsistentes en ω-lógica, pero el que hemos expuesto en 1.26 tiene la ventaja de que la teoría considerada no es artificial, sino que es una extensión de la aritmética de Peano. Los resultados 2.7 y 2.11 , están en Apt & Marek (1974) , si bien establecidos con argumentos distintos y más complejos. El teorema de incompletud 2.8 aparece en Rosser (1937) . El corolario 2.13 no está en Apt & Marek (1974) , pues su prueba depende de los resultados expuestos en el capítulo II.

En lo que respecta a la lógica del buen orden, el teorema 3.5 está en Kotlarski (1978) , si bien con una prueba más complicada. Teoremas análogos a 3.8 y 3.13 están también en Kotlarski (1978) pero las pruebas que aquí ofrecemos de los mismos son distintas y más simples. El corolario 3.14 no aparece en Kotlarski (1978) , pues , de nuevo, depende de los teoremas del capítulo II.

Finalmente, en relación con la lógica de los números reales no tenemos noticia de ningún tratamiento análogo al aquí expuesto. Sin embargo, es bien conocida la relación entre números reales y conjuntos de números naturales , de manera que no resultan sorprendentes los resultados obtenidos.

REFERENCIAS

ADDISON, J.W. & HENKIN, L. & TARSKI, A. (1965) The Theory of Models. Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley. North Holland P.C. Amsterdam.

APT, K.R. & MAREK, W. (1974) " Second order arithmetic and related topics " . Annals of Mathematical Logic , vol. 6 , pág. 177-229 .

BARWISE, J. (1974) " Axioms for abstract model theory ". Annals of Mathematical Logic , vol. 7, pág. 221-265.

BARWISE, J. (1975) Admissible Sets and Structures : An Approach to Definability Theory. Springer - Verlag. Berlin.

BARWISE, J. & FEFERMAN, S. (1985) Model - Theoretic Logics. Springer - Verlag. Berlin.

BARWISE, J. & SCHLIPF, J. (1976) " An introduction to recursively saturated and resplendent models " . The Journal of Symbolic Logic , vol. 41, pág. 531-536.

BELL, J.L. & SLOMSON, A.B. (1969) Models and Ultraproducts: An Introduction. North Holland P.C. Amsterdam.

CHANG, C.C. (1973) " What's so special about saturated models ? " En MORLEY (1973b) , pág. 59-95 .

CHANG, C.C. & KEISLER, H.J. (1977) Model Theory (Second Edition) North Holland P.C. Amsterdam.

CRAIG, W. (1953) " On axiomatizability within a system ". The Journal of Symbolic Logic , vol. 18 , pág. 30-32.

CRAIG, W & VAUGHT, R.L. (1958) " Finite axiomatizability using additional predicates ". The Journal of Symbolic Logic , vol. 23, pág. 289-308.

DONER, J.E. & MOSTOWSKI, A. & TARSKI, A. (1978) " The elementary theory of well-ordering. A metamathematical study " . En MACINTYRE & PACHOLSKI & PARIS (1978), pág. 1-54.

EBBINGHAUS, H.D. (1985) " Extended Logics: The General Framework" En BARWISE & FEFERMAN (1985) , pág. 25-76.

EBBINGHAUS, H.D. & FLUM, J. & THOMAS, W. (1978) Einführung in die Mathematische Logik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft . Darmstadt.

FLUM, J. (1975) " Fist-order logic and its extensions " . En MULLER & OBERSCHELP & POTTHOFF (1975) , pág. 248-310.

GREGORCZYK, A. & MOSTOWSKI, A. & RYLL - NARDZEWSKI, C. (1958) " The classical and the ω-complete arithmetic " . The Journal of Symbolic Logic , vol. 23 , pág. 188-206.

HENKIN, L. (1954) " A generalization of the concept of ω-consistency " . The Journal of Symbolic Logic , vol.19, pág. 183-194.

KEISLER, H.J. (1971) Model Theory for Infinitary Logic North Holland P.C. Amsterdam.

KOTLARSKI, H. (1978) " Some remarks on well-ordered models " . Fundamenta Mathematicae, vol. 99, pág. 123-132.

KREISEL, G. (1965) " Model-theoretic invariants : applications to recursive and hyperarithmetic operations " . En ADDISON & HENKIN & TARSKI (1965), pág. 190-205.

LEVY, A. (1979) Basic Set Theory Springer - Verlag. Berlin.

LINDSTRÖM, P. (1966) " First order predicate logic with generalized quantifiers " . Theoria, vol 32. pág. 186-195.

LINDSTRÖM, P. (1969) " On extensions of elementary logic " Theoria , vol. 35, pág. 1-11.

MACINTYRE, A.J. & PACHOLSKI, L. & PARIS, J.B. (1978) Logic Colloquium '77 North Holland P.C. Amsterdam.

MAKOWSKY, J.A. & SHELAH, S. & STAVI, J. (1976) " Δ-logics and generalized quantifiers ". Annals of Mathematical Logic , vol. 10 , pág. 155-192.

MORLEY, M. (1973a) " Countable models with standar part " . En SUPPES & HENKIN & MOISIL & JOJA (1973) , pág. 57-62

MORLEY,M. (1973b) Studies in Model Theory Mathematical Association of America, Studies in Mathematics, vol 8.

MOSTOWSKI, A. (1957) " On a generalization of quantifiers " . Fundamenta Mathematicae , vol. 44 , pág. 12-36.

MÜLLER,G.H. & OBERSCHELP, A. & POTTHOFF, K. (1975) ISILC Logic Conference . Springer - Verlag Lecture Notes in Mathematics. Berlin.

OREY, S. (1956) " On ω -consistency and related properties " The Journal of Symbolic Logic vol 21. pág. 246-252.

RESSAYRE, J.P. (1977) " Models with compactness properties relative to an admissible language " . Annals of Mathematical Logic , vol. 11, pág. 31-55.

ROGERS, H. (1967) Theory of recursive functions and effective computability . McGraw - Hill Company. New York.

ROSSER, B. (1937) " Gödel theorems for non-constructive logics ". The Journal of Symbolic Logic , vol. 12, pág. 129-137.

SACKS, G. (1972) Saturated Model Theory W.A.Benjamin Inc. Massachusetts

SCHLIPF, J. S. (1978) " Toward model theory through recursive saturation " . The Journal of Symbolic Logic , vol. 43, pág. 183-206.

SHOENFIELD, J.R.(1967) Mathematical Logic . Addison & Wesley P.C. Massachusetts.

SUPPES, P. & HENKIN, L. & MOISIL, G.C. & JOJA, A. (1973) Logic, Methodology and Philosophy of Science IV Proceedings of the Fourth International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971 . North Holland P.C. Amsterdam.

TARSKI, A. (1958) " Remarks on predicate logic with infinitely long expressions " . Colloquium Mathematicum, vol. 6 , pág. 171-176.

TARSKI, A. & MOSTOWSKI, A. & ROBINSON, R.M. (1953) Undecidable Theories North Holland P.C. Amsterdam.

VAUGHT, R.L (1961) " Denumerable models of complete theories" . En Infinitistic Methods Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics. Warsaw 1959. Pergamon Press. Oxford.