

Aquesta tesi va ser llegida el dia
a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona, i va
obtenir la qualificació de

El President

El Secretari

El Vocal

El Vocal

El Vocal

*Este trabajo es fruto del sacrificio y del esfuerzo sostenido durante estos años,
por eso es más de Ysabel que mío, juntos lo dedicamos*

*A nuestros padres por darnos la vida y lo mejor de sí:
Gilberto (In memoriam) y Elvira, Quino y Blanca*

A nuestros hermanos Juana, Alfredo, Arturo y Felipe

A nuestro amigo Gerardo Valdés

A nuestros paisanos humildes

A nuestro Perú generoso, el Bello Durmiente

Agradecimientos

Quiero dejar testimonio de mi agradecimiento a todas aquellas personas que han hecho de mi estancia en esta ciudad y del trabajo diario compartido una experiencia vital y profesional enriquecedora.

Al Doctor Michele Chiumenti, por la confianza depositada en mí al haberme propuesto el tema de esta tesis y por su invaluable apoyo. Su capacidad de trabajo en equipo y la franqueza con que lo aborda me han estimulado constantemente. A los directores de mi tesis: al Profesor Carlos Agelet de Saracíbar, por su rigor al enfrentarse a los problemas, por su determinación en realizar un buen trabajo, su autoexigencia me ha obligado a intentar superarme continuamente; al Profesor Miguel Cervera, por sus orientaciones y apoyo en los momentos cruciales del trabajo. Al Profesor Ramón Codina, por compartir con generosidad sus ideas y conocimientos en el desarrollo de esta investigación. A Eugenio Oñate, por aceptarme en el programa de doctorado y porque a pesar de su enorme carga de trabajo pudo dedicarme algún momento para allanar escollos que aparecieron en el camino.

Al Profesor Xavier Oliver, que siempre tuvo palabras de afecto interesándose por mi entorno. Al personal del Departamento de Resistencia de Materiales en la Escuela de Caminos y al del CIMNE. En especial a Rosa, por su amabilidad y eficacia, por ayudarme más allá del cumplimiento del deber; de igual manera a Mercè, Marga Olea, Adriana, María Ángeles y María Jesús; a los *systems* Francesc, Guillermo, Andrés y Olga, por interceder por mi ante *la Informática*.

A mis compañeros de fatigas y andanzas: mis compañeros del 105, el despacho que nunca duerme, Loli Pulido, Omar Salomón, Carlos Lara, Franco Perazzo, Mariano Vasquez, Abilio de Jesús, Fernando Rastellini, Carlos Recarey, Noel Hernandez y Joanna Yrigoyen. A Gerardo Valdés, Fernando Zalamea, Esteban Samaniego, Eduardo Chaves, Carlos Ferrari, Rafael Hernández, Roberto Clemente, Eduardo Car, Gerardo Socorro, Guillaume Houzeaux, Tomás Prato, Consuelo Gómez, Sergio Blanco, Liliana Carreño, Alejandro Ruiz, Juan Carlos Cante, Francisco Zárate, Pablo, Fernando, Juanma y Miquel. A varios amigos les agradezco además la ayuda que me brindaron y su implicación desinteresada en la realización de este trabajo: a Gerardo, Loli, Esteban, Carlos Lara, Fernando Zalamea, Omar Salomón y Julio Acosta. A Raúl Gimenez, por su impecable trabajo y su siempre amable atención en la preparación de las figuras de la tesis.

A los amigos con quienes compartí almuerzos de fin de semana, paseé, jugué al fútbol, disfruté y viví: Elizabeth, Gerardo, Javi, Fer, Martha, Lucho, Cristina, Gabriel, Doris, Olivier, Pancho, Verónica, Érica, Juanita y Pablito, Omar, Karina,

Elisenda, Alberto, Virginia, Alba, Lidia, Antonio, Teresa, César, a Montserrat y Francisco, Carlos y Helga, Marisa, Lothar, Jorge y Mónica, Alex, Hans, Cacepa, Walbis, Julio el piloso, René, Oscar, Abel, Pablo, Mónica y Gustavo, Willy, Diego, Ayalki, Lemma, Liz, Julio, Iñik y a Raphi Julito.

A los amigos que aun estando lejos en la distancia siempre estuvieron cerca dándome su aliento: a Broni, Germán, Chivi, Suni, Kike, César, Fernando, Quique, a Don Gaetano, Victorino, Susy, Marco, Dante, Johnny, Bruno, a mis compadres Oscar y Rosa y a mi ahijado Oscar Daniel. A mis amigos y antiguos alumnos, hoy ellos me dan las lecciones: a Suni, José Carlos, Manolo, José Hugo y Fernando; a Laura, Juan Carlos, Jorge, Rurick y Roberto (In memoriam), los recordaré siempre.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú, a mis compañeros de trabajo y a las autoridades que trabajan por ella, por darme la oportunidad de realizar estos estudios y por el apoyo económico recibido. A la Agencia Española de Cooperación Internacional y a la Univeritat Politècnica de Catalunya, por la beca otorgada para subvencionar parcialmente mi estancia en Barcelona.

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Motivación: bloqueo de elementos estándar	2
1.1.1	Bloqueo en flexión	2
1.1.2	Bloqueo en cuasi-incompresibilidad	3
1.2	Objetivo de la tesis	4
1.3	Contenido de la tesis	5
2	Estado del arte en la formulación de elementos	7
2.1	Breve reseña histórica	7
2.2	Panorama actual de formulaciones de elementos	11
2.2.1	Formulaciones variacionales mixtas	11
2.2.2	Formulaciones de integración reducida	14
2.3	Principales líneas de investigación en desarrollo	15
2.3.1	Elementos <i>EAS</i> y estabilización	15
2.3.2	Formulaciones mixtas y estabilización	16
2.4	Discusión	17
2.5	Sumario y conclusión	19
A	Líneas de investigación en desarrollo	21
A.1	Motivación	21
A.1.1	La técnica de estabilización <i>GLS</i> como motivación	22
A.1.2	Desarrollo de las funciones de forma y funciones “ <i>hourglass</i> ”	23
A.2	Elementos <i>EAS</i> y estabilización	25
A.2.1	Formulación <i>EAS</i> estabilizada	25
A.2.2	Integración reducida y estabilización con elementos <i>EAS</i>	26
A.3	Estabilización de elementos mixtos	30
A.3.1	Elemento tetraédrico mixto estabilizado con método <i>GLS</i>	30
A.3.2	Elemento tetraédrico mixto estabilizado con burbuja <i>EAS</i>	31

B	Método variacional y de proyección para cuasi-incompresibilidad	33
B.1	Escisión cinemática básica	33
B.2	Principio variacional paracuasi-incompresibilidad	34
B.3	Discretización mixta discontinua	35
C	Método de deformaciones mejoradas (<i>EAS</i>)	37
C.1	Formulación Variacional de 3 campos	37
C.1.1	Formulación variacional de 3 campos mejorada	39
C.2	Mejora del gradiente de deformaciones	41
C.3	Elemento sólido tri-lineal Q1/E9	42
C.4	Elemento tri-lineal modificado QM1/E12	43
D	Elementos de mecánica del medio continuo	47
D.1	Definiciones cinemáticas básicas	48
D.1.1	Movimiento	49
D.2	Tensores de deformación	52
D.2.1	Introducción	52
D.2.2	Tensores materiales de deformación	52
D.2.3	Tensores espaciales de deformación	53
D.2.4	Descomposición espectral de los tensores de deformación	55
D.2.5	Cambio de volumen. Interpretación del determinante del gradiente de deformación	56
D.2.6	Gradiente de velocidad y velocidad de deformación	57
D.3	Deformaciones infinitesimales	57
D.4	Fuerzas y tensores de tensión	58
D.4.1	Fuerzas volumen	58
D.4.2	Fuerzas de superficie	58
D.4.3	Tensores de tensión	59
D.5	Operaciones de transporte Push-forward y Pull-back	60
D.6	Objetividad y derivadas objetivas	60
D.7	Ecuaciones del medio continuo	62
D.7.1	Introducción	62
D.7.2	Ecuaciones de conservación-balance	62
D.8	Métodos Variacionales	65
D.8.1	Residuos ponderados	66
D.8.2	Funcionales y principios variacionales	68
3	Formulación mixta y métodos de estabilización	71
3.1	Introducción	71
3.2	Formulación irreducible y problema de incompresibilidad	72

3.2.1	Modelo constitutivo	72
3.2.2	Formulación en el continuo	73
3.2.3	Discretización por elementos finitos	75
3.2.4	Inviabilidad de la formulación para el problema de incompresibilidad	77
3.3	Una formulación mixta para el problema de incompresibilidad: problema de Stokes	79
3.3.1	Modelo constitutivo	79
3.3.2	Formulación en el continuo	79
3.3.3	Discretización	81
3.3.4	Expresión matricial	82
3.4	Limitaciones de las formulaciones mixtas	82
3.4.1	Introducción	82
3.4.2	Propiedades de la solución de la formulación irreducible	83
3.4.3	Formulación mixta y necesidad de control sobre la presión: condición LBB	85
3.4.4	Técnica de conteo de restricciones: elementos descartados	89
3.5	Métodos de estabilización: breve reseña	92
4	Formulación de elementos estabilizados en deformaciones infinitesimales	95
4.1	Introducción	95
4.2	El método de las sub-escalas	95
4.2.1	Planteamiento de un problema por el método de las sub-escalas	96
4.2.2	Las sub-escalas ortogonales	99
4.2.3	Aspectos de la aplicación a la estabilización de la formulación mixta del problema incompresible	100
4.3	Formulación en régimen elástico	102
4.3.1	Modelo constitutivo	102
4.3.2	Formulación en el continuo	103
4.3.3	Planteamiento en multiescalas	106
4.3.4	Expresión matricial	110
4.3.5	Aspectos de implementación	112
4.4	Formulación en régimen plástico	113
4.4.1	Modelo constitutivo	113
4.4.2	Formulación en el continuo	114
4.4.3	Planteamiento en multiescalas	115
4.4.4	Aspectos de implementación	120

5	Formulación de elementos estabilizados en grandes deformaciones	123
5.1	Introducción	123
5.2	Régimen Elástico	123
5.2.1	Modelo constitutivo	123
5.2.2	Formulación en el medio continuo	125
5.2.3	Planteamiento en multiescalas	128
5.3	Régimen Plástico	133
5.3.1	Modelo constitutivo	134
5.3.2	Formulación en el medio continuo	135
5.3.3	Planteamiento en multiescalas	136
5.3.4	Aspectos de implementación	140
E	Cálculo de algunas expresiones importantes	145
E.1	Expresión del modelo constitutivo	145
E.2	Ecuaciones en forma fuerte	145
E.2.1	Ecuación de gobierno	145
E.2.2	Ecuación de la deformación volumétrica	146
E.3	Forma débil del problema	146
E.3.1	Ecuación de gobierno	146
E.3.2	Ecuación de la deformación volumétrica	148
E.4	Linealización	148
E.4.1	Ecuaciones en forma fuerte	148
E.4.2	Ecuaciones en forma débil	150
6	Simulaciones Numéricas	153
6.1	Ensayos en deformaciones infinitesimales	153
6.1.1	Modelo constitutivo de elasticidad	154
6.1.2	Modelo de elasto-plasticidad J2	163
6.2	Ensayos en grandes deformaciones	173
6.2.1	Modelos de elasticidad	173
6.2.2	Modelo de elasto-plasticidad J2	181
7	Conclusiones	197
7.1	Síntesis	197
7.2	Conclusiones	198
7.3	Aportaciones	199
7.4	Líneas futuras de investigación	200
	Referencias	203

Índice de Figuras

D.1	Esquema de la deformación de un medio continuo. Transformación φ y tensor gradiente de deformación \mathbf{F}	48
D.2	Operaciones de transporte de tensores entre configuraciones: ϕ_* push-forward (PF) y ϕ^* pull-back (PB).	61
3.1	Elementos mixtos u/p con presión discontinua. Parámetro de restricción r . (*) Se supone que cumple la condición <i>LBB</i> en mallas distorsionadas aunque no se ha demostrado matemáticamente. (**) Estos elementos cumplen la condición <i>LBB</i>	90
3.2	Elementos mixtos u/p con presión continua. Parámetro de restricción r . (*) Estos elementos cumplen la condición <i>LBB</i>	91
4.1	Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras en modelo elástico lineal.	103
4.2	Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras en modelo elasto-plástico con plasticidad J2.	116
5.1	Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras expresadas en función del tensor izquierdo de Cauchy-Green correspondientes a un modelo hiperelástico.	125
5.2	Esquema de las relaciones cinemáticas en el problema elástico mediante sub-escalas.	128
5.3	Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras expresadas en componente isocórica de la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green para modelo elasto-plástico con plasticidad J2 en grandes deformaciones.	138
6.1	Malla utilizada para la verificación de los test de la parcela.	155
6.2	Test de cuña en 2D-deformación plana.	156
6.3	Test de cuña en 2D-deformación plana. Resultados correspondientes a los elementos <i>P1</i> , <i>Q1P0</i> y <i>T1P1</i> . Distribuciones de presión y tensión de Von Mises.	157

6.4	Test de flujo inducido en una cavidad (<i>driven cavity flow</i>). Datos geométricos. Se muestra una malla de 10×10 elementos triangulares. Se prescriben los desplazamientos (velocidades) horizontales $u = 1$ en la superficie libre, excepto en los nodos extremos donde se prescriben iguales a cero.	158
6.5	Problema de flujo inducido en una cavidad. Desplazamiento vertical v en el plano de corte horizontal central, $y = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ y el elemento similar de la formulación GLS con mallas de 10×10 , comparadas con la solución con malla de elementos $T1P1$ de 50×50	159
6.6	Problema de flujo inducido en una cavidad. Desplazamiento horizontal u en el plano de corte vertical central, $x = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ y el elemento similar de la formulación GLS con mallas 10×10 comparadas con la solución con malla de elementos $T1P1$ de 50×50	160
6.7	Problema de flujo inducido en una cavidad. Presión p en el plano de corte horizontal central, $y = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ y el elemento similar de la formulación GLS con mallas 10×10 , comparadas con la solución con malla de elemento $T1P1$ de 50×50	161
6.8	Problema de flujo inducido en una cavidad. Sensibilidad al parámetro de estabilización. Presión p en el plano de corte horizontal central, $y = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ estabilizado con el método GLS con malla de 20×20	161
6.9	Problema de flujo inducido en una cavidad. Sensibilidad al parámetro de estabilización. Presión p en el plano de corte horizontal central, $y = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ propuesto.	162
6.10	Test de punzonado de Prandtl (<i>Prandtl punch test</i>). Datos geométricos en mm	163
6.11	Test de punzonado de Prandtl (<i>Prandtl punch test</i>). Malla estructurada para a) el cálculo de la curva fuerza vs. desplazamiento b) obtención de la distribución de deformación plástica equivalente . . .	164
6.12	Test de punzonado de Prandtl (<i>Prandtl punch test</i>). Distribuciones de deformación plástica equivalente para a) elemento $Q1P0$ b) elemento propuesto $T1P1$	164
6.13	Test de punzonado de Prandtl (<i>Prandtl punch test</i>). Curva fuerza vs. desplazamiento del punto de aplicación de la carga.	165
6.14	Problema de la membrana de Cook.	166
6.15	Membrana de Cook. Mallas deformadas de 10 elementos por lado a) de cuariláteros $Q1P0$ y b) de triángulos $T1P1$	167

- 6.16 Problema de la membrana de Cook con modelo de plasticidad J2 incompresible. Ensayo comparativo de convergencia entre el elemento triangular de la formulación estándar, el elemento $Q1P0$ y el elemento triangular de la presente formulación $T1P1$ 168
- 6.17 Problema de la membrana de Cook con modelo constitutivo de elasto-plasticidad J2. Distribución de presión con malla de 50×50 elementos por lado de tipo a) cuadrilátero $Q1P0$, b) $T1P1$, triángulo u/p estabilizado de la presente formulación c) $P1$, triángulo estándar. 168
- 6.18 Compresión no-homogénea en deformación plana. Datos geométricos: $L = 0,60 \text{ m}$, $h = 0,20 \text{ m}$, $a = 0,20 \text{ m}$ y $\delta = 0,012 \text{ m}$ 169
- 6.19 Compresión no-homogénea en deformación plana. Distribuciones de deformación plástica equivalente correspondiente a a) elemento triangular estándar $P1$ b) elemento $Q1P0$ c) y d) elemento $T1P1$ sin y con corrección de módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización, respectivamente. Distribuciones de presión correspondientes a e) elemento triangular estándar $P1$ f) elemento $Q1P0$ g) y h) elemento $T1P1$ sin y con corrección de módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización, respectivamente. 170
- 6.20 Ensayo de compresión 3D con modelo elasto-plástico J2. Mallas deformadas: a) malla de hexaedros de la formulación $Q1P0$ b) malla de elementos tetraédricos estabilizados $T1P1$ 172
- 6.21 Ensayo de compresión 3D con modelo elasto-plástico J2. Distribuciones de presión correspondientes a a) $Q1P0$ b) $T1P1$ 172
- 6.22 Ensayo de compresión no-homogénea 2D. Datos geométricos $L = 20 \text{ mm}$, $a = h = 10 \text{ mm}$ 174
- 6.23 Test de compresión no-homogénea. Modelo hiperelástico Neo-Hooke. Malla de 8 elementos sobre la altura del bloque deformada. Factor de carga aplicado $\nu = 40$ 174
- 6.24 Estudio de convergencia con respecto al refinamiento de la malla. Comparación de la relación de compresión (evaluada en el punto central superior) obtenida por los elementos $Q1$, $Q1P0$ y $T1P1$ para diferentes factores de carga. 175
- 6.25 Ensayo de compresión no-homogénea. Mallas de a) elementos $Q1P0$ b) elementos $T1P1$ 176
- 6.26 Ensayo de compresión no-homogénea. Distribuciones de presión correspondientes a malla de elementos a) $Q1P0$ b) $T1P1$ 177
- 6.27 Ensayo de compresión no-homogénea. Distribuciones de tensión de Von Mises correspondientes a malla de elementos a) $Q1P0$ b) $T1P1$. 177
- 6.28 Ensayo 3D de compresión. a) Malla sobre la configuración de referencia y b) malla deformada. 178

6.29	Test de compresión con modelo elástico compresible. Distribución de presión. Vistas de la zona interior e exterior respectivamente del cubo con mallas de a) elemento triangular estándar b) elemento $Q1P0$ c) elemento $T1P1$ con constante $c = 1$ d) elemento $T1P1$ $c = 10$	179
6.30	Test de compresión con modelo elastico incompresible . Distribución de presión. Vistas de la zona interior e exterior respectivamente del cubo con mallas de a) elemento triangular estándar b) elemento $Q1P0$ c) elemento $T1P1$ con constante $c = 1$ d) elemento $T1P1$ $c = 10$	180
6.31	Ensayo de compresión profunda no-homogenea 2D. Datos geométricos $L = 20\text{ mm}$, $a = h = 10\text{ mm}$	181
6.32	Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Malla estructurada de elementos $P1$ estándar.	182
6.33	Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2con régimen elástico incompresible. Malla no-estructurada de elementos $P1$ estándar.	182
6.34	Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Distribución de la presión. Resultado obtenido empleando malla no-estructurada de elementos $P1$ estándar.	183
6.35	Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Distribución de la presión. Resultado obtenido con malla no-estructurada de elementos mixtos u/p no estabilizados.	183
6.36	Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Malla estructurada de elementos triangulares $T1P1$ deformada.	184
6.37	Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Malla estructurada de elementos cuadriláteros $Q1P0$ deformada.	184
6.38	Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Distribución de la presión. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por el número de elementos sobre la altura: a) 16 elementos $T1P1$. b) 16 elementos $Q1P0$. c) 32 elementos $T1P1$. d) 32 elementos $Q1P0$	186

- 6.39 Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Distribución de la tensión de Von Mises. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por el número de elementos sobre la altura: a) 16 elementos *T1P1*. b) 16 elementos *Q1P0*. c) 32 elementos *T1P1*. d) 32 elementos *Q1P0*. 187
- 6.40 Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Distribución del índice de plasticidad (relación entre la tensión de Von Mises y la tensión de fluencia). Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por el número de elementos sobre la altura: a) 16 elementos *T1P1*. b) 16 elementos *Q1P0*. c) 32 elementos *T1P1*. d) 32 elementos *Q1P0*. 188
- 6.41 Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Malla no-estructurada de elementos triangulares *T1P1* deformada. 189
- 6.42 Sensibilidad de la presión con respecto a la variación de la constante *c* del parámetro de estabilización. Resultados obtenidos con mallas estructuradas de 16 elementos *T1P1* sobre la altura, para valores *c* de a) 0, 1 b) 0, 25 c) 0, 5 d) 1. 190
- 6.43 Sensibilidad de la presión con respecto a la variación de la constante *c* del parámetro de estabilización. Resultados obtenidos con mallas no-estructuradas de 16 elementos *T1P1* sobre la altura, para valores *c* de a) 0, 1 b) 0, 25 c) 0, 5 d) 1. 190
- 6.44 Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico compresible. Distribución de los desplazamientos verticales. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por 16 elementos sobre la altura: a) elementos *T1P1*. b) elementos *Q1P0*. 192
- 6.45 Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico compresible. Distribución de la presión. Resultados con mallas estructuradas de 16 elementos sobre la altura: a) *T1P1*. b) *Q1P0*. 192
- 6.46 Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico compresible. Distribución de la tensión de Von Misses. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por 16 elementos sobre la altura: a) elementos *T1P1*. b) elementos *Q1P0*. 193

6.47 Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico compresible. Distribución del índice de plasticidad. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por 16 elementos sobre la altura: a) elementos *T1P1*. b) elementos *Q1P0*. 193

6.48 Test de compresión con modelo elasto-plástico compresible . Distribución de presión. Vistas de la zona interior e exterior respectivamente del cubo con mallas de a) elemento triangular estándar b) elemento *Q1P0* c) elemento *T1P1* con constante $c = 1$ d) elemento *T1P1* $c = 10$ e) elemento *T1P1* con constante $c = 1$ con aproximación al módulo de cizallamiento f) elemento *T1P1* con $c = 10$ con aproximación al módulo de cizallamiento. 196

Índice de Tablas

2.1	Cuadro comparativo de las principales líneas de investigación	18
4.1	Algoritmo para resolver formulación estabilizada	112
4.2	Algoritmo para resolver problema elasto-plástico en deformaciones infinitesimales	122
5.1	Algoritmo para resolver problema elasto-plástico en deformaciones finitas	143
6.1	Valores utilizados en los tests de la parcela.	155
6.2	Porcentajes de tiempo por operación de los elementos <i>T1P1</i> y <i>Q1P0</i> (para el problema 2D presentado los tiempos totales son similares) . .	191
6.3	Porcentajes de tiempo por operación de los elementos <i>T1P1</i> y <i>Q1P0</i> (para el problema 3D presentado el tiempo de CPU es 40 % mayor con elementos <i>T1P1</i> que con <i>Q1P0</i>)	195

Capítulo 1

Introducción

El método de elementos finitos es una herramienta matemática cuya utilización en la solución de problemas de la física y de la ingeniería está cada vez más extendida y cuya importancia es cada día mayor. En la ingeniería se integra actualmente en el proceso de diseño mediante el uso de diversos programas comerciales; paralelamente se desarrollan códigos para su extensión al estudio de diversos fenómenos físicos y sus aplicaciones. Dentro del desarrollo del método de los elementos finitos la formulación de elementos es un área de intensa investigación en sí misma, denominada *tecnología de elementos*. El objetivo de la tecnología de elementos es desarrollar formulaciones que den lugar a elementos robustos, eficientes desde el punto de vista computacional en la simulación numérica de problemas y que sean aptos para aplicaciones generales. Una serie de requisitos y de características deseables se pueden considerar como objetivos a cumplir al plantear formulaciones de elementos en mecánica de sólidos deformables:

- a) buen comportamiento en situaciones de incompresibilidad,
- b) buen comportamiento en solicitaciones de flexión,
- c) eficiencia computacional,
- d) poca sensibilidad a la distorsión,
- e) precisión en mallas bastas,
- f) aplicable a formas tetraédricas para facilitar la generación de mallas,
- g) facilidad para la implementación de modelos constitutivos no-lineales.

Actualmente en aplicaciones prácticas se opta por el uso de elementos de bajo orden por su simplicidad, robustez y por una serie de aspectos ventajosos que ofrecen, por ejemplo, en la generación automática de mallas y en la imposición de condiciones de contacto. Los elementos de bajo orden son menos sensibles a la distorsión que los elementos de más alto orden en problemas de grandes deformaciones; por otro lado, dan lugar a un reducido ancho de banda del sistema de ecuaciones a nivel global,

lo que se traduce en el abaratamiento del costo computacional, menor demanda de memoria, etc.

Sin embargo, en el ámbito de la mecánica de sólidos se ha comprobado que los elementos estándar de bajo orden, por ejemplo tetraedros y hexaedros lineales en desplazamientos, no dan buenos resultados en aplicaciones cuasi-incompresibles. En estos casos las predicciones numéricas que se obtienen con estos elementos, utilizando mallas que en aplicaciones generales son adecuadas, difieren significativamente de la respuesta física, incluso en ordenes de magnitud. Entre las aplicaciones de interés práctico con materiales caracterizados por su comportamiento incompresible se encuentran, por ejemplo, en régimen elástico el estudio de materiales elastómeros, como por ejemplo el caucho y materiales sintéticos similares, y el tratamiento de las grandes deformaciones plásticas en los metales. Es necesario entonces conocer las causas que originan estos inconvenientes y desarrollar formulaciones capaces de dar respuesta a estas aplicaciones de manera que se satisfagan los requisitos generales mencionados.

1.1 Motivación: bloqueo de elementos estándar

En general los resultados que se obtienen mediante el método estándar en desplazamientos de elementos finitos son buenos para una gran variedad de problemas. Al formular un problema del continuo mediante el método de elementos finitos se adopta un espacio de funciones de prueba. En esencia, lo que se hace al buscar soluciones dentro de un determinado espacio de funciones es introducir restricciones en la solución de los desplazamientos del problema del continuo; el método de elementos finitos permite encontrar la mejor aproximación dentro de ese espacio. Sin embargo, en ciertas situaciones existen restricciones propias del medio (restricciones físicas), que al ser planteadas en forma discreta conducen a un sistema sobre-restringido, excesivamente rigidizado. El espacio de funciones de prueba resulta demasiado pobre para el problema en cuestión e incapaz de representar las deformaciones que experimenta el medio. Como consecuencia de ello, la solución ofrecida por este espacio de funciones, en general infra-estimada, en casos extremos podría llegar a ser cercana a la nula. A este fenómeno se le denomina bloqueo. El bloqueo de elementos se presenta principalmente en dos situaciones diferentes, por una lado en solicitaciones de flexión predominante y por otro en problemas en medios incompresibles o cuasi-incompresibles.

1.1.1 Bloqueo en flexión

Los elementos lineales estándar resultan atractivos por su simplicidad y bajo costo. Éstos tienen el mínimo número de nodos; de igual manera, el número de grados de

libertad (de movimiento) por elemento también es mínimo. Esta restricción se traduce en una rigidez intrínseca en el elemento, propia de éste y ajena a las condiciones físicas del problema. Particularmente, en aplicaciones de flexión predominante los elementos lineales ofrecen resultados poco satisfactorios.

En un problema de flexión la comparación del campo de desplazamientos teórico con el descrito por un elemento lineal permite apreciar la dificultad. El elemento cuadrilátero lineal por ejemplo no tiene capacidad de representar el comportamiento real porque carece de los modos de deformación que permitirían a las fibras longitudinales adoptar la curvatura que es característica en flexión. Esta dificultad para representar la deformación se puede entender también como una excesiva rigidez del elemento. Como consecuencia de esta excesiva rigidez también se puede detectar la presencia de una deformación cortante y de un esfuerzo cortante asociado a ella, que no son propios de la solución física y por eso se denominan espurios (no son un efecto real en el continuo, sino que son introducidos por el elemento).

En mallas bastas de elementos de bajo orden de interpolación esta rigidez excesiva conduce a dificultades que se suelen denominar de bloqueo de la solución o respuesta. Sin embargo, cabe resaltar que estas dificultades se pueden aliviar notablemente utilizando mallas más finas o bien utilizando elementos cuadráticos en desplazamientos.

1.1.2 Bloqueo en cuasi-incompresibilidad

Ésta es sin lugar a dudas una de las dificultades más importante que se encuentran en problemas que se abordan con el método de elementos finitos. Las aplicaciones prácticas que se presentan en medios sólidos cuasi-incompresibles son el tratamiento de elastómeros en régimen elástico y el tratamiento de metales en régimen plástico con modelos de plasticidad J2. Este tipo de modelo constitutivo es el de uso más extendido en las simulaciones numéricas del comportamiento de materiales metálicos elasto-plásticos. Este modelo considera como hipótesis que las deformaciones plásticas son isocóricas (es decir, que no producen cambio de volumen), de acuerdo con las verificaciones experimentales en ese sentido.

La principal dificultad de la aplicación estándar en desplazamientos en problemas cuasi-incompresibles consiste en la determinación de la tensión media o presión, que está relacionada con la parte volumétrica de la deformación. En elasticidad se puede apreciar de forma más clara esta dificultad. El comportamiento cuasi-incompresible de materiales como los elastómeros está asociado a valores del *coeficiente de Poisson* ν próximos a 0,5. El efecto se puede estudiar observando la influencia de este coeficiente en el comportamiento volumétrico del material. El *módulo de deformación volumétrica* K relaciona directamente la tensión media o componente media de las tensiones σ_m con la deformación volumétrica ε_v :

$$\sigma_m = K \varepsilon_v \quad (1.1)$$

En términos del coeficiente de Poisson ν , el módulo de deformación volumétrica K es:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (1.2)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material. Como se puede observar a medida que el coeficiente de Poisson $\nu \rightarrow 0,5$ el módulo de deformación volumétrica $K \rightarrow \infty$. Cerca de $\nu = 0,5$ las tensiones se hacen extremadamente sensibles al valor de ν y los problemas numéricos se acentúan, (Zienkiewicz and Taylor, 1994a). Por un lado las tensiones resultan sobre-estimadas y por el otro las deformaciones resultan infra-estimadas; en casos severos esto puede dar lugar al bloqueo de los elementos. Es decir, ante la imposibilidad de representar un campo de deformaciones isocórico el elemento ofrece solución nula en desplazamientos, para ajustarse a la condición de deformación volumétrica nula. Los elementos que presentan bloqueo volumétrico en elasticidad sufren también el mismo problema cuando se utilizan para representar el comportamiento de materiales metálicos en rango plástico.

No se logra superar totalmente esta dificultad aunque se empleen mallas más finas. A diferencia de lo que ocurre en el bloqueo en flexión, en el bloqueo por cuasi-incompresibilidad sólo se logra aminorar estos efectos utilizando elementos en desplazamientos de mayor grado de interpolación, pero no se pueden alcanzar resultados aceptables a menos que se utilicen elementos de orden muy grande, cuyo costo computacional resulta prohibitivo. Sólo el uso de formulaciones especiales de elementos y su correcta aplicación, logra mejores resultados en estas situaciones. La investigación en este campo es muy intensa y se plantean diversas alternativas para afrontar este problema, tal como se verá en la revisión del estado del arte en el siguiente capítulo.

1.2 Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis es desarrollar e implementar una formulación precisa y robusta de elementos capaz de abordar el problema de incompresibilidad en mecánica de sólidos, con modelos constitutivos elásticos y elasto-plásticos J2, tanto en el contexto de deformaciones infinitesimales como en el de las grandes deformaciones. Con la finalidad de ser útiles en aplicaciones prácticas e industriales se requiere que los elementos diseñados cumplan ciertos requisitos, como tener bajo costo computacional, buen comportamiento en mallas bastas, ofrecer facilidades para la implementación de modelos constitutivos no-lineales y para la generación de mallas en geometrías

complejas. El objetivo específico es el desarrollo de elementos triangulares y tetraédricos de interpolación lineal.

1.3 Contenido de la tesis

En el siguiente capítulo se aborda el estudio del estado del arte, con la finalidad de ubicar el trabajo en el contexto actual de la tecnología de elementos, se identifican las principales líneas de investigación en desarrollo y se procura detectar las posibilidades de desarrollo en este campo.

En el anexo A se describen con más detalle las principales líneas de investigación en desarrollo. En el anexo B se presenta la formulación de elementos por métodos variacionales y de proyección para incompresibilidad, dentro del cuál se puede obtener por ejemplo el elemento $Q1P0$; por otro lado en el anexo C se presentan los aspectos principales de la formulación de elementos de deformaciones mejoradas EAS . Se incluyen estas formulaciones como referencia por su importancia en la tecnología de elementos en mecánica de sólidos y porque algunas líneas de investigación que se citan más adelante trabajan sobre la base de estas formulaciones para perfeccionarlas. En el anexo D se presenta una revisión de los conceptos más importantes, nomenclatura y expresiones principales de la mecánica del medio continuo, utilizados en los siguientes capítulos.

En el capítulo 3 se presenta el problema de incompresibilidad en mecánica de sólidos y la dificultad de la formulación estándar en desplazamientos para abordarlo. Se presenta la formulación mixta en desplazamientos y presión, \mathbf{u}/p , como alternativa para el tratamiento del problema incompresible, se plantean las limitaciones propias de esta formulación y la necesidad de aplicar métodos de estabilización en la formulación de elementos mixtos. Se presenta también el método de las sub-escalas, como marco para la formulación de problemas por el método de los elementos finitos, y particularmente el método de las sub-escalas ortogonales.

En los capítulos 5 y 6 se aborda la formulación de elementos en los rangos de deformaciones infinitesimales y de grandes deformaciones, respectivamente. De acuerdo con el objetivo planteado, se particulariza el interés en el desarrollo de elementos triangulares y tetraédricos mixtos con interpolaciones lineales y continuas \mathbf{u}/p . Se consideran en cada caso modelos constitutivos elásticos y de elasto-plasticidad J2.

En el capítulo 6 se presentan ejemplos de validación y aplicación, con la finalidad de mostrar el comportamiento de los elementos propuestos. Se presentan aplicaciones en deformaciones infinitesimales y en grandes deformaciones, en cada caso se consideran modelos constitutivos elásticos y elasto-plásticos J2.

Finalmente se enuncian las conclusiones de la tesis, se resaltan las aportaciones originales realizadas y se plantean algunas de las líneas futuras de investigación que

se vislumbran a partir del presente trabajo.

Capítulo 2

Estado del arte en la formulación de elementos

Son muchos los investigadores que han dedicado un considerable esfuerzo en el desarrollo de elementos de bajo orden que sirvan como herramienta de aplicación general en mecánica de sólidos deformables. Diversas formulaciones tratan de construir elementos capaces de satisfacer eficientemente los requisitos mencionados en el capítulo anterior. Las más importantes de éstas son:

- Formulación en desplazamientos,
- Formulaciones variacionales mixtas,
- Formulaciones de integración reducida.

A continuación se presenta una visión histórica del desarrollo de las formulaciones que condujeron a las que son de aplicación actual. Éstas se presentan luego en forma panorámica y finalmente se identifican las principales líneas de investigación existentes en nuestros días en el tema de formulaciones de elementos en mecánica de sólidos.

2.1 Breve reseña histórica

El método de los elementos finitos como herramienta en el análisis de problemas de mecánica de sólidos empezó a gestarse en la década de 1940 (Zienkiewicz and Taylor, 1994a). Según refiere (Taylor, 1999), el uso de *elementos triangulares* se remonta a los primeros años de desarrollo del método. (Courant, 1943) los aplicó a la solución variacional de un problema de torsión y (Turner et al., 1956) presentaron soluciones a problemas de esfuerzo plano utilizando cuadriláteros ensamblados a

partir de componentes de forma triangular. (Taig, 1961) formuló el primer *elemento cuadrilátero isoparamétrico*, según (Lautersztajn and Samuelsson, 2000). Más tarde (Argyris, 1965a) formuló *elementos tetraédricos* para el tratamiento de problemas tri-dimensionales. Al progresar el nivel de desarrollo y extenderse las aplicaciones se encontraron importantes dificultades al abordar problemas en los que predominaba en el material un comportamiento cercano a la incompresibilidad, tales como aplicaciones en elasto-plasticidad y en materiales elastómeros. La *formulación irreducible en desplazamientos* no ofrecía resultados satisfactorios en estos casos y no se conocían bien las causas.

Más adelante, se consideró la aplicabilidad de las *formulaciones mixtas*. El término *mixto* se empezó a aplicar en los '60, para describir métodos en que tanto los desplazamientos como las tensiones se aproximan como variables primarias. Las formulaciones mixtas, además del campo de desplazamientos, incluyen en el planteamiento del problema variables adicionales que se consideran como independientes, a pesar de que podrían obtenerse a partir de los desplazamientos en una formulación irreducible como es el caso de las tensiones. (Pian, 1964) planteó una formulación de dos campos con las *tensiones supuestas* como independientes (*assumed stresses*). Este trabajo condujo a una serie de métodos que se analizaron en (Atluri, 1975). (Fraeijns de Veubeke, 1965) estableció el llamado *principio de limitación*, según el cual bajo ciertas condiciones no se puede esperar precisión adicional de las formulaciones mixtas. (Hermann, 1965) desarrolló los primeros elementos efectivos derivados de un principio variacional. (Chorin, 1967) introdujo los conceptos de escisión de las ecuaciones de gobierno y de métodos de proyección. La inclusión de los campos de variables adicionales permite un mejor tratamiento de las restricciones internas planteadas por el problema específico, la incompresibilidad del medio por ejemplo. Si bien se lograron buenos resultados, en ciertos casos algunos de los elementos derivados de estas formulaciones también fallaban. Se requería un análisis más profundo de estas formulaciones.

Por otro lado, también se obtuvieron buenos resultados ante ésta y otras dificultades, como el estudio de problemas de flexión en placas mediante elementos tridimensionales, aplicando *técnicas de integración reducida* de la matriz de rigidez. La primera aplicación se presentó en (O.C. Zienkiewicz, 1971); ésta consistió en una reducción uniforme del orden de integración en problemas de placas y láminas. Luego, (Naylor, 1974) y (Zienkiewicz and Godbole, 1975) abordaron el problema de incompresibilidad con elementos cuadriláteros de 8 nodos. Estos procedimientos se derivaron en principio de razonamientos heurísticos, y se concibieron como un mero desarrollo de la técnica de integración. El concepto de *integración selectiva* fue propuesto por (W.P. Doherty, 1969). En este caso el orden de integración se reduce sólo en partes específicas de la matriz de rigidez. Con esta idea se obtuvo una mejora en el comportamiento del elemento de 4 nodos estándar en elasticidad

en ciertas configuraciones. Sin embargo, aún no eran claras las potencialidades y limitaciones de esta técnica.

En (Wilson et al., 1973) se introdujo un elemento isoparamétrico cuadrilátero mejorado específicamente para el problema de flexión, llamado de *modos incompatibles* o $Q6$. Cada componente del campo de desplazamientos se enriquece con dos términos cuadráticos, modos característicos de la flexión. Se lograron mejores resultados en mallas bastas, pero sólo con mallas de elementos regulares, es decir paralelogramos. Se detectó luego que el elemento no pasaba el test de la parcela (*patch test*) en configuraciones distorsionadas. Posteriormente se introdujo una modificación empírica ad-hoc en la evaluación del jacobiano de la transformación con la finalidad de forzar el cumplimiento del test de la parcela y el elemento resultante se denominó $QM6$. Los resultados alcanzados eran igualmente mejores en mallas regulares, pero no del todo satisfactorios en mallas con elementos distorsionados.

Una serie de importantes estudios aportaron luego las claves para profundizar el conocimiento respecto a estos problemas y formulaciones. (Nagtegaal et al., 1974), (Argyris et al., 1974) y (Fried, 1974) trataron el problema de incompresibilidad y las razones por las cuales la formulación en desplazamientos no funciona. La formulación de (Nagtegaal et al., 1974) en plasticidad, también conocida como *aproximación de dilatación media*, se puede citar entre las formulaciones de *deformaciones supuestas* (*assumed strains*). (Malkus and Hughes, 1978) fueron los primeros en demostrar la equivalencia entre las técnicas de integración selectiva en elementos en desplazamientos y la formulación mixta en elasticidad. Gracias a estos conocimientos la integración reducida adquirió legítimamente la categoría de método. El éxito de la integración reducida radica en que ésta proporciona singularidad de manera adecuada en las partes de la matriz de rigidez que actúan como restricción, evitándose de esta manera el bloqueo, o excesiva rigidez, del elemento.

En mecánica de fluidos se presenta un problema equivalente al de la *incompresibilidad elástica lineal*, éste es el denominado *problema de Stokes*. La intensa investigación y las propuestas desarrolladas en este ámbito sirven de referencia en el problema en mecánica de sólidos incompresibles. Existe una gran cantidad de trabajos dedicados al tratamiento del problema de Stokes. La formulación variacional mixta de dos campos, en este caso velocidad y presión, es el marco natural para el desarrollo de elementos.

Las claves matemáticas para garantizar la convergencia y estabilidad de los elementos mixtos fueron establecidas en (Babuska, 1971) y en (Brezzi, 1974), dando lugar a la *condición de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi*, o *LBB*, en la forma como se conoce en nuestros días (Brezzi and Bathe, 1990). Básicamente ésta es una condición de *estabilidad* que establece restricciones de compatibilidad entre los campos de interpolación involucrados en la formulación mixta, necesarias para garantizar la convergencia y la unicidad de la solución. De esta manera, el criterio de estabilidad

deja al margen de la aplicabilidad combinaciones convenientes de campos de interpolación de velocidad y presión, como los de igual grado de interpolación. Dificulta además la aplicación de técnicas de refinamiento p -adaptable, pues la selección de elementos se debe definir no sólo en función de la precisión requerida en cada caso sino mediante la condición de estabilidad, lo que normalmente resulta en desmedro de la eficiencia computacional. Existe además otro criterio muy simple y difundido que ha mostrado ser efectivo para descartar elementos mixtos que podrían tener mal comportamiento. Éste se reduce a un procedimiento que consiste en el *conteo de restricciones* y de grados de libertad efectivos de las variables del elemento mixto (Zienkiewicz and Taylor, 1994a), (Hughes, 1987). Ésta es una aproximación heurística que se deriva de un criterio de *solvabilidad* del sistema de ecuaciones del problema. Es una condición necesaria pero no suficiente para garantizar la estabilidad. Mediante ésta se obtienen de manera sencilla indicios del comportamiento del elemento. Por ejemplo, el elemento triangular \mathbf{u}/p , desplazamiento/presión, con interpolaciones continuas lineal/lineal queda descartado tanto por la condición *LBB*, como por el criterio de conteo de restricciones. A pesar de que el desarrollo de los elementos mixtos se remonta a algunas décadas atrás, su uso en aplicaciones prácticas de análisis estructural no se ha extendido paralelamente. Según (Brezzi and Bathe, 1990), la causa de ésto es que la comprensión y predicción de su comportamiento es bastante más difícil que en el caso de la formulación convencional irreducible en desplazamientos.

Ante este tipo de dificultades se desarrollaron los *métodos de estabilización*. Estos métodos tienen por objetivo eliminar las inestabilidades numéricas. Se aplican por ejemplo en problemas de convección dominante, así como en formulaciones mixtas para lograr formulaciones estables eludiendo el requisito de compatibilidad entre los campos de interpolación. (Arnold et al., 1984) presentaron un importante elemento triangular estable denominado "*mini*". Éste emplea interpolaciones lineales y continuas de velocidad y presión, con el campo de velocidades enriquecido por una función burbuja de tipo jerárquica. La función burbuja permite estabilizar la respuesta en problemas de convección dominante, en el que se presentan dificultades numéricas con el método estándar de Galerkin. (Hughes et al., 1986) plantearon la solución del problema de Stokes mediante el método de Petrov-Galerkin con interpolaciones de igual orden para la presión y velocidad. En esta formulación se incorporan términos adicionales dependientes de la malla en función de las ecuaciones de gobierno que proveen estabilidad a la formulación original. En (Hughes et al., 1989) se desarrolla el *método GLS (Galerkin Least Squares)* aplicado a la solución de problemas de convección-difusión; en este caso los términos de estabilización dependen del residuo de la ecuación de gobierno. En (Baiocchi et al., 1993) se demostró la equivalencia entre los métodos GLS y los métodos de estabilización con burbujas, tanto en aplicaciones de convección-difusión como en el problema de

Stokes. En (Hughes, 1995) y (Hughes et al., 1998) T.J.R. Hughes formuló el *método de las sub-escalas*, un marco dentro del cual se pueden justificar e identificar varios otros métodos de estabilización como casos particulares. Una visión comparativa y detallada de diversos métodos de estabilización se puede encontrar en (Codina, 1997). El desarrollo alcanzado en las técnicas de estabilización sirve de motivación a algunas de las formulaciones de elementos aplicados a la mecánica de sólidos.

2.2 Panorama actual de formulaciones de elementos

Como se ha descrito, la formulación en desplazamientos presenta dificultades en ciertos problemas, tales como la incompresibilidad o el cizallamiento en flexión. Esto ha dado lugar al desarrollo de diversas formulaciones para tratar de suplir la carencia de herramientas adecuadas para estos casos. A continuación se presentan en forma panorámica las formulaciones más importantes actualmente vigentes. Para organizar la exposición se las clasifica en dos grupos principales, las formulaciones mixtas y las de integración reducida.

2.2.1 Formulaciones variacionales mixtas

Este tipo de formulación incluye campos de variables adicionales al de desplazamientos. La inclusión de estos campos adicionales permite un mejor tratamiento de las restricciones que el problema específico plantea. A grandes rasgos, estas formulaciones se encuadran en dos métodos: los de tensiones supuestas y los de deformaciones supuestas.

Entre las formulaciones de *tensiones supuestas* (*assumed stresses*) destaca la presentada en (Pian and Sumihara, 1984). Se desarrolla en elasticidad lineal un elemento mixto, denominado 5β , que se deriva de un funcional de dos campos denominado *Hellinger-Reissner*. En éste se interpolan independientemente el campo de tensiones y dos campos de desplazamientos que se superponen. Uno de éstos últimos se define sobre todo el dominio del elemento y otro, incompatible, se define en el interior del elemento. Debido a que los campos quedan definidos en diferentes subdominios las formulaciones de este tipo se denominan *híbridas*. Este elemento es eficiente en su implementación y ofrece buenos resultados en elasticidad lineal; sin embargo, en el ámbito de la no-linealidad material el uso de este tipo de elementos no ha sido muy extendido. La causa de esto es que las formulaciones de tensiones supuestas presentan dificultades para expresar la formulación conducida por deformaciones en que se basan los algoritmos de integración de los modelos constitutivos no-lineales en general, debido a la inclusión de las tensiones como variables

adicionales en la solución (Wriggers and Korelc, 1996), (Nagtegaal and Fox, 1996).

Por otro lado, las formulaciones de *deformaciones supuestas* se basan en una modificación de las relaciones cinemáticas. Por ejemplo, la escisión cinemática del campo de deformaciones permite separar la respuesta volumétrica de la desviadora. Ésta es la base de varios elementos de bajo orden que se aplican con éxito en problemas cuasi-incompresibles para diversos modelos constitutivos. Ejemplos de este tipo de formulación son el método *B-bar* de (Hughes, 1980) y la aproximación de dilatación media de (Nagtegaal et al., 1974) en plasticidad, como caso particular. El operador discreto de deformación \mathbf{B} se puede reemplazar por un operador de deformación modificado $\bar{\mathbf{B}}$ (*B-bar*), en el que se separan sus componentes volumétrica y desviadora y se redefine convenientemente la parte volumétrica.

Las formulaciones de deformaciones supuestas se pueden obtener a partir de un principio variacional de tres campos denominado de *Hu-Washizu*, (Washizu, 1982), tal como lo demostraron (Simo and Hughes, 1986). Éste es el punto de partida para la formulación para problemas de incompresibilidad propuesta en (Simo et al., 1985), un método variacional de proyección de la deformación. Los elementos estándar sirven de base para estos elementos que llevan incorporados, además del campo de desplazamientos, campos adicionales de presión y deformación volumétrica discontinuos entre elementos. Esta formulación provee un marco general para el diseño de elementos que, al condensarse las variables discontinuas a nivel de elemento, quedan expresados en términos sólo de desplazamientos. Dentro de este marco se pueden derivar como casos particulares las formulaciones de dilatación media y la *B-bar* y las aplicaciones se pueden extender a las no-linealidades material y geométrica.

Segun refieren (Lautersztajn and Samuelsson, 2000) en su discusión sobre elementos cuadriláteros, (McNeal, 1987) realizó en 1987 una observación presentada en forma de un teorema que concluye: “...*effectively closes out further efforts to improve accuracy beyond what has already been achieved for four-node elements with two degrees of freedom per node*”. Basa la demostración en fundamentos mecánicos y en el principio de los trabajos virtuales.

La investigación específica en elementos cuadriláteros basados en la formulación de modos incompatibles de Wilson y la modificación ad-hoc continúa sin embargo y se desarrollan formulaciones más sofisticadas. La de mayor repercusión y carácter más general es el método de deformaciones mejoradas “*assumed enhanced strains*” (*EAS*), desarrollada por J.C. Simó. La formulación se presenta primero en elasticidad, en el ámbito de la no-linealidad material, en el trabajo (Simo and Rifai, 1990). El método se deriva como una formulación mixta a partir de la definición de un funcional de 3 campos, del tipo Hu-Washizu. La idea clave es mejorar el campo representativo de las deformaciones mediante la incorporación de un campo independiente. En el contexto de las pequeñas deformaciones queda incluido en esta formulación, como un caso particular, el método de los modos incompatibles. La

extensión de la formulación a la no-linealidad geométrica no es trivial. La metodología general se propone en (Simo and Armero, 1992). En este ámbito los campos de deformación enriquecidos no corresponden necesariamente a los gradientes de un campo de desplazamientos incompatible. El elemento 3D se denomina $Q1/E9$, sobre la base del hexaedro trilineal se añaden 9 modos de mejora. Los propios autores detectaron en este elemento modos físicamente inadmisibles en presencia de grandes deformaciones plásticas. En (Simo et al., 1993) se introdujeron algunas modificaciones, se añadieron 3 modos adicionales para mejorar el comportamiento en cuasi-incompresibilidad y se empleó una cuadratura de 9 puntos de integración. El elemento desarrollado se denomina $QM1/E12$. Con estas modificaciones se aliviaron algunas deficiencias y se lograron notables resultados en elasto-plasticidad.

La formulación *EAS* contiene importantes ingredientes de formulaciones desarrolladas previamente, como las de (Wilson et al., 1973), (Pian and Sumihara, 1984), (Malkus and Hughes, 1978), (Belytschko et al., 1984) etc. El método *EAS* puede ser visto como un método *B-bar*, la formulación *EAS* provee el marco variacional para obtener matrices $\bar{\mathbf{B}}$ consistentes. Los elementos *EAS* exhiben un buen comportamiento en flexión y en el límite de incompresibilidad y son computacionalmente eficientes (Wriggers and Korelc, 1996). Debido a la construcción, mediante la incorporación de modos adicionales de deformación, los elementos conservan la aptitud para expresar la formulación conducida por deformaciones típica de modelos constitutivos. En el rango de pequeñas deformaciones los elementos de la formulación *EAS* son muy eficaces en general. Sin embargo, en grandes deformaciones los elementos derivados de esta formulación presentan inestabilidades de tipo numérico. Se presentan en estos elementos patrones de deformación físicamente inadmisibles, modos espurios denominados “*hourglass*”. Este fenómeno se manifiesta, por ejemplo, en casos de compresión profunda, tal como se reporta en (De Souza et al., 1995), (Wriggers and Reese, 1996).

Se desarrollan luego diversos trabajos de investigación para procurar entender las causas y eliminar los problemas de estabilidad de los elementos *EAS*, por ejemplo (Criesfield et al., 1995), (Wriggers and Hueck, 1996). Sin embargo no se logra completamente el éxito en casos generales. En (Nagtegaal and Fox, 1996) se analiza con criterios físicos la influencia de los modos adicionales en el volumen deformado del elemento. En (Kasper and Taylor, 1997) se propone una idea innovadora, denominada *mixta-EAS*, desarrollada en principio para problemas geoméricamente lineales. En esta formulación el campo de tensiones también se interpola y enriquece, y el campo de deformaciones se reparametriza en función de éste. En (Bischoff et al., 1999a) se explora la relación entre la formulación de tensiones híbridas y la *EAS*, y se muestra que bajo ciertas condiciones las dos conducen a elementos idénticos.

En otros trabajos, como (Korelc and Wriggers, 1996a) y (Glaser and Armero, 1997) se propuso la modificación de la interpolación de los campos de mejora. En

(Korelc and Wriggers, 1996a) los autores plantearon sobre estos campos requisitos adicionales de ortogonalidad respecto de los campos conformes. Mediante el análisis modal (Glaser and Armero, 1997) detectaron que la inestabilidad del elemento bajo compresión homogénea se debe a la cancelación de dos términos en la expresión analítica del valor propio “*hourglass*”. Analizaron diferentes posibilidades para definir la interpolación del campo de mejora y definieron una nueva interpolación. Utilizando ésta, el valor propio “*hourglass*” queda representado por un sólo término que permanece siempre positivo. Encontraron además que la formulación de (Korelc and Wriggers, 1996a) no era objetiva ante rotaciones de sólido rígido y propusieron una corrección. El carácter analítico de estas formulaciones sólo permite considerar solicitaciones homogéneas y elementos regulares.

Una restricción importante de la formulación *EAS* es que no se puede aplicar sobre la base de elementos triangulares o tetraédricos lineales, (Reddy and Simo, 1995), (Heeres and De Borst, 1999). Como consecuencia de ello, los problemas que se pueden abordar eficazmente con éstos elementos están limitados por las dificultades propias de los generadores de mallas para discretizar formas geométricas complejas utilizando elementos cuadriláteros o hexaédricos. Además presentan alta sensibilidad a la distorsión, al igual que las demás formulaciones de cuadriláteros que se basan en los modos incompatibles y en la corrección ad-hoc para forzar la satisfacción del test de la parcela, tal como lo muestran (Lautersztajn and Samuelsson, 2000). Este trabajo sugiere que desde la aparición del método de modos incompatibles no ha habido mejora significativa en este tipo de elementos, a pesar del intenso desarrollo de nuevas y sofisticadas formulaciones.

2.2.2 Formulaciones de integración reducida

Esta formulación, como se ha descrito, consiste en la integración reducida de la matriz de rigidez o de partes de ella, en cuyo caso se denomina integración selectiva. Esta técnica implica un menor volumen de cálculo, ya que la integración numérica se realiza evaluando las funciones en un menor número de puntos de integración, por lo tanto es computacionalmente muy eficiente. T.J.R. Hughes desarrolló una aplicación sistemática y amplia del método. De hecho, los métodos de integración reducida y selectiva son casos particulares del método *B-bar*. La relación entre los métodos de integración selectiva y las formulaciones mixtas se analiza en (Hughes and Malkus, 1983).

La desventaja del método de integración reducida es que en algunos casos puede dar lugar a la deficiencia de rango de los elementos e introducir modos espurios de energía nula, los modos “*hourglass*”. Se procura evitar este efecto mediante la aplicación de técnicas de estabilización. En general la idea es compensar el comportamiento del elemento sumando una matriz de estabilización a la matriz de rigidez

sub-integrada . En este campo son fundamentales los trabajos (Belytschko et al., 1984), (Belytschko and Bindeman, 1993). En ellos se proponen elementos con una técnica de estabilización conocida como control de modos “*hourglass*”.

La dificultad de esta técnica radica en la dependencia de su precisión respecto de los parámetros de estabilización y en la dificultad para calcularlos. En (Hutter et al., 2000) se analiza el efecto de acumulación de errores que se introduce al aplicar técnicas de control “*hourglass*” en el contexto de problemas que se encararan mediante algoritmos incrementales, como los de grandes deformaciones.

Las formulaciones de (Freischlager and Schwiezerhof, 1996) y la de (Kussner and Reddy, 1998) explotan la equivalencia entre esta técnica y los métodos mixtos en el ámbito de las pequeñas deformaciones para obtener los factores de estabilización. A partir de un estudio sistemático y detallado de los elementos *EAS* en (Freischlager and Schwiezerhof, 1996) se proponen elementos mejorados con la introducción de algunas simplificaciones, en el cálculo de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas, y el empleo de la técnica de control de estabilidad. (Hansbo, 1998) desarrolla una idea similar, al formular elementos con integración reducida a un sólo punto más una matriz de estabilización deducida a partir del concepto de cuadratura de integración numérica. La formulación de (Reese et al., 1999) desarrolla una extensión novedosa al contexto de las grandes deformaciones. Ésta plantea el cálculo de los factores de estabilización a partir de la equivalencia con la forma linealizada de un funcional mixto.

2.3 Principales líneas de investigación en desarrollo

A partir de lo expuesto anteriormente se puede identificar, describir y comparar las líneas de investigación más relevantes en la formulación de elementos en mecánica de sólidos. Se pueden caracterizar algunas de ellas por su relación con la formulación *EAS*. Éstas procuran el desarrollo de técnicas de estabilización que permitan corregir los problemas de inestabilidad en el rango de grandes deformaciones. Ejemplos de éstas son las que desarrollan el grupo de E. Ramm y el de P. Wriggers. Por otro lado, otras líneas de investigación se orientan al desarrollo de formulaciones mixtas estabilizadas, con marcado interés por el diseño de elementos tetraédricos. Las técnicas de estabilización en este caso tienen por propósito lograr eludir las restricciones que impone la condición de estabilidad *LBB* sobre la elección de los campos de interpolación. Ejemplos de estas líneas de investigación son la de R. L. Taylor y la del grupo de M. S. Shephard. Las principales líneas de investigación actuales se presentan en forma comparativa en la tabla 2.1. En el anexo A se explican en forma más detallada las formulaciones que se presentan a continuación.

2.3.1 Elementos *EAS* y estabilización

E. Ramm y su grupo de investigación desarrollan una técnica de estabilización para estabilizar el comportamiento de la formulación *EAS*, presentada en (Bischoff et al., 1999a). La motivación es la técnica de estabilización GLS desarrollada en el ámbito de la mecánica de fluidos. Básicamente se trata de agregar a la forma original del problema términos dependientes del cuadrado del residuo, de manera similar al método de mínimos cuadrados. En este caso se considera que los modos de deformación de mejora son el residuo de la ecuación cinemática. Los parámetros de estabilización son función de los desplazamientos. La definición de los parámetros se hace a partir de consideraciones mecánicas y se verifica mediante el análisis modal. Si se compara con el método *EAS* original, el método estabilizado demanda un mayor número de cálculos matriciales y memoria para variables históricas por cada elemento. La investigación en su estado actual exhibe resultados sólo en problemas 2D para elementos (cuadriláteros) de configuración regular, carga de compresión homogénea y aplicaciones con modelos constitutivos hiper-elásticos.

La línea de investigación del grupo de P. Wriggers se basa en la técnica de integración reducida más estabilización. A partir de ese concepto en (Reese et al., 1999) y (Reese et al., 1998), el desarrollo evoluciona hacia una técnica de control de estabilidad en (Reese and Wriggers, 1999) y en (Reese and Wriggers, 2000). El objetivo es lograr una técnica de control de inestabilidades que sea automática y general, basada en la detección de inestabilidades numéricas mediante el análisis modal de la matriz de rigidez. La clave del método es la descomposición de la matriz de rigidez en una parte constante, evaluada en el centro de cada elemento, y en una de estabilización. Esta matriz de rigidez se deriva del método de deformaciones supuestas de mejora (*EAS*). Para lograr la descomposición de la matriz de rigidez se parte del desarrollo en serie de Taylor de las funciones de forma, tal como se plantea en (Belytschko et al., 1984), logrando separar en éstas la parte lineal de la parte “hourglass”. Se introducen además algunas simplificaciones importantes, aplicando el concepto del paralelogramo equivalente (Arunakirinathar and Reddy, 1995b), (Arunakirinathar and Reddy, 1995a). De acuerdo con este concepto, las integrales sobre el dominio de cada elemento se realizan sobre un paralelogramo equivalente en vez de hacerlo en la configuración deformada, que en general puede tener forma arbitraria. La descomposición de la matriz de rigidez en cada elemento facilita el análisis de valores propios para modificarlos si es necesario, de manera que cada elemento reaccione en función de las condiciones de estabilidad. En el caso 2D demuestran que el control de estabilidad se puede realizar analizando tres parámetros de estabilización. Además de la eficiencia computacional, propia de las técnicas de integración reducida, las simplificaciones introducidas permiten el cálculo analítico de las integrales, con el consecuente abaratamiento del costo computacional. El método es validado

para solicitaciones de carácter general y mallas con elementos distorsionados. Las desventajas de este método son la dependencia respecto del tamaño del incremento de carga y dificultades para la aplicación a modelos elasto-plásticos. Las causas de estas dificultades se encuentran en la simplificación introducida en la aproximación geométrica para la evaluación de la matriz de estabilización. En su estado actual esta investigación exhibe resultados en problemas en 2D con mallas de elementos (cuadriláteros) distorsionados, solicitaciones generales y modelos constitutivos hiper-elásticos.

2.3.2 Formulaciones mixtas y estabilización

R. L. Taylor desarrolla un elemento tetraédrico mixto con campos de desplazamientos, presión y volumen, (Taylor, 1999). El elemento incorpora un campo de mejora agregado al campo compatible de desplazamientos. El campo de mejora es de tipo burbuja y es el que proporciona estabilidad a la formulación mixta. Las interpolaciones de desplazamientos y presión son continuas entre elementos. El campo que representa el efecto volumétrico y el campo de mejora de deformaciones se interpolan mediante funciones discontinuas. Estos campos discontinuos se condensan mediante una serie de operaciones matriciales a nivel de elemento. Se obtiene así finalmente una formulación global \mathbf{u}/p desplazamiento/presión. El desarrollo se centra particularmente en un elemento con interpolación lineal/lineal. El propio autor señala que la formulación conduce a un sistema indefinido de ecuaciones algebraicas, cuya solución en aplicaciones prácticas tendría que encararse mediante esquemas iterativos. Se exhiben resultados en problemas 3D, solicitaciones generales y aplicaciones con modelos constitutivos hiper-elásticos y elasto-plásticos.

Otra formulación estabilizada es la propuesta por el grupo de M. S. Shephard. En el marco de ésta el interés se centra también en el diseño de elementos tetraédricos. El desarrollo de esta línea se puede seguir en las sucesivas publicaciones realizadas. Éstas son (Klaas et al., 1999), (Maniatty et al., 2001) y (Maniatty et al., 2002). Los autores proponen un elemento mixto, con campos de desplazamientos y presión con interpolaciones continuas entre elementos. La motivación también se encuentra en las técnicas de estabilización de tipo GLS. En este caso la función de ponderación se perturba agregándole un término definido a priori. Éste da lugar a un término adicional en la forma variacional del problema. Se logra definir interpolaciones desplazamiento/presión con estabilidad mejorada eludiendo el requisito de la condición *LBB*. En el primero de los trabajos citados se aborda la obtención de elementos \mathbf{u}/p lineal/lineal en aplicaciones con modelos constitutivos hiper-elásticos. En el segundo se abordan problemas en 2D de flujo visco-plástico de estado estable, y en el tercero el diseño de elementos de grado de interpolación superior en hiper-elasticidad 3D.

Una formulación mixta alternativa a la anterior se propone en (Oñate et al.,

2001), a partir de la técnica del cálculo finito. Esta formulación conduce a elementos mixtos estabilizados \mathbf{u}/p similares.

2.4 Discusión

A partir de la revisión del estado del arte se pueden distinguir algunos aspectos importantes que se deben tomar en cuenta como referencia en el punto de partida del presente trabajo de investigación.

La primera observación respecto a las líneas de investigación se puede hacer atendiendo a los objetivos hacia los cuales se encaminan y a sus posibilidades de aplicación. Se puede apreciar que existe un marcado interés en el desarrollo de una formulación mixta \mathbf{u}/p , un marco general en el cual se puedan desarrollar elementos tetraédricos. Este es el caso de las investigaciones de R.L. Taylor y del grupo de M.S. Shephard. Este objetivo es explicable dada la versatilidad que ofrecen las formas tetraédricas en la generación de mallas. En aplicaciones prácticas aparecen con frecuencia formas geométricas de cierta complejidad, y en algunos casos la generación de mallas adecuadas con elementos hexaédricos puede llegar a ser poco menos que imposible. Las líneas de investigación que tienen como base la formulación *EAS* heredan esta limitación, tales son los casos de la del grupo de E. Ramm y la del grupo de P. Wriggers.

Los problemas numéricos de estabilidad y las técnicas de estabilización juegan un papel de suma importancia en todos los casos. En el caso de las formulaciones mixtas, la estabilización procura eludir el requisito de la condición *LBB*, para así poder definir los campos de interpolación con flexibilidad. Tanto la formulación de R.L. Taylor como la del grupo de M.S. Shephard incorporan campos de presión continuos como variables adicionales en el sistema a resolver. Ambos desarrollan elementos tetraédricos \mathbf{u}/p lineal/lineal. La formulación de M.S. Shephard para interpolaciones lineales de desplazamientos y presión no es consistente, en sentido estricto, con el problema continuo. Sin embargo, al parecer se logra un elemento con comportamiento estabilizado.

La comparación entre las formulaciones de R.L. Taylor y la del grupo de M.S. Shephard, desde el punto de vista del volumen de cálculo involucrado y de la eficiencia, permite apreciar que la primera introduce un mayor número de variables con el consecuente aumento del número de operaciones a nivel de elemento. Entre las formulaciones basadas en la formulación *EAS*, la formulación estabilizada de E. Ramm implica un considerable volumen de cálculo adicional, mientras que la integración reducida del grupo de P. Wriggers reduce el volumen de cálculo y la utilización de memoria respecto a la formulación *EAS* original. Esto es posible debido a las simplificaciones que se introducen, por ejemplo mediante el concepto de paralelogramo

AUTORES		REESE & WRIGGERS		RAMM, WALL & BISCHOFF		KLAAS, MANIATTY & SHEPHARD		R.L. TAYLOR		
OBJETIVO		CONTROL de ESTABILIDAD		ESTABILIZAR ELEM. EAS		ESTABILIZAR ELEM. MIXTOS		ELEMENTO TETRAÉDRICO		
FORMULAC.		INT. REDUCIDA + ESTABILIZAC.		EAS + ESTABILIZAC.		MIXTA + ESTABILIZAC.		MIXTA + EAS		
ELEMEN.	V A R I A B L E S C O N T I N I D O	Q1SP (2D/3D)	\mathbf{u}	C_0	SQ1E4 (2D)	\mathbf{u}	C_0	ST3P1 (3D)	\mathbf{u}	C_0
			α	nc		α	nc		p	C_0
APLICACIÓN		INCOMP./ FLEX.		INCOMP. /FLEX.		ELEM. TETRAÉDRICO INCOMPRES.		INCOMPRES.		
ESTABILIZACIÓN	TIPO	HOURGLASS CONTROL		GLS		GLS		FUNCIÓN BURBUJA		
	IDEA	$[K]=[K_0]+[K_{stab}]$		AÑADIR TERMINO: f (RESID) \rightarrow var eq		AÑADIR TERMINO: f (RESIDUO) \rightarrow wf		ENRIQUECER CAMPO DEFORMACIONES		
OBSERVACIÓN		Condensación: $\{\mathbf{u}, \alpha\} \rightarrow \{\mathbf{u}\}$		Condensación: $\{\mathbf{u}, \alpha\} \rightarrow \{\mathbf{u}\}$		Sistema: $\{\mathbf{u}/p\}$		Condensación $\{\mathbf{u}, \alpha, p, \theta\} \rightarrow \{\mathbf{u}, p\}$		
		Clave: paralelepipedo. equivalente.		Param. Estabiliz. $\tau = f(S)$		Grado interpolac: $\{\mathbf{u}/p\}:c/l \rightarrow l/l$		Grado interpolac: $\{\mathbf{u}/p\}:c/l \rightarrow l/l$		
		[K_{stab}] cálculo analítico (actualización una vez por incremento)		$[K]=[K_{dd}]+[K_{stab}]$		$[K] = \begin{bmatrix} Kdd & Kdp \\ sim & Kpp \end{bmatrix}$		$[K] = \begin{bmatrix} Kdd & Kdp \\ sim & Kpp \end{bmatrix}$		
TESTS	MODELO CONSTITUTIVO	Cyl shell (flexión)	NH	Viga (flexión)	NH	Cook	NH	Cook	E-P	
		Compresión no-homogenea	NH	Compresión homogenea	NH	Placa c/ agujero (def plana)	NH	Viga	NH	
		Cook	NH					Viga	E-P	
		Viga (distorsión)	NH							
		Idem: material Incompresible	NH							
VENTAJAS		1. Técnica de control automática (no introduce rigidez artificial) 2. Solicitaciones generales 3 Elementos distorsionados 4. Volumen de cálculo reducido (integración reducida, cálculo analítico de la matriz de rigidez)		1. Los factores de estabilización son función de la deformación (no introduce rigidez artificial) 2. Añadir la matriz de estabilización a la formulación EAS no es relativamente muy complicado ni costoso		1. Reduce requisito sobre los grados de interpolación en formulación mixta para la estabilidad 2. Aplicabilidad de elemento tetraédrico		1. Reduce requisito sobre los grados de interpolación en formulación mixta para la estabilidad 2. Aplicabilidad de elemento tetraédrico		
DESVENTAJAS		1. Depende de tamaño del incremento (reducir tamaño de incremento o aplicar post-iteraciones) 2. Problema: Actualización de factores en Plasticidad		1. Validado solo para elementos regulares, cargas homogeneas y $v=0$ 2. Mayor costo que integración reducida		1. Variable nodal adicional: p (continua entre elementos) 2. Sensibilidad al parámetro de estabilización		1. Variables adicionales p, α, θ (p continua entre elementos)		

Tabla 2.1: Cuadro comparativo de las principales líneas de investigación

equivalente, que permiten una implementación eficiente (incluso los cálculos de las integrales a nivel de elemento se pueden realizar en forma analítica). No obstante, desde el punto de vista de la sensibilidad a la distorsión, los autores observan una mejoría en el comportamiento respecto a los demás elementos cuadriláteros basados en los modos incompatibles y la corrección ad-hoc. Lamentablemente, como se ha mencionado antes, la formulación de integración reducida del grupo de P. Wriggers hereda también la limitación de no ser aplicable a triángulos y tetraedros.

Finalmente se cita la reflexión respecto al desarrollo de formulaciones de elementos, que se encuentra en el trabajo de (Lautersztajn and Samuelsson, 2000):

“...To choose an appropriate element for the given problem can be a choice between a simple element with a few degrees of freedom in a very fine mesh and a physically more correct element in a coarse mesh”

2.5 Sumario y conclusión

La formulación de elementos de bajo orden que sirvan de herramienta general en el análisis de grandes deformaciones es un campo de intensa investigación. Los principales métodos son: las formulaciones variacionales mixtas y la técnica de integración reducida. Para lograr un comportamiento óptimo en situaciones generales ambas formulaciones requieren el complemento de las técnicas de estabilización. Merecen particular atención la formulación de elementos cuadriláteros de deformaciones supuestas *EAS* y las formulaciones mixtas \mathbf{u}/p . Las líneas de investigación estudian la manera de complementar estas formulaciones con el desarrollo de técnicas de estabilización. La propuesta de una formulación de elementos requiere considerar tanto los fundamentos físicos sobre los que se basa su desarrollo como las posibilidades de aplicación general de los elementos en la práctica. Es por esto que se optará en este trabajo por la alternativa del planteamiento de una formulación mixta estabilizada, centrando el interés particularmente en la posibilidad del desarrollo de elementos tetraédricos, por la versatilidad de éstos en la generación de mallas sobre formas geométricas generales.

Anexo A

Líneas de investigación en desarrollo

En la revisión del estado del arte en el diseño de elementos se han identificado las principales líneas de investigación que se desarrollan actualmente. En general en la base de éstas se encuentran la formulación mixta para incompresibilidad y los elementos *EAS*. A continuación se describen estas formulaciones con un nivel de detalle algo mayor.

A.1 Motivación

Tal como se ha visto, la estabilidad numérica y las técnicas de estabilización son un problema clave de las formulaciones de elementos y un campo de intensa investigación. Estas técnicas se aplican con la finalidad de subsanar problemas numéricos de las formulaciones originales, por ejemplo, de elementos mixtos o elementos con deformaciones mejoradas *EAS*, procurando que queden exentas de las inestabilidades artificiales que se presentan en ciertas situaciones. En la base de las formulaciones que se describen a continuación se puede encontrar relaciones con distintos métodos de estabilización desarrollados previamente. Por ejemplo, las formulaciones de (Bischoff et al., 1999a) y la de (Klaas et al., 1999), y publicaciones sucesivas, vienen motivadas por el método *GLS*. Por otro lado, la formulación de (Reese and Wriggers, 1999) se basa en la equivalencia de la integración reducida y los métodos mixtos, y aplica el método de estabilización de modos “*hourglass*” de (Belytschko et al., 1984). Por su importancia en la motivación de algunas de las técnicas que se verán mas adelante se presenta a continuación una breve referencia a la técnica de estabilización *GLS* y al desarrollo de las funciones de forma para su descomposición en modos “*hourglass*”.

A.1.1 La técnica de estabilización *GLS* como motivación

El desarrollo de algunas de las técnicas propuestas en la formulación de elementos *EAS* y mixtos en la mecánica de sólidos vienen motivadas por los métodos de estabilización desarrollados y aplicados en el área de mecánica de fluidos; (Codina, 1992), (Donea, 1999).

Para describir a grandes rasgos la técnica de estabilización *GLS* (*Galerkin Least Squares*) se considerará un problema expresado en forma abstracta mediante una ecuación diferencial como la siguiente:

$$\mathcal{L}(u) + f = 0 \quad u \in \mathcal{V} \quad (\text{A.1})$$

El residuo de esta ecuación se denota por:

$$\mathcal{R}(u) = \mathcal{L}(u) + f \quad (\text{A.2})$$

La expresión variacional del problema (A.1) es:

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in \mathcal{V} \quad (\text{A.3})$$

En (A.1) \mathcal{L} es un operador diferencial, aplicado sobre la variable escalar u en el espacio de funciones \mathcal{V} , dotado del producto interno L_2 que se denota (\cdot, \cdot) . En la expresión variacional (A.3) $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal y $l(\cdot)$ es una forma lineal correspondientes a $(\mathcal{L}(u), w)$ y (f, w) en \mathcal{V} , respectivamente. En el caso de principios variacionales obtenidos a partir de funcionales las funciones w se pueden identificar con las variaciones δu .

El método *GLS* consiste en sumar a la expresión variacional un término dependiente del residuo $\mathcal{R}(u)$ en forma de mínimos cuadrados. El problema de mínimos cuadrados asociado a (A.1) es minimizar el funcional cuadrático:

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{R}^T \mathcal{R} \, d\Omega \quad (\text{A.4})$$

la condición de estacionariedad proporciona la ecuación $\delta I = \int_{\Omega} \delta \mathcal{R}^T \mathcal{R} \, d\Omega = 0$. La formulación *GLS* se obtiene mediante una combinación de esta expresión con la expresión variacional del método de Galerkin (A.1), y se puede expresar como:

$$a(u_h, w_h) + \sum_e \tau_e \left(\tilde{\mathcal{L}}(w_h), \mathcal{R}(u_h) \right)_{\Omega_e} = l(w_h) \quad (\text{A.5})$$

donde $\tilde{\mathcal{L}}$ es un operador diferencial similar a \mathcal{L} , que se deriva del mismo, y τ_e es el parámetro de estabilización. El término adicional en el sumatorio se evalúa elemento por elemento.

En esencia el método *GLS* consiste en agregar al término usual de Galerkin términos adicionales dependientes de la malla (en forma de mínimos cuadrados), que son funciones del residuo de las ecuaciones de Euler, evaluados en cada elemento.

A.1.2 Desarrollo de las funciones de forma y funciones “*hourglass*”

Las expresiones que se plantean a continuación son el punto de partida para el desarrollo sistemático de elementos con cuadratura de un solo punto, como es el caso de la técnica que se revisará en el apartado A.2.2. Una derivación similar se desarrolló originalmente en (Belytschko et al., 1984). Se descomponen las funciones de forma mediante un desarrollo en serie expresado como la suma de un término lineal y otro de orden superior.

El elemento base del desarrollo es el hexaedro trilineal, para el cual $n_{node}^e = 8$. $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$ es el vector 8×1 asociado a las funciones de forma isoparamétricas

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) := [N^1 N^2 \dots N^8]^T, \text{ con } N^A := \frac{1}{8} (1 + \xi_1 \xi_1^A) (1 + \xi_2 \xi_2^A) (1 + \xi_3 \xi_3^A) \quad (\text{A.6})$$

donde $\boldsymbol{\xi}^A = (\xi_1^A, \xi_2^A, \xi_3^A)$ son las coordenadas de los vértices del cubo bi-unitario de referencia, denotado como \square .

La idea es hallar una expresión de las funciones de forma $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$ como combinación lineal de polinomios lineales en coordenadas cartesianas X_I más un conjunto de términos “*hourglass*” de segundo orden, de la siguiente manera:

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}_0 + \sum_{I=1}^3 X_I \mathbf{b}_I + \sum_{J=1}^4 \mathcal{H}^J(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_J \quad (\text{A.7})$$

donde las \mathcal{H}^J son las funciones “*hourglass*”, definidas por:

$$\mathcal{H}^1(\boldsymbol{\xi}) := \xi_2 \xi_3, \mathcal{H}^2(\boldsymbol{\xi}) := \xi_3 \xi_1, \mathcal{H}^3(\boldsymbol{\xi}) := \xi_1 \xi_2, \mathcal{H}^4(\boldsymbol{\xi}) := \xi_1 \xi_2 \xi_3 \quad (\text{A.8})$$

En la expresión (A.7) los vectores $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_I, \boldsymbol{\gamma}_J \in \mathbb{R}^8$ son constantes y se pueden determinar de manera directa. Para esto, se aplica la condición $N^A(\boldsymbol{\xi}^B) = \delta_{AB}$ a partir de la cual se obtiene la expresión matricial 8×8 :

$$\mathbf{I}_8 = \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{1}_8 + \sum_{I=1}^3 \mathbf{b}_I \otimes \mathbf{Y}_I + \sum_{J=1}^4 \boldsymbol{\gamma}_J \otimes \mathbf{h}^J \quad (\text{A.9})$$

en la que \mathbf{I}_8 es la matriz identidad 8×8 , el vector $\mathbf{1}_8 := [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{Y}_I := [X_I^1 \ X_I^2 \ \dots \ X_I^8]^T$ para $I = 1, 2, 3$ las coordenadas de los nodos del elemento y $\mathbf{h}^J := [\mathcal{H}^J(\boldsymbol{\xi}^1) \ \mathcal{H}^J(\boldsymbol{\xi}^2) \ \dots \ \mathcal{H}^J(\boldsymbol{\xi}^8)]^T$ para $J = 1 \dots 4$, es decir:

$$\mathbf{h}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Observando estas expresiones se determina que se cumplen las condiciones de ortogonalidad: $\mathbf{1}_8 \cdot \mathbf{h}^J = 0$ y $\mathbf{h}^J \mathbf{h}^K = 8\delta_{JK}$, que aplicadas a (A.9) permiten obtener explícitamente:

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{8} \left[\mathbf{1}_8 - \sum_{I=1}^3 (\mathbf{1}_8 \cdot \mathbf{Y}_I) \mathbf{b}_I \right] \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\gamma}_J = \frac{1}{8} \left[\mathbf{h}^J - \sum_{I=1}^3 (\mathbf{h}^J \cdot \mathbf{Y}_I) \mathbf{b}_I \right] \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, evaluando las derivadas de las funciones de forma en $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ a partir de (A.7), se obtienen los vectores \mathbf{b}_I :

$$b_I^A = \mathbf{J}_0^{-T} \left. \frac{\partial N^A}{\partial \xi_I} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} \quad (I = 1, 2, 3), \quad \text{donde } \mathbf{J}_0 = \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} \quad (\text{A.12})$$

Para calcular las derivadas cartesianas de las funciones de forma respecto al sistema de coordenadas de referencia tan sólo se necesita una expresión explícita de las derivadas cartesianas de las funciones $\mathcal{H}^J(\boldsymbol{\xi})$, $J = 1, \dots, 4$. La expresión estándar de la transformación de coordenadas que se necesita es $GRAD_X [\cdot] = \mathbf{J}_0^{-T} GRAD_\xi [\cdot]$. De esta manera, se puede obtener una expresión de la matriz de deformaciones discretizada estándar \mathbf{B} descompuesta en una parte constante asociada a la parte lineal de las funciones de forma y otra parte variable asociada a los modos de segundo orden “*hourglass*” como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{lin} + \mathbf{B}_{hg} \quad (\text{A.13})$$

Ésta es la clave para obtener también matrices de rigidez descompuestas en una parte constante, a ser evaluada en un sólo punto de integración, más otra parte que es variable en el elemento de la que dependerá la estabilidad.

En la formulación *EAS* en vez de la transformación estándar para el cálculo de las derivadas cartesianas se define el operador $\widetilde{GRAD}_X [\cdot]$ mediante la expresión:

$$\widetilde{GRAD}_X [\cdot] := \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{J}_0^{-T} GRAD_\xi [\cdot] \quad , \quad \text{donde } j(\boldsymbol{\xi}) := \det[\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})] \quad \text{y} \quad j_0 := j(0) \quad (\text{A.14})$$

Se puede observar que esta modificación y la expresión estándar conducen al mismo resultado en el caso de elementos de configuración regular (paralelepípedos). Con esta modificación en las interpolaciones del gradiente de deformaciones de funciones no-compatibles, se logra que los elementos diseñados verifiquen el test de la parcela en configuraciones distorsionadas. También se aplica la expresión modificada al calcular los gradientes de funciones “*hourglass*” en elementos *EAS*, en los que se agrega una función adicional de mejora para evitar el bloqueo por cuasi-incompresibilidad en configuraciones distorsionadas.

A.2 Elementos *EAS* y estabilización

A.2.1 Formulación *EAS* estabilizada

La experiencia con métodos de estabilización en el contexto de la mecánica de fluidos ha impulsado a E. Ramm a aplicar ideas similares para eliminar dificultades de estabilidad numérica en elementos mejorados *EAS* aplicados a problemas en mecánica de sólidos.

Si se denomina $\tilde{\Pi}_0$ al funcional (C.8) a partir del cual se obtiene la forma débil de la formulación *EAS*, el término de estabilización se introduce en la expresión variacional del problema agregando a este funcional original un término de estabilización:

$$\hat{\Pi} = \tilde{\Pi}_0 + \Pi_{stab} \quad (\text{A.15})$$

El término de estabilización Π_{stab} es, tal como se describió antes en el apartado A.1.1, dependiente del residuo en forma cuadrática, como en el método *GLS*. Para definir el término de estabilización se tiene en cuenta que el origen de las inestabilidades que presenta la formulación *EAS* en ciertas sollicitaciones se encuentra en los modos de deformación adicionales introducidos. Por ejemplo, en la formulación del método *EAS* descrito en (Bischoff et al., 1999a) el campo de deformaciones está representado por el tensor de Green-Lagrange:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}} \quad , \quad \text{con} \quad \mathbf{E}^u = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (\text{A.16})$$

Las deformaciones adicionales de mejora $\tilde{\mathbf{E}}$, pueden entenderse como el residuo de la ecuación cinemática, pues:

$$\mathbf{E} - \mathbf{E}^u = \tilde{\mathbf{E}} \quad (\text{A.17})$$

donde la aproximación de mejora del tensor de Green-Lagrange, en función de los modos internos $\boldsymbol{\alpha}$ es $\tilde{\mathbf{E}}^h = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}$. De acuerdo con las ideas básicas expuestas previamente en el anexo A.1.1, se define el término de estabilización:

$$\Pi_{stab} = \int_{\Omega} \tau \tilde{\mathbf{E}}^T \mathbf{D}_0 \tilde{\mathbf{E}} dV \quad (\text{A.18})$$

donde \mathbf{D}_0 es la expresión matricial del tensor constitutivo tangente del material no deformado, que se introduce para obtener una expresión energética y τ es el parámetro de estabilización. Como resultado del proceso usual de obtención de la variación del funcional $\delta\Pi_{stab}$ (ecuaciones de Euler) y su linealización ($\partial_d\delta\Pi_{stab}$ y $\partial_{\alpha}\delta\Pi_{stab}$), este término da lugar a una matriz de estabilización, que se suma a la matriz del elemento *EAS*:

$$\mathbf{K}_{stab}^e = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{K}}_{11}]_{stab} & [\mathbf{K}_{12}]_{stab} \\ sim. & [\tilde{\mathbf{K}}_{22}]_{stab} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{K}}_{11}]_{stab} &= \int_V [\tau_{h,dd} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}] dV \\ [\mathbf{K}_{12}]_{stab} &= \int_V [2\tau_{h,d} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{M}] dV \\ [\tilde{\mathbf{K}}_{22}]_{stab} &= \int_V [2\tau_h \mathbf{M}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{M}] dV \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Mediante una serie de consideraciones mecánicas y de acuerdo con el análisis modal, los parámetros de estabilización se definen en función de los desplazamientos $\tau = \tau(\mathbf{d})$. Específicamente, se establecen los parámetros en relación con las componentes del tensor segundo de Piola-Kirchhoff, de manera que el parámetro de estabilización se activa en función solamente de las sollicitaciones bajo las cuales surgen inestabilidades en la formulación original. Una limitación de este método es que sólo ha sido validado para las formas rectangulares, cuadriláteros y hexaedros, bajo deformación homogénea y sólo puede garantizar la estabilidad en estos casos.

A.2.2 Integración reducida y estabilización con elementos EAS

Esta técnica de control ha sido propuesta en (Reese and Wriggers, 1999). Se basa en el análisis modal en cada elemento, con la finalidad de eliminar las inestabilidades

numéricas incluso en mallas con elementos de forma arbitraria y estados de tensiones no-homogéneos, sin introducir factores de rigidez artificiales. Punto clave en esta formulación es la aplicación de una técnica de integración que permite la escisión de la matriz de rigidez del elemento en una parte constante, evaluada con un sólo punto de Gauss, y otra denominada “*hourglass*” o de estabilización.

El método aprovecha la idea de la equivalencia entre la integración reducida y los métodos mixtos (Malkus and Hughes, 1978). El procedimiento se puede describir a grandes rasgos a partir de la expresión global de un sistema lineal:

$$\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P} \quad (\text{A.20})$$

donde \mathbf{K} denota la matriz de rigidez del sistema, \mathbf{V} el vector global de desplazamientos nodales y \mathbf{P} el vector de fuerzas. Al realizar la escisión de la matriz de rigidez en una parte constante \mathbf{K}_0 y una parte adicional, llamada de estabilización o “*hourglass*”, el sistema se puede escribir como:

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{stab}) \mathbf{V} = \mathbf{P} \quad (\text{A.21})$$

La matriz de estabilización se deriva del método *EAS*. Debido a esto, se espera lograr resultados tan buenos como los que ofrece la formulación *EAS*, pero con comportamiento estable. Para garantizar que esta escisión sea posible para cualquier configuración geométrica es importante, en este punto, la aplicación del concepto del *paralelogramo equivalente* (y correspondientemente en 3D el *paralelepípedo equivalente*). El concepto ha sido desarrollado en (Arunakirinathar and Reddy, 1995b), (Arunakirinathar and Reddy, 1995a). La integración numérica no se realizará sobre la configuración misma del elemento, sino sobre un elemento equivalente (el paralelogramo). Entre otras propiedades, se demuestra en las referencias citadas que el error de la aproximación al integrar sobre el paralelepípedo equivalente es del orden del tamaño de los elementos y tiende a cero al refinar la malla.

En (Freischlager and Schwiezerhof, 1996) se puede encontrar un desarrollo sistemático que permite un enfoque más claro de la relación que hay entre el método *EAS* y esta técnica de integración, a la vez que se demuestran una serie de propiedades importantes. En forma simplificada, el método de deformaciones con mejoras asumidas *EAS*, que se aplica para eliminar el bloqueo en determinadas situaciones, reduce la matriz de rigidez mediante la substracción de una parte, $\mathbf{K} - \mathbf{K}_{locking} = \mathbf{K}_{enh}$, de manera que el sistema quede libre de bloqueo:

$$\mathbf{K}_{enh}\mathbf{V} = \mathbf{P} \quad (\text{A.22})$$

Al aplicar la técnica de integración propuesta a este sistema la matriz de rigidez \mathbf{K}_{enh} quedará representada por una parte constante y otra de estabilización. Sólo esta última está asociada a los modos “*hourglass*” y a los modos *EAS* (que provienen

de modos cuadráticos en los desplazamientos). La técnica de integración mas estabilización basada en el concepto del paralelogramo equivalente converge al mismo resultado que el método *EAS*. La convergencia depende sólo de la parte constante \mathbf{K}_0 , que se puede evaluar con un solo punto de Gauss, mientras que la parte \mathbf{K}_{stab} , asociada a los modos *hourglass* y a los modos *EAS*, puede ser modificada sin alterar la propiedad de convergencia original.

En grandes deformaciones se puede desarrollar una estrategia similar en base a la linealización de la ecuación del sistema correspondiente a la formulación *EAS*. Las condiciones impuestas a los campos son las mismas que en el método *EAS* clásico. El punto de partida es el funcional del tipo Hu-Washizu $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{H}, \mathbf{P})$, planteado en (Simo and Armero, 1992), donde \mathbf{H} es el gradiente material de desplazamientos y \mathbf{P} es el tensor primero de Piola-Kirchhoff:

$$\Pi := \int_{\mathcal{B}_0} \left[\hat{W}(\mathbf{H}) + \mathbf{P} : (\text{GRAD } \mathbf{u} - \mathbf{H}) \right] dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (\text{A.23})$$

En este funcional se considera el campo mejorado de gradiente de desplazamientos:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{comp} + \tilde{\mathbf{H}}; \quad \mathbf{H}_{comp} = \text{GRAD } \mathbf{u} \quad (\text{A.24})$$

La primera variación del funcional proporciona el equilibrio del sistema:

$$\delta\Pi = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} : (\delta\mathbf{H}_{comp} + \delta\tilde{\mathbf{H}}) dV - G_{ext}(\delta\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.25})$$

donde se ha considerado aquí la condición de ortogonalidad entre el campo de mejora y las tensiones $\int_{\mathcal{B}_0} \delta\mathbf{P} : \tilde{\mathbf{H}} dV = 0$.

La aplicación del método de Newton-Raphson para resolver el sistema no lineal resulta en un proceso iterativo expresado por:

$$(\Delta\delta\Pi)^{i+1} = -(\delta\Pi)^i \quad (\text{A.26})$$

La segunda variación del funcional está dada por:

$$\Delta\delta\Pi = \int_{\mathcal{B}_0} (\delta\mathbf{H}_{comp} + \delta\tilde{\mathbf{H}}) \mathcal{A}(\Delta\mathbf{H}_{comp} + \Delta\tilde{\mathbf{H}}) dV = 0 \quad (\text{A.27})$$

donde $\mathcal{A} = \partial_{HH}^2 \hat{W}(\mathbf{H})$. Ya que las variaciones en (A.27) son arbitrarias y que no se requiere continuidad entre elementos para $\tilde{\mathbf{H}}$, se puede deducir la expresión:

$$\int_{\mathcal{B}_{0e}} (\delta\tilde{\mathbf{H}}) \mathcal{A}(\Delta\mathbf{H}_{comp} + \Delta\tilde{\mathbf{H}}) dV = 0 \quad (\text{A.28})$$

Ésta permite condensar en el elemento los parámetros de mejora, para obtener una expresión sólo en desplazamientos, antes de ensamblar la ecuación global del

sistema. Después de una serie de operaciones directas, que incluye el reemplazo de (A.28) en (A.27), se obtiene la expresión matricial de la discretización del término correspondiente al push-forward de la segunda variación:

$$\Delta\delta\Pi = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \delta\mathbf{d}_e^T (\mathbf{K}_{e0} + \mathbf{K}_{ehg}) \Delta\mathbf{d}_e \quad (\text{A.29})$$

La matriz \mathbf{K}_{e0} es constante en el elemento y la matriz \mathbf{K}_{ehg} contiene los términos variables. \mathbf{K}_{ehg} se puede expresar en función de una “matriz de deformaciones discreta condensada” del elemento:

$$\left[\widehat{\mathbf{B}}_{enh} \right]_e = \left[\widehat{\mathbf{B}}_{hg} - \widehat{\mathbf{G}}\mathbf{K}_{aa}^{-1}\mathbf{K}_{ad} \right]_e \quad (\text{A.30})$$

como se puede observar $\left[\widehat{\mathbf{B}}_{enh} \right]_e$ depende de la parte “hourglass” $\widehat{\mathbf{B}}_{hg}$ de las funciones de forma estándar y de $\widehat{\mathbf{K}}_{aa}$ y $\widehat{\mathbf{K}}_{ad}$, que son las matrices relacionadas con los modos de mejora, que se deducen de (A.28). (Para obtener la matriz estándar \mathbf{B} en sus partes lineal \mathbf{B}_{lin} y “hourglass” $\widehat{\mathbf{B}}_{hg}$ se aplica el desarrollo de las funciones de forma estándar presentado en (A.7) como punto de partida; ver también (Reese et al., 1998)).

Cabe resaltar que la parte constante de la matriz de rigidez, \mathbf{K}_{e0} , no se ve afectada por el procedimiento de estabilización, que se puede evaluar con un sólo punto de Gauss y que no depende del uso del paralelogramo equivalente. Por lo tanto, cabe resaltar que el método se basa en una formulación en desplazamientos estándar con integración reducida, y sólo la matriz de estabilización requiere la deducción basada en el método *EAS*, cuyo punto de partida es (A.23). Es decir, la deducción anterior se realiza sólo para el cálculo de los parámetros de estabilización.

Una ventaja de esta técnica de estabilización es que la matriz \mathbf{K}_{ehg} es dispersa y depende de unos cuantos parámetros de estabilización. En el caso 2D son tres los parámetros, lo cual facilita mucho el análisis; el número se eleva a quince en el caso 3D. Gracias al concepto del paralelepípedo equivalente se puede calcular analíticamente. Esto contribuye a disminuir el esfuerzo computacional.

La verificación de estabilidad se realiza en tres pasos: el cálculo de la matriz de estabilización o “hourglass”, la verificación de sus valores propios y, si alguno fuera negativo, su modificación. El análisis de valores propios se simplifica apreciablemente, como una consecuencia más de la estructura de la matriz de rigidez que se obtiene.

Se presentan también algunas dificultades como consecuencia de que la integración no se realiza sobre la configuración real, sino sobre un elemento equivalente: si el paralelogramo equivalente se actualiza en cada iteración se pierde el orden de convergencia cuadrático. Los autores proponen calcular los parámetros de estabilización solo en la primera iteración de cada incremento y mantenerlos constantes a

lo largo del mismo, hasta satisfacer la ecuación de equilibrio. La solución se vuelve dependiente del tamaño del incremento de carga. Este es ciertamente un aspecto desventajoso del método. Se puede aminorar este efecto mediante algunas post-iteraciones con los factores actualizados. Un tema abierto al estudio es investigar la aplicación de las ideas de este método a los modelos constitutivos de plasticidad. Por otro lado la extensión al caso 3D de esta técnica, basada en el concepto del paralelepípedo equivalente presenta una complejidad considerablemente mayor debido al mayor número de parámetros y es un aspecto pendiente de investigación.

A.3 Estabilización de elementos mixtos

A.3.1 Elemento tetraédrico mixto estabilizado con método *GLS*

En (Klaas et al., 1999) los autores proponen el uso de estas técnicas para mejorar y hacer aplicable en la práctica un elemento en principio descartado por la condición de estabilidad, como el tetraedro \mathbf{u}/p lineal/lineal en desplazamientos y presiones. La condición de estabilidad descarta al elemento lineal/lineal, como se ha mencionado antes. El planteamiento básico se describe a continuación. El punto de partida es la ecuación de equilibrio (expresada en términos del gradiente de deformaciones \mathbf{F} y del segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} y considerando ausencia de fuerzas másicas):

$$DIV [\mathbf{FS}] = \mathbf{0} \quad (\text{A.31})$$

Para obtener la expresión de residuos ponderados la función de ponderación usual, \mathbf{w} , identificada con las variaciones de desplazamientos $\delta\mathbf{u}$, se perturba añadiendo un término, de la siguiente manera

$$\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} + \tau \mathbf{F}^{-T} \nabla q$$

donde q es la función de ponderación de la presión, o variación de la presión δp , y $\tau = (ch^2)/(2\mu)$ es un parámetro de estabilización. De esta manera se obtiene la forma estabilizada:

$$\int_{\Omega} DIV [\mathbf{FS}] \cdot \mathbf{w} \, dV + \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \int_{\Omega} DIV [\mathbf{FS}] \cdot \mathbf{F}^{-T} \nabla q \, dV = 0$$

El término de perturbación $\tau \mathbf{F}^{-T} \nabla q$ se aplica elemento por elemento, c es una constante numérica que sólo depende del tipo de elemento, h es un parámetro de tamaño de malla y μ es el módulo de cizallamiento. Se considera que la deformación volumétrica es puramente elástica $p = K U'(J)$, donde U es la parte volumétrica de la

energía almacenada, que depende sólo del determinante del gradiente de deformaciones J , y que así mismo en el segundo tensor de Piola-Kirchhoff se puede separar la parte volumétrica, asociada a p , en una expresión del tipo: $\mathbf{S} = Jp\mathbf{C}^{-1} + \tilde{\mathbf{S}}$.

Con la aplicación de esta técnica de estabilización se logra con el elemento lineal/lineal resultados estables y cualitativamente similares, según los autores, a los que se pueden obtener con el elemento cuadrático/lineal, que cumple la condición de estabilidad.

A.3.2 Elemento tetraédrico mixto estabilizado con burbuja *EAS*

R.L. Taylor propone en (Taylor, 1999) un elemento tetraédrico con interpolaciones de desplazamientos y presiones lineales C_0 continuas, θ una variable de cambio volumétrico discontinua entre elementos, y una función burbuja agregada de mejora (tipo *EAS*).

El punto de partida es el funcional de tres campos para cuasi-incompresibilidad (Anexo B, ecuación (B.3)):

$$\Pi(\boldsymbol{\varphi}, \theta, p) = \int_{\Omega} \{W(\bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varphi}, \theta)) + p[J - \theta]\} d\Omega - \Pi_{ext}(\boldsymbol{\varphi}) \quad (\text{A.32})$$

Se emplean definiciones similares a las planteadas en el apartado B.1 para el gradiente de deformaciones y para el tensor derecho de Cauchy-Green; éstas son:

$$\bar{\mathbf{F}} = \left(\frac{\theta}{J}\right)^{1/3} \mathbf{F}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} \quad (\text{A.33})$$

salvo que en esta formulación el campo gradiente de deformaciones es aumentado con un término de mejora, tal como en el método *EAS*:

$$\mathbf{F} = \underbrace{GRAD_X[\boldsymbol{\varphi}]}_{\text{Galerkin}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}}_{\text{mejora}} \quad (\text{A.34})$$

Los términos del gradiente de deformaciones $\tilde{\mathbf{F}}$ se deducen, en forma similar a la que se indica en el apartado C.3, a partir del gradiente simétrico de la función burbuja:

$$\tilde{N}(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \quad (\text{A.35})$$

cabe resaltar que, en problemas dinámicos esta función burbuja de mejora no influirá directamente en los términos de inercia. Esto es una consecuencia de la formulación *EAS* (Simo et al., 1993).

El procedimiento habitual para obtener la variación de (A.32) y su linealización, mediante las derivadas direccionales, conduce a:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta\Pi) = & \int_{\Omega} \left[\delta\bar{\mathbf{C}} : \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\mathbf{C}} \partial \bar{\mathbf{C}}} : \Delta\bar{\mathbf{C}} + \Delta(\delta\bar{\mathbf{C}}) : \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] d\Omega + \int_{\Omega} p \Delta(\delta J) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \delta p (\Delta J - \Delta\theta) d\Omega + \int_{\Omega} \Delta p (\delta J - \delta\theta) d\Omega + \Delta(\delta\Pi_{ext}) \quad (\text{A.36}) \end{aligned}$$

La matriz de rigidez del sistema linealizado a resolver resulta:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ue} & \mathbf{K}_{up} & \mathbf{K}_{u\theta} \\ & \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{ep} & \mathbf{K}_{e\theta} \\ \text{sim.} & & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{p\theta} \\ & & & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Dado que se toman interpolaciones discontinuas entre elementos para los modos de mejora y el cambio de volumen θ , se puede plantear la solución en dos etapas. En la primera etapa se eliminan en cada elemento los parámetros correspondientes a cada una de estas dos variables, mediante condensación estática. En la segunda etapa se ensamblan tanto las matrices de rigidez condensadas en la ecuación global, como los residuos de las fuerzas y presiones de los elementos, y se resuelven los incrementos de los parámetros de desplazamientos nodales y presiones.

Una alternativa a esta formulación es la expuesta en el apartado A.3.1, la formulación mixta más la técnica de estabilización *GLS* de (Klaas et al., 1999), aunque aún no se ha realizado una comparación completa de resultados. El propio autor señala que esta formulación da lugar a una forma indefinida de las ecuaciones algebraicas, y que su solución en aplicaciones prácticas se debe encarar mediante técnicas iterativas. Una desventaja de esta formulación es que implica un mayor volumen de cálculo por elemento, que incorpora un mayor número de variables nodales y que su implementación es relativamente complicada.

Anexo B

Método variacional y de proyección para cuasi-incompresibilidad

Un método eficaz para tratar el problema de cuasi-incompresibilidad es el método variacional mixto, presentado en (Simo et al., 1985). Se incorporan como variables independientes una variable representativa del cambio de volumen y la presión. Ambas se considerarán discontinuas en la discretización. La variable de cambio volumétrico es la variable restringida por el problema físico y la presión es su variable dual. Al ser interpoladas de manera independiente se alivian en gran medida las dificultades para su cálculo debidas a la sobre-restricción numérica en elementos estándar. El primer paso es realizar una escisión cinemática, para separar la respuesta volumétrica del resto de la deformación.

B.1 Escisión cinemática básica

En el caso no-lineal de deformaciones finitas esta escisión es multiplicativa y se aplica al gradiente de deformaciones \mathbf{F} , descomponiéndolo en sus partes volumétrica e isocórica. Sea $J \equiv \det \mathbf{F}$ el determinante del gradiente de deformaciones. La escisión cinemática se puede escribir:

$$\bar{\mathbf{F}}(\varphi, J) = \underbrace{\bar{J}^{\frac{1}{3}}}_{vol.} \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}(\varphi)}_{isoc.}, \quad \tilde{\mathbf{F}}(\varphi) = [J(\varphi)]^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad (\text{B.1})$$

donde \bar{J} se introduce en la formulación como una variable adicional y es representativa del volumen. Aunque localmente en el medio continuo $\bar{J} \equiv J(\varphi)$ (de modo que $\bar{\mathbf{F}} \equiv \mathbf{F}$), al construir la aproximación por elementos finitos esta identificación ya no

es válida. De hecho, el punto esencial del procedimiento variacional que se desarrolla es establecer la forma débil de esta condición. La condición $\bar{J} > 0$ se puede forzar automáticamente haciendo el cambio de variable $\vartheta = \ln(\bar{J})$, es decir $\bar{J} = \exp[\vartheta]$.

Asociados a los gradientes de deformaciones \mathbf{F} y $\bar{\mathbf{F}}$, definidos en (B.1), los correspondientes tensores derechos de Cauchy-Green son:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta) = [\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta)]^T \bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta) \quad (\text{B.2})$$

B.2 Principio variacional para cuasi-incompresibilidad

Considerando las anteriores definiciones el punto de partida es el siguiente funcional Lagrangiano de tres campos, de tipo Hu-Washizu:

$$\Pi(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta, \pi) = \int_{\Omega} \{W(\bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta)) + \pi [\ln(J(\boldsymbol{\varphi})) - \vartheta]\} d\Omega - \Pi_{ext}(\boldsymbol{\varphi}) \quad (\text{B.3})$$

Aquí se ha introducido también π , la variable dual de \bar{J} , que juega el papel de multiplicador de Lagrange y se interpreta como la presión de Kirchhoff. $\Pi_{ext}(\boldsymbol{\varphi})$ denota la energía potencial de fuerzas externas. Por simplicidad se supone que corresponde a cargas muertas.

Con las siguientes redefiniciones de las tensiones de Kirchhoff y del campo de presiones:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta, \pi) = \pi \mathbf{1} + dev \left[\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta) 2\partial_C W(\bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta)) \bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta)^T \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{p}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta) = \frac{1}{3} tr \left[\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta) 2\partial_C W(\bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta)) \bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta)^T \right] \quad (\text{B.5})$$

las ecuaciones de Euler asociadas a la estacionariedad del funcional (B.3) se pueden escribir:

$$\int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta, \pi) \cdot (\nabla \boldsymbol{\eta} \circ \boldsymbol{\varphi}) d\Omega - G_{ext}(\boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \quad (\text{B.6a})$$

$$\int_{\Omega} \psi (\bar{p}(\boldsymbol{\varphi}, \vartheta) - \pi) d\Omega = 0, \quad \forall \psi \in L_2 \quad (\text{B.6b})$$

$$\int_{\Omega} \bar{q} (\ln J(\boldsymbol{\varphi}) - \vartheta) d\Omega = 0, \quad \forall \bar{q} \in L_2 \quad (\text{B.6c})$$

donde \mathcal{V} es el espacio de las funciones de ponderación $\boldsymbol{\eta}$ (variaciones de desplazamientos o desplazamientos virtuales), y ψ y \bar{q} son las variaciones de ϑ y π , respectivamente.

B.3 Discretización mixta discontinua

Se introducen el subespacio de aproximación $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ de las funciones de prueba y las aproximaciones a los campos de presión y volumen, discontinuas entre elementos mediante el subespacio:

$$\mathcal{P}^h = \left\{ \psi^h \in L_2(\Omega) : \psi^h|_{\Omega_e} = \mathbf{\Gamma}^T(\mathbf{X}) \boldsymbol{\psi}_e, \text{ para } \boldsymbol{\psi}_e \in \mathbb{R}^m \right\} \quad (\text{B.7})$$

donde $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}) = [\Gamma_1(\mathbf{X}) \dots \Gamma_m(\mathbf{X})]^T$ es el vector de m funciones de forma prescritas localmente en el elemento. La discontinuidad entre elementos de las funciones de forma en el espacio \mathcal{P}^h de elementos finitos es la condición clave impuesta sobre esta aproximación. Como consecuencia de esto, se pueden expresar los campos de presiones y de volumen en cada elemento en función de la deformación $\boldsymbol{\varphi}^h$. Por lo tanto, la formulación se puede expresar completamente en función de los desplazamientos, recuperándose la estructura de un método de deformaciones supuestas. Con esta finalidad, se reemplazan las aproximaciones (B.7) en las ecuaciones variacionales (B.6ab,c) y se resuelve:

$$\begin{aligned} \vartheta_e^h(\boldsymbol{\varphi}_e^h) &= \mathbf{\Gamma}^T(\mathbf{X}) \mathbf{H}_e^{-1} \int_{\Omega_e} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}) \ln(J(\boldsymbol{\varphi}_e^h)) d\Omega \\ \pi_e^h(\boldsymbol{\varphi}_e^h) &= \mathbf{\Gamma}^T(\mathbf{X}) \mathbf{H}_e^{-1} \int_{\Omega_e} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}) \bar{p}(\boldsymbol{\varphi}_e^h, \vartheta_e^h(\boldsymbol{\varphi}_e^h)) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde $(\cdot)_e^h = (\cdot)^h|_{\Omega_e}$ denota la restricción de la aproximación $(\cdot)^h$ a un elemento típico Ω_e y \mathbf{H}_e es la matriz $m \times m$ definida en el elemento como:

$$\mathbf{H}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}) d\Omega \quad (\text{B.9})$$

Estas aproximaciones se sustituyen en la ecuación variacional de equilibrio (B.6aa), obteniéndose finalmente la expresión del problema variacional a resolver:

$$\int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\tau}}^h(\boldsymbol{\varphi}^h, \vartheta^h(\boldsymbol{\varphi}^h), \pi^h(\boldsymbol{\varphi}^h)) : (\nabla \boldsymbol{\eta}^h \circ \boldsymbol{\varphi}^h) d\Omega - G_{ext}(\boldsymbol{\eta}^h) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V} \quad (\text{B.10})$$

Aquí $\bar{\boldsymbol{\tau}}^h$ es la versión discreta del tensor de tensiones “equivalente” de Kirchhoff definido en (B.4). La linealización de la expresión (B.10) conduce a un problema equivalente estándar en desplazamientos por el método de Galerkin, con las ecuaciones constitutivas modificadas de acuerdo con (B.4) y (B.5).

Esta formulación es la base sobre la que se desarrollan elementos como el $Q1/P0$ y el elemento tetraédrico de (Taylor, 1999).

Anexo C

Método de deformaciones mejoradas (*EAS*)

La idea básica de la formulación *EAS* en grandes deformaciones es considerar una representación mejorada de la aproximación de Galerkin al gradiente de deformaciones, de la forma:

$$\mathbf{F}^h = \underbrace{GRAD_X [\boldsymbol{\varphi}^h]}_{\text{Galerkin}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}^h}_{\text{mejora}} \quad (\text{C.1})$$

donde $GRAD_X [\boldsymbol{\varphi}^h]$ es la aproximación conforme de Galerkin y $\tilde{\mathbf{F}}^h$ es un campo adicional de mejora (“*enhanced*”), independiente y discontinuo entre elementos, que se agrega para mejorar la representación del campo de deformaciones.

En esta formulación se toma como punto de partida en la discretización el desarrollo de las funciones de forma presentada en la sección A.1.2. Se restringe la atención al elemento tri-lineal, con lo cual las funciones de forma vienen definidas por (A.6). Desde ese punto de vista, tanto el término de funciones “*hourglass*” ahí definidas, como $\tilde{\mathbf{F}}^h$ en (C.1) se pueden considerar como mejoras de la aproximación de un solo punto. De acuerdo con la notación convencional, se designa por $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ una aproximación conforme al espacio \mathcal{V} de funciones de prueba admisibles, por el método de Galerkin de elementos finitos. El espacio de gradientes asociados se representa por $GRAD_X [\mathcal{V}^h]$.

C.1 Formulación Variacional de 3 campos

El punto de partida para el desarrollo del método es el planteamiento del problema no-lineal mediante una formulación variacional mixta de 3 campos del tipo Hu-Washizu. Se define el funcional escalar $\Pi(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, en el que las variables $\{\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{F}, \mathbf{P}\}$

son consideradas como variables independientes:

$$\begin{aligned}\Pi(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{F}, \mathbf{P}) &: = \int_{\mathcal{B}} \left[\hat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \mathbf{P} : (\text{GRAD}_X [\boldsymbol{\varphi}] - \mathbf{F}) \right] dV + \Pi_{ext}(\boldsymbol{\varphi}) \\ \Pi_{ext}(\mathbf{u}) &: = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

Para el desarrollo formal que sigue basta considerar que \mathbf{F} y \mathbf{P} son matrices 3×3 , con componentes en $L_2(\Omega)$, que dependen de $\mathbf{X} \in \Omega$. Por lo tanto, \mathbf{F} y \mathbf{P} están contenidos en el espacio

$$L := \{ \mathbf{M} : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^3 \mid M_{iA} \in L_2(\Omega) \}, \quad (\text{C.3})$$

donde \mathbb{L}^3 es el espacio vectorial de matrices 3×3 . Además, ya que \mathbf{F} y \mathbf{P} están en el espacio L y no están sujetas a condiciones de borde, el espacio de las variaciones $\delta\mathbf{F}$ y $\delta\mathbf{P}$ coincide también con L .

Las condiciones de estacionariedad del funcional (C.2) proporcionan ecuaciones en forma variacional o débil, que permiten hallar la solución aproximada por el método de elementos finitos. La variación $\delta\Pi$ se obtiene mediante la derivada direccional o variación de Gateaux del funcional:

$$\delta\Pi := D\Pi(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{F}, \mathbf{P}) \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi}, \delta\mathbf{F}, \delta\mathbf{P}) := \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Pi(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \mathbf{F}_\varepsilon, \mathbf{P}_\varepsilon) \quad (\text{C.4})$$

donde

$$\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon := \boldsymbol{\varphi} + \varepsilon \delta\boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{F}_\varepsilon := \mathbf{F} + \varepsilon \delta\mathbf{F}, \quad \mathbf{P}_\varepsilon := \mathbf{P} + \varepsilon \delta\mathbf{P} \quad (\text{C.5})$$

y $(\delta\boldsymbol{\varphi}, \delta\mathbf{F}, \delta\mathbf{P})$ es una variación arbitraria. En situación de estacionariedad se cumple para cualquier variación de este tipo que $\delta\Pi = 0$. Una serie de operaciones directas conduce al conjunto de ecuaciones:

$$\langle \mathbf{P}, \text{GRAD}_X [\delta\boldsymbol{\varphi}] \rangle - \langle \mathbf{B}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle - \langle \bar{\mathbf{T}}, \delta\boldsymbol{\varphi} \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V} \quad (\text{C.6a})$$

$$\left\langle \delta\mathbf{F}, \left(2\mathbf{F} \partial_C \hat{W}(\mathbf{C}) - \mathbf{P} \right) \right\rangle = 0 \quad \forall \delta\mathbf{F} \in \mathcal{F} \quad (\text{C.6b})$$

$$\langle \delta\mathbf{P}, (\text{GRAD}_X [\delta\boldsymbol{\varphi}] - \mathbf{F}) \rangle = 0 \quad \forall \delta\mathbf{P} \in \mathcal{S} \quad (\text{C.6c})$$

donde \mathcal{S} y \mathcal{F} , los espacios de tensiones y de gradientes de deformaciones, están contenidos en el espacio L definido en (C.3). Como puede observarse estas expresiones representan en forma débil la ecuación de equilibrio, la interpretación de \mathbf{P} como tensor de tensiones nominales y la identificación de \mathbf{F} con el gradiente de deformaciones, respectivamente.

C.1.1 Formulación variacional de 3 campos mejorada

Se considera ahora una reparametrización del gradiente de deformaciones de la forma (C.1), de manera que $\mathbf{F} = \text{GRAD}_X [\boldsymbol{\varphi}] + \tilde{\mathbf{F}}$ incluye el gradiente de deformaciones de mejora $\tilde{\mathbf{F}}$; este campo y sus variaciones admisibles están contenidos en el espacio:

$$\tilde{\mathcal{F}} := \left\{ \tilde{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^3 \mid \tilde{F}_A^i \in L_2(\Omega) \right\} \quad (\text{C.7})$$

Se define ahora el funcional correspondiente

$$\tilde{\Pi}(\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{P}) := \Pi(\boldsymbol{\varphi}, \text{GRAD}_X [\boldsymbol{\varphi}] + \tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{P}) \quad (\text{C.8})$$

Sólo se exige a $\tilde{\mathbf{F}}$ que sus componentes estén en el espacio $L_2(\Omega)$, por lo tanto, no se necesitará continuidad entre elementos al construir la aproximación por elementos finitos. En consecuencia, el método desarrollado es conforme, ya que respeta los requisitos de continuidad inherentes a la formulación variacional.

Mediante un cálculo análogo al anterior se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones de Euler para el problema discretizado por elementos finitos:

$$\left\langle 2\mathbf{F}^h \partial_C \hat{W}(\mathbf{C}^h), \text{GRAD}_X [\delta\boldsymbol{\varphi}^h] \right\rangle - \langle \mathbf{B}, \delta\boldsymbol{\varphi}^h \rangle - \langle \bar{\mathbf{T}}, \delta\boldsymbol{\varphi}^h \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\varphi}^h \in \mathcal{V}^h \quad (\text{C.9a})$$

$$\left\langle \delta\tilde{\mathbf{F}}^h, \left(2\mathbf{F}^h \partial_C \hat{W}(\mathbf{C}^h) - \mathbf{P}^h \right) \right\rangle = 0 \quad \forall \delta\tilde{\mathbf{F}}^h \in \tilde{\mathcal{F}}^h \quad (\text{C.9b})$$

$$\left\langle \delta\mathbf{P}^h, \tilde{\mathbf{F}}^h \right\rangle = 0 \quad \forall \delta\mathbf{P}^h \in \mathcal{S}^h \quad (\text{C.9c})$$

\mathcal{S}^h y $\tilde{\mathcal{F}}^h \subset L$ denotan los espacios de tensiones y gradientes de deformaciones de mejora cubiertos por la aproximación por elementos finitos. En vista de la condición de ortogonalidad entre estos dos campos, que se impondrá más adelante, el campo de tensiones \mathbf{P}^h quedará eliminado automáticamente de estas ecuaciones y no será necesario el conocimiento explícito de esta interpolación en la aplicación del método.

Las correspondientes ecuaciones de Euler del problema continuo en Ω son:

$$\begin{aligned} \text{DIV} \left[2\mathbf{F} \partial_C \hat{W}(\mathbf{C}) \right] + \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \left[2\mathbf{F} \partial_C \hat{W}(\mathbf{C}) \right] - \mathbf{P} &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

De las ecuaciones de Euler anteriores se desprende que en el problema continuo $\tilde{\mathbf{F}}$ es localmente nulo en Ω . Sin embargo, en el contexto de una aproximación mixta por elementos finitos esta condición sólo se exige en forma débil y este campo añadido permite obtener una mejor representación del campo de deformaciones.

Sobre las variables definidas $\tilde{\mathbf{F}}^h$ y \mathbf{P}^h se impone una serie de condiciones para asegurar eficacia y buen comportamiento del método:

(i) Condición de estabilidad: El espacio $\tilde{\mathcal{F}}^h$ de los gradientes de deformaciones de mejora tiene intersección nula con el espacio de gradientes de deformaciones “compatibles”, que se denotará por $GRAD_X [\mathcal{V}^h]$. Es decir:

$$\tilde{\mathcal{F}}^h \cap GRAD_X [\mathcal{V}^h] = \{0\}$$

Dado que el gradiente de deformaciones de mejora es un campo adicional, agregado para mejorar la aproximación conforme al gradiente de deformaciones “compatibles” que resulta del método de Galerkin, es natural pensar que la intersección de sus respectivos espacios es el elemento nulo. Violar esta condición puede dar lugar a un sistema singular de ecuaciones.

(ii) Consistencia variacional: En vista de la ecuación (C.9b) se requiere que los espacios de tensiones nominales \mathcal{S}^h y de gradientes de deformaciones de mejora $\tilde{\mathcal{F}}^h$ sean ortogonales. Esta condición implica que:

$$\langle \mathbf{P}_e, \tilde{\mathbf{F}}_e \rangle \equiv 0 \quad (\text{C.11})$$

con lo cual, en la aplicación del método, la tercera ecuación queda fuera de la formulación y el campo \mathbf{P}^h queda automáticamente eliminado de las ecuaciones.

(iii) Condición de tensión constante: El espacio de tensiones nominales \mathcal{S}^h debe contener al menos funciones constantes por elementos, con lo cual $\tilde{\mathcal{F}}^h$ debe ser ortogonal a cualquier \mathbf{P}_0 constante, es decir:

$$\langle \mathbf{P}_0, \delta \tilde{\mathbf{F}} \rangle \equiv 0, \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{F}} \in \tilde{\mathcal{F}}^h \quad (\text{C.12})$$

Esta condición implica que $\tilde{\mathbf{F}}$ debe tener un valor medio nulo en el elemento, es decir, $\int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{F}}_e d\Omega_e = 0$, esto representa el cumplimiento en forma débil de la tercera ecuación de Euler.

En el problema no-lineal estas condiciones aseguran que el método produce la solución exacta para estados de deformación homogénea (i.e., estados de deformación con gradiente de deformaciones constante). Esto se puede interpretar como la verificación de una versión no-lineal del test de la parcela.

(iv) Las aproximaciones de mejora generadas por $\tilde{\mathcal{F}}^h$ deben transformarse en forma objetiva, en el sentido que para cualquier movimiento superpuesto de cuerpo rígido $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{x}$, con matriz de rotación $\mathbf{Q} \in SO(3)$, cualquier $\tilde{\mathbf{F}}^h \in \tilde{\mathcal{F}}^h$ se transforma como $\tilde{\mathbf{F}}^h \rightarrow \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}^h$.

Esta condición asegura que el gradiente de deformaciones mejorado definido en (C.1) se transforma también en forma objetiva, ya que $GRAD_X [\varphi^h]$ también se

transforma objetivamente ante movimientos superpuestos de cuerpo rígido. Por lo tanto el método preserva el requisito de objetividad. Se describe a continuación el procedimiento sistemático para el diseño de interpolaciones del gradiente de deformaciones, de modo que satisfagan automáticamente este requisito.

C.2 Mejora del gradiente de deformaciones

La idea clave para el diseño de las interpolaciones de mejora del gradiente de deformaciones, $\tilde{\mathbf{F}}^h$, es llevar a cabo la construcción en el dominio isoparamétrico \square , en función de una transformación lineal $\mathbb{F}[\cdot]$ de vectores en \square en vectores en \square , para un $\boldsymbol{\xi} \in \square$ fijo. Luego, mediante una transformación apropiada se obtiene $\tilde{\mathbf{F}}^h$, que define vectores en $\boldsymbol{\varphi}^h(\Omega)$ a partir de vectores en Ω .

Paso 1: Considerar una transformación lineal $\mathbb{F}[\cdot]$, cuyos dominio y rango son vectores definidos en \square , sujeta a la restricción

$$\int_{\square} \mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}) \square = 0 \quad (\text{C.13})$$

y tal que $\mathbb{F}[\cdot]$ no esté contenida en $GRAD_X[\mathcal{V}^h]$. Es decir, la condición (i) se satisface por construcción en el dominio isoparamétrico \square .

Paso 2: Transformar $\mathbb{F}[\cdot]$ en $\tilde{\mathbb{F}}_e[\cdot]$, cuyo rango está constituido por vectores definidos en la configuración Ω , mediante la transformación tensorial:

$$\tilde{\mathbb{F}}_e(\boldsymbol{\xi}) = \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{J}_0 \mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{J}_0^{-1} \quad (\text{C.14})$$

ya que $d\Omega = j(\boldsymbol{\xi}) d\square$, esta transformación por construcción tiene la propiedad:

$$\int_{\Omega_e} \tilde{\mathbb{F}}_e(\boldsymbol{\xi}) d\Omega = j_0 \mathbf{J}_0 \left[\int_{\square} \mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}) \square \right] \mathbf{J}_0^{-1} = 0 \quad (\text{C.15})$$

y es la que toma en cuenta el efecto de distorsión de los elementos en la configuración de referencia.

Paso 3: Obtener $\tilde{\mathbf{F}}^h$, que define vectores en $\boldsymbol{\varphi}^h(\Omega)$ a partir de vectores en Ω , mediante la fórmula:

$$\tilde{\mathbf{F}}^h = \mathbf{F}_0^h \tilde{\mathbb{F}}_e(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{C.16})$$

donde $\mathbf{F}_0^h := GRAD_X[\boldsymbol{\varphi}^h]|_{\boldsymbol{\xi}=0}$ es la aproximación de un solo punto al gradiente de deformaciones. Ya que \mathbf{F}_0^h se transforma objetivamente, se satisface la condición (iv) de objetividad. Además, relacionando (C.14) y (C.16) se concluye que

$$\int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{F}}^h d\Omega = \mathbf{F}_0^h \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbb{F}}_e(\boldsymbol{\xi}) d\Omega = 0 \quad (\text{C.17})$$

es decir, que la interpolación del gradiente de deformaciones de mejora (“*enhanced*”) satisface la condición (iii).

De esta manera, el espacio $\tilde{\mathcal{F}}^h$ de gradientes de deformaciones de mejora (“*enhanced*”) queda completamente determinado al definir $\mathbb{F}(\boldsymbol{\xi})$ en el dominio isoparamétrico \square .

C.3 Elemento sólido tri-lineal Q1/E9

El elemento Q1/E9 es una generalización del elemento de modos incompatibles de (Wilson et al., 1973), extendida al régimen no-lineal. El punto de partida es adoptar las correspondientes funciones de forma incompatibles:

$$\tilde{N}^1 := \frac{1}{2} [\xi_1^2 - 1] \quad , \quad \tilde{N}^2 := \frac{1}{2} [\xi_2^2 - 1] \quad , \quad \tilde{N}^3 := \frac{1}{2} [\xi_3^2 - 1] \quad (\text{C.18})$$

para definir la transformación $\mathbb{F}(\boldsymbol{\xi})$ en \square por medio de la interpolación:

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{I=1}^3 \boldsymbol{\Gamma}_I \otimes \text{GRAD}_\xi [\tilde{N}^I] \quad , \quad \text{con } \boldsymbol{\Gamma}_I \in \mathbb{R}^3 \quad (I = 1, 2, 3) \quad (\text{C.19})$$

De acuerdo con el procedimiento descrito, el gradiente de deformaciones de mejora se calcula mediante la expresión:

$$\tilde{\mathbf{F}}^h(\boldsymbol{\xi}) = \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{F}_0^h \mathbf{J}_0 \mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}) J_0^{-1} = \sum_{I=1}^3 [\mathbf{F}_0^h \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\Gamma}_I] \otimes \left[\frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{J}_0^{-T} \text{GRAD}_\xi [\tilde{N}^I] \right] \quad (\text{C.20})$$

ya que $\boldsymbol{\alpha}_I := \mathbf{F}_0^h \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\Gamma}_I \in \mathbb{R}^3$ son vectores constantes en cada elemento (no dependen de $\boldsymbol{\xi}$), se pueden adoptar los $\boldsymbol{\alpha}_I$ en lugar de los $\boldsymbol{\Gamma}_I$ como “parámetros locales del elemento” para expresar la interpolación como:

$$\tilde{\mathbf{F}}^h = \sum_{I=1}^3 \boldsymbol{\alpha}_I \otimes \widetilde{\text{GRAD}}_X [\tilde{N}^I] \quad (\text{C.21})$$

donde

$$\widetilde{\text{GRAD}}_X [\tilde{N}^I] := \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} J_0^{-T} \text{GRAD}_\xi [\tilde{N}^I] \quad (\text{C.22})$$

La elección de (C.19) viene motivada por el análisis de las componentes del gradiente de deformaciones de un elemento regular no distorsionado, identificado con el dominio isoparamétrico (i.e., $\Omega_e \equiv \square$). Si el gradiente de deformaciones

evaluado en un punto se expresa como $GRAD_0 [\boldsymbol{\varphi}^h] = [\mathbf{f}_1^0 \ \mathbf{f}_2^0 \ \mathbf{f}_3^0]$, las columnas de la aproximación conforme al gradiente de deformaciones toman la forma:

$$\boldsymbol{\varphi}_{,\xi_1}^h = \mathbf{f}_1^0 + \xi_2 \boldsymbol{\beta}_3 + \xi_3 \boldsymbol{\beta}_2 + \xi_2 \xi_3 \boldsymbol{\beta}_4 \quad (\text{C.23a})$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{,\xi_2}^h = \mathbf{f}_2^0 + \xi_1 \boldsymbol{\beta}_3 + \xi_3 \boldsymbol{\beta}_1 + \xi_1 \xi_3 \boldsymbol{\beta}_4 \quad (\text{C.23b})$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{,\xi_3}^h = \mathbf{f}_3^0 + \xi_1 \boldsymbol{\beta}_2 + \xi_2 \boldsymbol{\beta}_1 + \xi_1 \xi_2 \boldsymbol{\beta}_4 \quad (\text{C.23c})$$

mientras que el gradiente de deformaciones de mejora, definido a partir de (C.19), se puede expresar como:

$$\tilde{\mathbf{F}}^h = [\xi_1 \boldsymbol{\alpha}_1 \ \xi_2 \boldsymbol{\alpha}_2 \ \xi_3 \boldsymbol{\alpha}_3] \quad (\text{C.24})$$

Inspeccionando (E.24) y (C.24), las componentes de la aproximación mejorada, se comprueba que las columnas de esta aproximación contienen polinomios completos. Los pasos, que se han seguido en la construcción de esta aproximación aseguran el cumplimiento de esta propiedad también para configuraciones distorsionadas.

C.4 Elemento tri-lineal modificado QM1/E12

La mejora que se introduce a continuación viene motivada por el análisis a la teoría infinitesimal. Ya que el efecto de distorsión en la configuración de referencia se toma en cuenta en (C.14), es suficiente considerar un elemento cuya configuración de referencia coincide con el cubo de referencia, i.e., $\Omega_e \equiv \square$. De acuerdo con esto, según (E.24), el cambio de volumen linealizado $\Delta V^h(\boldsymbol{\xi})$ predicho por la interpolación estándar de Galerkin es de la forma:

$$\frac{\Delta V^h(\boldsymbol{\xi})}{V_0^h} = tr [\mathbf{F}^h] = n_{\dim} A_0 + A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + \underbrace{A_3 \xi_3 + A_4 \xi_1 \xi_2 + A_5 \xi_2 \xi_3 + A_6 \xi_3 \xi_1}_{\text{aparecen para } n_{\dim}=3} \quad (\text{C.25})$$

donde V_0^h es el volumen de referencia y A_0, A_1, \dots, A_6 son constantes que dependen de los desplazamientos nodales \mathbf{u}_A y de los vectores de estabilización $\boldsymbol{\gamma}_A$. Obsérvese que los términos cuadráticos solo aparecen en el caso tri-dimensional. Por otro lado, el cambio de volumen linealizado predicho por la componente “*enhanced*” $\tilde{\mathbf{F}}^h$ del gradiente de deformaciones es:

$$\frac{\widetilde{\Delta V}^h(\boldsymbol{\xi})}{V_0^h} = tr [\tilde{\mathbf{F}}^h] = \tilde{A}_1 \xi_1 + \tilde{A}_2 \xi_2 + \tilde{A}_3 \xi_3 \quad (\text{C.26})$$

donde las constantes $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ dependen de los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Si se considera el problema lineal incompresible se concluye lo siguiente:

i) En el problema bi-dimensional el método no presenta bloqueo, pues al forzar la condición de incompresibilidad quedan determinadas las constantes que aparecen en (C.25) y en (C.26) como $A_1 = -\tilde{A}_1$, $A_2 = -\tilde{A}_2$.

ii) En el problema tri-dimensional el elemento presentaría bloqueo, pues la imposición de la condición de incompresibilidad conduce a que $A_4 = A_5 = A_6 = 0$, lo cual es posible sólo si los desplazamientos nodales son nulos.

Con las anteriores consideraciones como motivación, se introduce una modificación adicional a la componente de mejora del gradiente de deformaciones, de acuerdo con la fórmula de interpolación

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{I=1}^3 \boldsymbol{\Gamma}_I \otimes \text{GRAD}_\xi [\tilde{N}^I] + \left(\boldsymbol{\Gamma}_4 \cdot \text{GRAD}_\xi [\tilde{N}^4] \right) I_3 \quad (\text{C.27})$$

donde $\boldsymbol{\Gamma}_I \in \mathbb{R}^3$ ($I = 1, \dots, 4$), I_3 es la matriz unitaria 3×3 y $\tilde{N}^4 : \square \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de forma que introduce la mejora adicional y está definida por:

$$\tilde{N}^4 := \xi_1 \xi_2 \xi_3, \quad \text{con lo que: } \text{GRAD}_\xi [\tilde{N}^4] = \begin{bmatrix} \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3 \xi_1 \\ \xi_1 \xi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.28})$$

Con la adición de esta cuarta función de forma de mejora el cambio de volumen linealizado contendrá ahora además los términos:

$$\tilde{A}_4 \xi_1 \xi_2 + \tilde{A}_5 \xi_2 \xi_3 + \tilde{A}_6 \xi_3 \xi_1 \quad (\text{C.29})$$

Para el problema lineal la imposición de la condición de incompresibilidad conduce a las siguiente propiedad de cancelación de términos:

$$A_J + \tilde{A}_J = 0, \quad \text{para } J = 1, \dots, 6$$

lo que produce un elemento libre de bloqueo en el límite incompresible. En el caso de elementos distorsionados, esta propiedad de cancelación sólo ocurre si la transformación entre $\text{GRAD}_\xi [\mathcal{H}^J]$ y $\text{GRAD}_X [\mathcal{H}^J]$ es de la misma forma adoptada en (C.14) para el gradiente de deformaciones de mejora. Es por esta razón por la que se adopta una transformación del tipo (A.14) en el cálculo de $\text{GRAD}_X [\mathcal{H}^J]$, indispensable para $n_{\text{dim}} = 3$ (recuérdese que esta transformación no altera el orden de convergencia del método).

Resta sólo desarrollar la expresión de $\tilde{\mathbf{F}}^h$, con la inclusión del término asociado a esta nueva función. A partir de la transformación definida en (C.27), mediante la

fórmula de transformación $\tilde{\mathbf{F}}^h(\boldsymbol{\xi}) = [j_0/j(\boldsymbol{\xi})] GRAD_0[\boldsymbol{\varphi}^H] \mathbf{J}_0 \mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}) J_0^{-1}$ del procedimiento general descrito antes y aplicando la identidad:

$$\frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \left(\boldsymbol{\Gamma}_4 \cdot GRAD_\xi [\tilde{N}^4] \right) = \boldsymbol{\alpha}_4 \cdot \widetilde{GRAD}_X [\tilde{N}^4] \quad \text{con } \boldsymbol{\alpha}_4 := \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\Gamma}_4 \quad (\text{C.30})$$

se obtiene el resultado final:

$$\tilde{\mathbf{F}}^h = \sum_{I=1}^3 \boldsymbol{\alpha}_I \otimes \widetilde{GRAD}_X [\tilde{N}^I] + \left(\boldsymbol{\alpha}_4 \cdot \widetilde{GRAD}_X [\tilde{N}^4] \right) GRAD_0[\boldsymbol{\varphi}^h] \quad (\text{C.31})$$

Anexo D

Elementos de mecánica del medio continuo

En el presente capítulo se hace una revisión de conceptos de la mecánica del medio continuo. Esta disciplina es el soporte para el tratamiento de problemas en la ingeniería, como los que se abordan en el presente trabajo. La mecánica del medio continuo considera el comportamiento mecánico de un medio, sólido o fluido, a escala macroscópica. Este procedimiento resulta adecuado en la mayoría de aplicaciones de interés en ingeniería, dado que las dimensiones de los cuerpos que se consideran suelen ser grandes respecto a las dimensiones características de la escala microscópica, frecuentemente en varios ordenes de magnitud. Por lo tanto, no se considera la naturaleza discontinua de la materia en el nivel microscópico. De acuerdo con esto es posible describir las propiedades y el comportamiento del medio que se analiza mediante funciones continuas, por ejemplo de la posición. Bajo estas premisas la mecánica del medio continuo estudia las interacciones entre las fuerzas y el movimiento en los cuerpos. Se pueden encontrar estudios amplios del tema en libros clásicos como (Malvern, 1969), (Mase, 1977), (Spencer, 1980) y en obras muy recientes como (Oliver and Agelet de Saracibar, 2000).

La revisión que se hace en este capítulo incluye la presentación de los conceptos, nomenclatura y expresiones necesarias para el planteamiento del problema en los capítulos siguientes. Se consideran tanto el caso general de grandes deformaciones, así como el rango infinitesimal de deformaciones como situación particular. Se verán las definiciones de las configuraciones de referencia y deformada, distintos tensores de deformación y tensores de tensión, los operadores de transporte de tensores, las relaciones constitutivas de materiales de interés y, finalmente, las ecuaciones de gobierno tanto en forma fuerte como en forma débil.

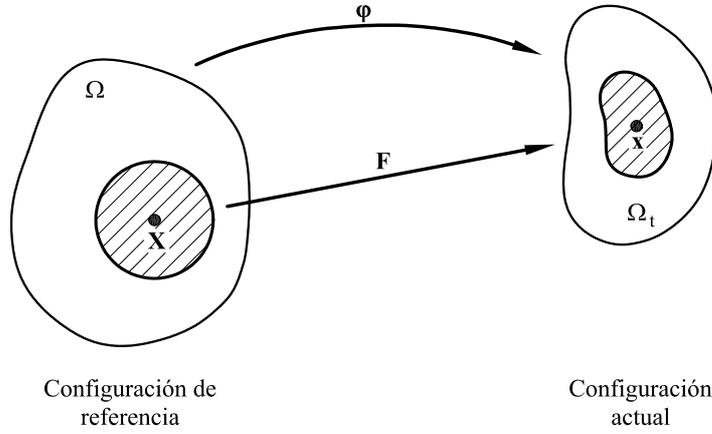


Figura D.1: Esquema de la deformación de un medio continuo. Transformación φ y tensor gradiente de deformación \mathbf{F} .

D.1 Definiciones cinemáticas básicas

Sea un cuerpo continuo denominado \mathcal{B} que ocupa una región del espacio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, denominada *configuración de referencia o material*, cuyo contorno es $\partial\Omega$. Cada *partícula o punto material* del cuerpo será identificada por su posición $\mathbf{X} \in \Omega$ en la configuración de referencia. Sea una *transformación* o función biyectiva $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, que en otro instante ubica la posición del cuerpo en otra región \mathcal{S} del espacio,

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{S} \quad (\text{D.1})$$

Esta transformación suele llamarse también *deformación*. A la región $\mathcal{S} = \varphi(\Omega)$ se la denomina *configuración actual o deformada* y $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ a los puntos que la conforman. Cada punto material \mathbf{X} del cuerpo \mathcal{B} pasa a ocupar una *posición o punto espacial* \mathbf{x} en \mathcal{S} , dada por:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \quad (\text{D.2})$$

\mathbf{X} y \mathbf{x} representan, respectivamente, las coordenadas materiales y las espaciales de un punto material.

El *desplazamiento* $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ queda definido por el campo vectorial:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} \quad (\text{D.3})$$

con lo cual se puede escribir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad (\text{D.4})$$

D.1.1 Movimiento

Descripción material

El *movimiento* de un cuerpo es una sucesión continua de configuraciones caracterizadas por la variación del parámetro tiempo. De esta manera el movimiento puede describirse como:

$$\varphi_t : \Omega \rightarrow \Omega_t \quad (\text{D.5})$$

donde $\varphi_t(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}, t)$ es la transformación que ubica la posición $\mathcal{S} = \Omega_t$ que ocupa el cuerpo en cada instante t .

Durante el movimiento la posición de una partícula \mathbf{X} en el instante t viene dada por:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (\text{D.6})$$

y la velocidad de la partícula material se define como

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (\text{D.7})$$

La expresión anterior se denomina *descripción material* del campo de velocidades en el sentido de que la información se proporciona directamente en función de las partículas materiales \mathbf{X} . Este tipo de descripción se conoce también como *descripción lagrangiana*.

Descripción espacial

Si se tiene en cuenta que la transformación φ_t es biyectiva, las posiciones \mathbf{X} que los puntos materiales ocupaban en la configuración de referencia se pueden expresar en términos de las posiciones en el espacio \mathbf{x} que estos ocupan en la configuración deformada o actual:

$$\mathbf{X} = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}) \quad (\text{D.8})$$

Esta transformación inversa, φ_t^{-1} , se denomina *mapa de referencia*.

La alternativa a la descripción material es la *descripción espacial* o *euleriana* del campo de velocidades. En este caso la información se proporciona en función de las posiciones \mathbf{x} en el espacio. En base al mapa de referencia se puede definir la función:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) \quad (\text{D.9})$$

Tal como se observa aquí, la nomenclatura estándar utiliza generalmente letras mayúsculas para designar los campos materiales y minúsculas para los campos espaciales..

Cualquier campo o propiedad relacionada con el movimiento de un cuerpo se puede expresar en descripción material o espacial, dependiendo de los argumentos o variables independientes que se tomen, las partículas materiales o las posiciones espaciales. La descripción material de un campo espacial $\gamma(\mathbf{x}, t)$ se define mediante la expresión:

$$\Gamma(\mathbf{X}, t) = \gamma(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \quad (\text{D.10})$$

mientras que la descripción espacial de un campo material se define como

$$\gamma(\mathbf{x}, t) = \Gamma(\boldsymbol{\varphi}_t^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (\text{D.11})$$

En mecánica de sólidos usualmente se adopta la descripción material, puesto que facilita la aplicación de las ecuaciones constitutivas de los materiales.

Derivadas temporales material y derivada local

La derivada temporal material de una propiedad $\Gamma(\mathbf{X}, t)$ es:

$$\dot{\Gamma}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (\text{D.12})$$

Por otro lado, la derivada temporal local de una propiedad en descripción espacial es:

$$\partial_t \gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (\text{D.13})$$

La interpretación de cada una de ellas se desprende del significado físico de la descripción empleada en cada caso. La derivada local representa la variación en el tiempo de una determinada propiedad observada en una posición fija en el espacio, mientras que la derivada material representa la variación en el tiempo de la propiedad de una determinada partícula del medio. La diferencia existente entre las dos radica en el efecto de transporte de partículas en el medio, fenómeno denominado *convección*. La relación entre la derivada material y la local se puede deducir de la expresión (D.10):

$$\dot{\Gamma}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t))}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \quad (\text{D.14a})$$

$$= \partial_t \gamma + \mathbf{v} \cdot \nabla \gamma \quad (\text{D.14b})$$

Esta ecuación establece la relación entre la variación temporal de una propiedad y el término convectivo.

Tensor gradiente de deformación

El gradiente material de un campo Γ se define como:

$$\text{GRAD } \Gamma = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\Gamma(\mathbf{X}, t)] \quad (\text{D.15})$$

y el gradiente espacial de un campo γ queda definido por:

$$\nabla \gamma = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\gamma(\mathbf{x}, t)] \quad (\text{D.16})$$

es decir, son las derivadas parciales respecto a \mathbf{X} y \mathbf{x} , respectivamente, para un tiempo t fijo. Se puede introducir la siguiente notación simbólica para el operador *gradiente material*:

$$\text{GRAD } (\cdot) = \left[\frac{\partial (\cdot)}{\partial X_1}, \frac{\partial (\cdot)}{\partial X_2}, \frac{\partial (\cdot)}{\partial X_3} \right] \quad (\text{D.17})$$

y la correspondiente al operador *gradiente espacial*, denominado también operador *Nabla* como:

$$\nabla (\cdot) = \left[\frac{\partial (\cdot)}{\partial x_1}, \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_2}, \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_3} \right] \quad (\text{D.18})$$

El tensor *gradiente de deformación*, denominado $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$, es la derivada de la transformación $\varphi(\mathbf{X})$ respecto a \mathbf{X} , que se define como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \text{GRAD } [\varphi(\mathbf{X}, t)] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\varphi(\mathbf{X}, t)] \quad (\text{D.19})$$

El gradiente de deformación se puede expresar también en términos del gradiente de los desplazamientos como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \text{GRAD } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{D.20})$$

donde \mathbf{I} es el tensor identidad de segundo orden.

El determinante de la matriz asociada al gradiente de deformaciones es:

$$J(\mathbf{X}, t) := \det [\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] \quad (\text{D.21})$$

En la configuración de referencia el gradiente de deformaciones $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$, y en consecuencia, $\det [\mathbf{F}(\mathbf{X})] = 1$. Por otro lado, un valor de $\det [\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] = 0$ implicaría que el entorno infinitesimal ha colapsado en una partícula material, lo que representaría una situación físicamente inadmisibles. En consecuencia, cualquier deformación del cuerpo siempre debe verificar:

$$\det [\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] > 0 \quad (\text{D.22})$$

D.2 Tensores de deformación

D.2.1 Introducción

El gradiente de deformación contiene la descripción local del movimiento relativo del medio continuo en el entorno diferencial de cada partícula. Sin embargo, a pesar de la importancia del tensor \mathbf{F} en el análisis, éste no es en sí mismo una *medida de la deformación*, si se entiende por deformación estrictamente los cambios de posición que dan lugar a un *cambio de forma*. Esto es debido a que en el tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} están incluidas también las rotaciones rígidas en torno a \mathbf{X} , como se verá a continuación. Con la finalidad de simplificar la notación, siguiendo una convención estándar, en adelante se omitirá la indicación explícita de los argumentos \mathbf{X} y t en algunas expresiones.

Descomposición polar del gradiente de deformación

El teorema de *descomposición polar* de tensores permite separar en \mathbf{F} las deformaciones propiamente dichas de las rotaciones. Localmente, en el entorno diferencial de cada partícula \mathbf{X} , se puede descomponer \mathbf{F} en un conjunto único de tensores $\{\mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ tal que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (\text{D.23})$$

donde el *tensor de rotación* \mathbf{R} es un tensor ortogonal, y \mathbf{V} y \mathbf{U} son los tensores simétricos *izquierdo y derecho de estiramiento*, respectivamente. Esta descomposición permite considerar cualquier movimiento relativo en el entorno de una partícula en dos pasos. Por ejemplo, la denominada descomposición por la izquierda equivale a una rotación \mathbf{R} seguida de un estiramiento \mathbf{V} . De otro modo, la descomposición por la derecha consiste en un estiramiento \mathbf{U} seguido de la rotación \mathbf{R} .

D.2.2 Tensores materiales de deformación

Si se considera una línea material infinitesimal $d\mathbf{X}$ entre dos partículas próximas del cuerpo, \mathbf{X} y $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ respectivamente, el gradiente de deformación es el operador lineal que relaciona la línea $d\mathbf{X}$ con su configuración deformada $d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (\text{D.24})$$

a partir de esta relación se puede expresar el cuadrado de la longitud deformada de la línea en términos de la longitud de referencia como:

$$|d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} = d\mathbf{X} (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) d\mathbf{X} \quad (\text{D.25})$$

El tensor simétrico *derecho de Cauchy-Green* queda definido por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{D.26})$$

con lo cual:

$$|d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{X} \mathbf{C} d\mathbf{X} \quad (\text{D.27})$$

De acuerdo a esto, la variación de la longitud de esta línea material es:

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} \mathbf{C} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{D.28a})$$

$$= d\mathbf{X} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \quad (\text{D.28b})$$

El tensor *de Green-Lagrange*, denominado \mathbf{E} , queda definido por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (\text{D.29})$$

o, en términos del gradiente de desplazamientos,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[\text{GRAD } \mathbf{u} + (\text{GRAD } \mathbf{u})^T - (\text{GRAD } \mathbf{u})^T \text{GRAD } \mathbf{u} \right] \quad (\text{D.30})$$

Teniendo en cuenta la ecuación (D.23) y que \mathbf{R} es un tensor ortogonal, por tanto $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$, \mathbf{C} se puede expresar en términos de los tensores de estiramiento:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad (\text{D.31})$$

Se puede observar que tanto el tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} como el de Green-Lagrange \mathbf{E} dependen sólo de \mathbf{U} , que es la componente del gradiente de deformaciones asociada a los estiramientos. Estos tensores de deformación son, por lo tanto, indicadores del cambio de forma en el entorno de un punto determinado.

D.2.3 Tensores espaciales de deformación

Los tensores \mathbf{E} y \mathbf{C} , definidos anteriormente, son tensores materiales de deformación. Los correspondientes tensores espaciales de deformación se pueden definir, tal como se hizo para la velocidad, teniendo en cuenta el mapa de referencia φ^{-1} . El tensor *gradiente espacial de deformación* es la derivada de la transformación inversa $\varphi^{-1}(\mathbf{x})$ respecto a \mathbf{x} :

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\varphi^{-1}(\mathbf{x})] = \nabla \varphi^{-1}(\mathbf{x}) \quad (\text{D.32})$$

Como se puede observar, este tensor es el inverso del tensor gradiente (*material*) de deformación \mathbf{F} .

Se pueden definir relaciones análogas a las correspondientes a \mathbf{C} y \mathbf{E} partiendo de la expresión de la longitud inicial en términos de la longitud deformada:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \quad (\text{D.33})$$

luego, se puede encontrar los tensores espaciales \mathbf{b} y \mathbf{e} , que son respectivamente los tensores *izquierdo de Cauchy-Green* y *de Almansi*

$$|d\mathbf{X}|^2 = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} = d\mathbf{x} (\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{x} \quad (\text{D.34a})$$

$$\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (\text{D.34b})$$

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) d\mathbf{X} \quad (\text{D.34c})$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (\text{D.34d})$$

En función del gradiente de desplazamientos:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - (\nabla\mathbf{u})^T \nabla\mathbf{u} \right] \quad (\text{D.35})$$

El tensor \mathbf{b} se puede expresar, así como se hizo con \mathbf{C} , en función de un tensor de estiramiento:

$$\mathbf{b} = \mathbf{V}^2 \quad (\text{D.36})$$

La definición de una medida de la deformación es, en cierto modo, arbitraria. Es posible establecerla teniendo en cuenta la conveniencia matemática de las relaciones que se derivan de ésta en las ecuaciones constitutivas. Por ejemplo, el tensor de Green-Lagrange es una medida particular dentro de la familia de tensores de deformación dada por:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & m \neq 0 \\ \ln [\mathbf{U}] & m = 0 \end{cases} \quad (\text{D.37})$$

El tensor de Green-Lagrange corresponde a $m = 2$, una medida asociada al cuadrado de las longitudes. Otro miembro de la familia es el tensor de Hencky que corresponde a $m = 0$ y cuya medida está asociada al logaritmo de las longitudes. Se pueden definir expresiones similares a la anterior en función de tensores espaciales. La medida logarítmica de las deformaciones es de especial interés en la formulación de modelos de plasticidad en grandes deformaciones.

D.2.4 Descomposición espectral de los tensores de deformación

La descomposición espectral y los invariantes tensoriales son dos resultados del álgebra lineal de gran utilidad en el manejo de magnitudes tensoriales, en particular de los tensores de tensión. A partir de estos resultados se derivan importantes conceptos como los de deformaciones y direcciones principales.

Los tensores \mathbf{C} y \mathbf{b} son simétricos y definidos positivos, la *descomposición espectral* de estos tensores para cada $\mathbf{X} \in \Omega$ es:

$$\mathbf{C} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)}, \quad \mathbf{b} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} \quad (\text{D.38})$$

donde los λ_A^2 son los valores propios tanto de \mathbf{C} como de \mathbf{b} (son los mismos para ambos), mientras que $\mathbf{N}^{(A)}$ y $\mathbf{n}^{(A)}$ son los vectores propios de \mathbf{C} y de \mathbf{b} , respectivamente, definidos por los problemas de valores propios:

$$\mathbf{C}\mathbf{N}^{(A)} = \lambda_A^2 \mathbf{N}^{(A)} \quad (\text{D.39a})$$

$$\mathbf{b}\mathbf{n}^{(A)} = \lambda_A^2 \mathbf{n}^{(A)} \quad (\text{D.39b})$$

Los valores propios λ_A^2 son las raíces del *polinomio característico* de la ecuación anterior, definido por:

$$p(\lambda^2) = \lambda^6 - I_1 \lambda^4 + I_2 \lambda^2 - I_3 \quad (\text{D.40})$$

donde I_1 , I_2 e I_3 son los invariantes tensoriales de \mathbf{C} (y de \mathbf{b}), definidos por:

$$I_1 = \text{tr}[\mathbf{C}] \quad (\text{D.41a})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}[\mathbf{C}^2]) \quad (\text{D.41b})$$

$$I_3 = \det[\mathbf{C}] \quad (\text{D.41c})$$

La descomposición polar y la normalización a módulo unitario de los vectores propios conduce a:

$$\mathbf{n}^{(A)} = \mathbf{R}\mathbf{N}^{(A)}, \quad |\mathbf{N}^{(A)}| = |\mathbf{n}^{(A)}| = 1 \quad (\text{D.42})$$

La tripleta $\{\mathbf{N}^{(1)}, \mathbf{N}^{(2)}, \mathbf{N}^{(3)}\}$, definida por las *direcciones principales en la configuración de referencia* forma una base ortonormal en $\mathbf{X} \in \Omega$. Por su parte, $\{\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}\}$ está definida por las *direcciones principales en la configuración deformada* en $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$.

La descomposición espectral del gradiente de deformaciones es:

$$\mathbf{F} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)}, \quad \mathbf{R} = \sum_{A=1}^3 \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)} \quad (\text{D.43})$$

Los valores propios del tensor gradiente de deformaciones λ_A se denominan también *estiramientos principales* a lo largo de la dirección principal material $\mathbf{N}^{(A)}$. Estos estiramientos representan la relación entre la longitud deformada y la longitud del mismo segmento material infinitesimal en la configuración de referencia. Como se puede observar, los autovalores de los tensores \mathbf{C} y \mathbf{b} son los cuadrados de los estiramientos principales.

Finalmente, la descomposición espectral de los tensores de estiramiento se puede expresar en función de los estiramientos principales como:

$$\mathbf{U} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)}, \quad \mathbf{V} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} \quad (\text{D.44})$$

D.2.5 Cambio de volumen. Interpretación del determinante del gradiente de deformación

El determinante del gradiente de deformación, J , representa la relación de volumen deformado por unidad de volumen de referencia:

$$J = \det [\mathbf{F}] = \frac{dv}{dV} \quad (\text{D.45})$$

En efecto, en un punto material \mathbf{X} se puede definir tres vectores infinitesimales $d\mathbf{X}_1$, $d\mathbf{X}_2$ y $d\mathbf{X}_3$ en la configuración de referencia. El volumen del paralelepípedo infinitesimal formado por estos tres vectores se puede calcular como:

$$dV = (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 \quad (\text{D.46})$$

En la configuración deformada los vectores correspondientes son $\mathbf{F}d\mathbf{X}_1$, $\mathbf{F}d\mathbf{X}_2$, y $\mathbf{F}d\mathbf{X}_3$, y el volumen deformado se puede expresar como:

$$dv = (\mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F}d\mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X}_3 \quad (\text{D.47})$$

La identidad:

$$\det [\mathbf{A}] \equiv \frac{(\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{w}}{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}}, \quad (\text{D.48})$$

es válida para cualquier tensor \mathbf{A} y cualquier conjunto de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$; ésta permite expresar el determinante del gradiente de deformación como la relación entre los volúmenes deformado y de referencia como en la ecuación (D.45).

D.2.6 Gradiente de velocidad y velocidad de deformación

La variación temporal del gradiente de deformación se define como:

$$\dot{\mathbf{F}} = \partial_t [\partial_{\mathbf{X}} [\boldsymbol{\varphi}]] = \partial_{\mathbf{X}} [\partial_t [\boldsymbol{\varphi}]] = \text{GRAD} [\mathbf{V}] \quad (\text{D.49})$$

y se denomina también *gradiente material de la velocidad*. Mediante la regla de la cadena se obtiene el *gradiente espacial de la velocidad* como:

$$\mathbf{l} = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{X}} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right] = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{D.50})$$

este tensor mide localmente la velocidad relativa entre dos puntos en un entorno infinitesimal, es decir:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{l} d\mathbf{x} \quad (\text{D.51})$$

La parte simétrica del gradiente espacial de velocidad se denomina *velocidad de deformación* \mathbf{d} y la parte antisimétrica se denomina *tensor de rotación (spin)* $\boldsymbol{\omega}$; éstos se expresan como:

$$\mathbf{d} = \nabla^s \mathbf{v} = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] \quad (\text{D.52a})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T \right] \quad (\text{D.52b})$$

El tensor \mathbf{d} contiene la información sobre la velocidad con que ocurren los estiramientos en el entorno local a un punto. La siguiente expresión pone de manifiesto la relación directa entre \mathbf{d} y la derivada de \mathbf{C} , el tensor derecho de Cauchy-Green:

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^T \left[(\nabla \mathbf{v})^T + \nabla \mathbf{v} \right] \mathbf{F} = 2\mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \quad (\text{D.53})$$

Esta expresión es de gran importancia en los algoritmos de modelos de plasticidad.

D.3 Deformaciones infinitesimales

La teoría de deformaciones infinitesimales o de *pequeñas deformaciones* es una simplificación de la teoría general (de *deformaciones finitas*). Ésta es aplicable si tanto

los desplazamientos como los gradientes de éstos son muy pequeños en comparación con las dimensiones características del medio continuo.

Dado que los desplazamientos son muy pequeños, las configuraciones material y espacial prácticamente coinciden. Por lo tanto, la teoría de pequeñas deformaciones no distingue una de otra, es decir $\mathbf{X} \approx \mathbf{x}$. Por otro lado, ya que los gradientes de deformación son pequeños, los términos de segundo orden en estas variables son despreciables en las expresiones de los tensores de deformación \mathbf{E} y \mathbf{e} , ecuaciones (D.30) y (?). Como consecuencia de lo anterior, estos tensores colapsan en el mismo, denominado *tensor de deformaciones infinitesimales* $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{e} \approx \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] = \nabla^s \mathbf{u} \quad (\text{D.54})$$

donde $\nabla^s (\cdot) = \frac{1}{2} [\nabla (\cdot) + \nabla^T (\cdot)]$ es el operador *gradiente simétrico*.

El tensor de deformaciones infinitesimales es lineal en \mathbf{u} , lo que representa una gran simplificación en las relaciones cinemáticas en la teoría de grandes deformaciones.

D.4 Fuerzas y tensores de tensión

Las fuerzas que actúan en un cuerpo y las tensiones son los elementos de la mecánica que se tratarán en esta sección. Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden clasificarse en dos tipos: las fuerzas de volumen y las fuerzas de superficie.

D.4.1 Fuerzas volumen

Las fuerzas de volumen, también denominadas *fuerzas másicas*, son fuerzas que se ejercen a distancia, generalmente exteriores al sistema, sobre todas las partículas materiales de un medio continuo. La resultante sobre un volumen V interior al cuerpo se expresa por la integral de volumen:

$$\mathbf{F}_{\text{vol}} = \int_V \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, dV \quad (\text{D.55})$$

donde $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ es el *vector de fuerzas másicas*. Tiene unidades de fuerza por unidad de volumen. Ejemplos de fuerzas másicas son la fuerza gravitacional, las fuerzas inerciales y las fuerzas magnéticas.

D.4.2 Fuerzas de superficie

Las fuerzas de superficie son fuerzas de contacto que actúan sobre los contornos de un cuerpo. Se representan mediante el *vector de tracciones* $\mathbf{t}(\mathbf{x})$, y la resultante

sobre la superficie de contorno ∂V se calcula como:

$$\mathbf{F}_{\text{sup}} = \int_{\partial V} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \, d\Gamma \quad (\text{D.56})$$

La noción de fuerza superficial también se puede extender al caso de superficies ideales trazadas dentro un cuerpo.

D.4.3 Tensores de tensión

Las fuerzas de interacción entre partes adyacentes de un cuerpo se pueden considerar como fuerzas superficiales internas. Esta noción conduce al concepto de *tensión*.

Tensor de Cauchy

En cada punto \mathbf{x} el *principio de tensión de Cauchy* asocia un vector de tracciones $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ a cada superficie infinitesimal que contiene a \mathbf{x} , caracterizada por su correspondiente vector normal \mathbf{n} . Esta relación es lineal y define el *estado tensional* en el punto \mathbf{x} . Esto implica la existencia de un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ tal que:

$$\mathbf{t}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (\text{D.57})$$

El tensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ se denomina *tensor de tensiones de Cauchy*, llamado también tensor de *tensiones verdaderas*. El tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor simétrico definido en la configuración actual del cuerpo Ω_t .

Tensor de Kirchhoff

Existen otras medidas de las tensiones. El tensor de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ es simétrico y también está referido a la configuración actual Ω_t , y se define por:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{D.58})$$

está relacionado con $\boldsymbol{\sigma}$ por el factor J , el determinante del gradiente de deformaciones.

Tensores de Piola-Kirchhoff

Relevante para la descripción lagrangiana es \mathbf{P} el *primer tensor de tensiones Piola-Kirchhoff*. A \mathbf{P} se le denomina también tensor de *tensiones nominales*, pues expresa las tensiones en el punto de interés por unidad de superficie en la configuración de referencia. Se relaciona con el tensor de Kirchhoff, denominado $\boldsymbol{\tau}$, mediante:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P}\mathbf{F}^T \quad (\text{D.59})$$

A diferencia del tensor de Cauchy, el primer tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} es no-simétrico. El *segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*, denominado \mathbf{S} , es simétrico y también está referido a la configuración de referencia, y se define por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} \quad (\text{D.60})$$

D.5 Operaciones de transporte Push-forward y Pull-back

Los operadores push-forward $\phi_*(\cdot)$ y pull-back $\phi^*(\cdot)$ relacionan los tensores espaciales con los tensores materiales. Estos operadores se aplican tanto a tensores de deformación como a tensores de tensión, la expresión concreta del operador depende en cada caso de la expresión del tensor. Ver figura D.2.

Para los tensores de deformaciones \mathbf{E} y \mathbf{e} vistos:

$$\mathbf{e} = \phi_*(\mathbf{E}) = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1} \quad (\text{D.61a})$$

$$\mathbf{E} = \phi^*(\mathbf{e}) = \mathbf{F}^T\mathbf{e}\mathbf{F} \quad (\text{D.61b})$$

Para los tensores de tensión vistos:

$$\boldsymbol{\tau} = \phi_*(\mathbf{S}) = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (\text{D.62a})$$

$$\mathbf{S} = \phi^*(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} \quad (\text{D.62b})$$

D.6 Objetividad y derivadas objetivas

Un principio básico de la mecánica exige que las respuestas del medio continuo en deformaciones y tensiones deben ser independientes del sistema de referencia empleado. Esta propiedad se denomina *objetividad*.

La descripción del movimiento $\mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathbf{t})$ está relacionada con otra descripción $\mathbf{x}^*(\mathbf{X}, \mathbf{t})$ por un cambio de sistema de referencia si:

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathbf{r}_t + \mathbf{Q}_t\mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathbf{t}) \quad (\text{D.63})$$

donde \mathbf{r}_t es un vector de posición y \mathbf{Q}_t una matriz de rotación ortogonal ($\mathbf{Q}_t\mathbf{Q}_t^T = \mathbf{I}$), ambos funciones del tiempo. La relación entre \mathbf{x} y \mathbf{x}^* puede interpretarse también como la superposición de un movimiento de sólido rígido sobre la configuración deformada \mathbf{x} . Un tensor espacial \mathbf{A} es objetivo si bajo una superposición de movimiento de sólido rígido se transforma según:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T \quad (\text{D.64})$$

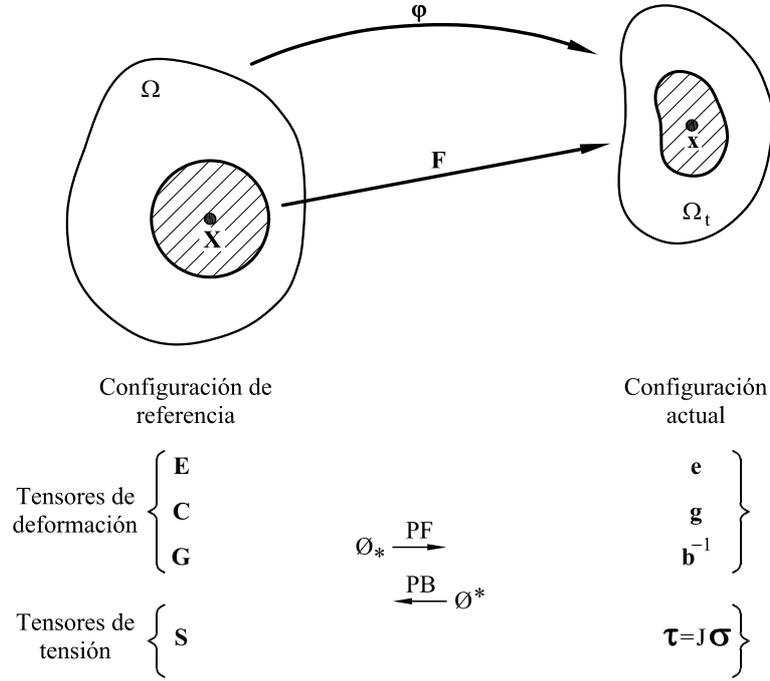


Figura D.2: Operaciones de transporte de tensores entre configuraciones: ϕ_* push-forward (PF) y ϕ^* pull-back (PB).

Se puede comprobar que el tensor velocidad de deformación \mathbf{d} es objetivo, pero que el tensor gradiente espacial de la velocidad \mathbf{l} y el tensor $\boldsymbol{\omega}$, su parte antisimétrica, no lo son.

Asimismo, la derivada temporal de un tensor espacial de deformación o tensión se calcula por medio de una derivada objetiva. La *derivada de Lie* es una derivada objetiva que se define mediante el operador:

$$\mathcal{L}_v(\cdot) = \phi_* \left(\frac{\partial \phi^*(\cdot)}{\partial t} \right) \quad (\text{D.65})$$

Es decir, la derivada objetiva de un tensor espacial se obtiene al derivar respecto al tiempo el pull-back correspondiente en la configuración de referencia y hacer posteriormente el push-forward del resultado.

Un resultado importante en las formulaciones es la derivada de Lie del tensor de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} [\partial_t \mathbf{S}] \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \partial_t [\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}] \mathbf{F}^T \quad (\text{D.66})$$

Aplicando en esta expresión que $\partial_t (\mathbf{F}^{-1}) = -\mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-T}$, a partir del resultado conocido para la derivada de la inversa de una matriz, se obtiene:

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - (\nabla \mathbf{v}) \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} (\nabla \mathbf{v})^T \quad (\text{D.67})$$

D.7 Ecuaciones del medio continuo

D.7.1 Introducción

En las secciones anteriores se han presentado, sin relacionarlos entre sí, los conceptos de movimiento, deformaciones, fuerzas y tensiones. Las ecuaciones de la mecánica del medio continuo son fundamentalmente de dos tipos. El primero es un conjunto de principios fundamentales de la física que gobiernan los fenómenos independientemente del tipo de material del medio, estas son las *ecuaciones de conservación-balance*. El otro tipo de ecuaciones es el que caracteriza el comportamiento particular de cada material, estas son las *ecuaciones constitutivas*.

D.7.2 Ecuaciones de conservación-balance

Las *ecuaciones de conservación-balance* son expresiones de una ley física, que generalmente establecen la conservación o el balance de una determinada cantidad física, tal como la masa, la cantidad de movimiento o la energía.

Conservación de la masa

Aplicado a un volumen espacial fijo V , denominado *volumen de control*, este principio establece que el incremento de masa en el tiempo es igual al flujo neto a través de la superficie ∂V

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{D.68})$$

donde ρ es la densidad del medio, \mathbf{v} es la velocidad de las partículas, \mathbf{n} es la normal exterior a la superficie $d\Gamma$. Aplicando el teorema de la divergencia y ya que el principio es válido en cualquier punto del volumen V (argumento de localización) se concluye que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{D.69})$$

Esta ecuación también se conoce como la *ecuación de continuidad*.

Balance de la cantidad de movimiento

Este principio establece que la suma de las fuerzas que actúan sobre un conjunto de partículas, denominado *sistema de partículas*, es igual a la variación por unidad de tiempo de su cantidad de movimiento. Este principio deriva de la *segunda ley de Newton* de la mecánica clásica, y se expresa como:

$$\mathbf{R} = \int_{\partial V} \mathbf{t} d\Gamma + \int_V \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV \quad (\text{D.70})$$

donde V se refiere a un volumen material (de configuración variable pero constituido siempre por el mismo conjunto de partículas), \mathbf{R} es la resultante de las fuerzas sobre el medio se han descompuesto en fuerzas de superficie y fuerzas másicas, ecuaciones (D.56) y (D.55) respectivamente. Reemplazando el vector de tracciones \mathbf{t} por su expresión en función del tensor de Cauchy, según la ecuación (D.57), y aplicando el teorema de la divergencia al término de superficie se obtiene:

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV \quad (\text{D.71})$$

Una serie de operaciones directas y el argumento usual de localización conducen a finalmente a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\text{D.72})$$

Esta ecuación también se conoce como *ecuación de Cauchy*. Por otro lado, el balance de cantidad de movimiento angular se traduce localmente en la condición de simetría del tensor de tensiones de Cauchy: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

Balance de energía

La *potencia mecánica* entrante en un sistema de partículas se define como la capacidad de desarrollar trabajo por unidad de tiempo:

$$P_e = \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV \quad (\text{D.73})$$

Después de algunas operaciones, que involucran la aplicación de la expresión de \mathbf{t} en función del tensor de Cauchy, el teorema de la divergencia y la ecuación de balance de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$P_e = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV \quad (\text{D.74})$$

Esta ecuación es la expresión del clásico *teorema de las fuerzas vivas*. Éste establece que la potencia mecánica entrante en el sistema P_e se invierte en aumentar la *energía cinética* (primer término de la derecha) y la *potencia tensional* (segundo término de la derecha). La potencia tensional también se denomina potencia de fuerzas interiores.

Por otro lado la *potencia calorífica* entrante en un sistema de partículas por unidad de tiempo es:

$$Q_e = \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{D.75})$$

donde r es el calor generado por fuentes internas por unidad de masa y tiempo y \mathbf{q} es el flujo de calor no convectivo.

Según el *primer principio de la termodinámica* la variación de la energía total de un sistema de partículas es igual a la suma de las potencias mecánica y calorífica entrantes al sistema:

$$\frac{dE}{dt} = P_e + Q_e \quad (\text{D.76})$$

donde E es la *energía total* del sistema, que tiene una componente de *energía cinética* K y una componente denominada *energía interna* U :

$$E = \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV}_K + \underbrace{\int_V \rho u dV}_U \quad (\text{D.77})$$

u es la energía interna por unidad de masa. De lo anterior se deduce que la variación de energía interna es producto de la potencia tensional y la potencia calorífica entrante. Siguiendo procedimientos similares a los anteriores, la forma local de la ecuación del balance de energía es:

$$\rho \frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + (\rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}) \quad (\text{D.78})$$

Esta ecuación se denomina también *ecuación de la energía*.

Segundo principio de la termodinámica

El segundo principio de la termodinámica, también denominado *segunda ley de la termodinámica* no establece un principio de conservación, sino mas bien una restricción que indica qué procesos de transformación de energía son posibles. Establece la existencia de una *función de estado (termodinámico)* S denominada *entropía*, que cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{D.79})$$

donde θ es la temperatura absoluta. Esta expresión indica que: la generación de entropía en un medio es mayor o igual que la cantidad de calor entrante por unidad de temperatura y por unidad de tiempo. La aplicación del teorema de la divergencia y el procedimiento de localización conducen a:

$$\rho \dot{s} \geq \rho \frac{r}{\theta} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \quad (\text{D.80})$$

Esta expresión se denomina *ecuación de Clausius-Duhem*.

Resulta útil dar a esta expresión la forma de ecuación y definir una variable termomecánica $\mathcal{D} \geq 0$ que se denomina *disipación*, de manera que:

$$\mathcal{D} = \rho \dot{s}\theta - \rho r + \theta \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \geq 0 \quad (\text{D.81})$$

Esta expresión resume la segunda ley de la termodinámica, y define que no son factibles procesos en los que $\mathcal{D} < 0$. Se denominan procesos *reversibles* o *ideales* aquellos en los que $\mathcal{D} = 0$, y procesos *irreversibles* aquellos en los que $\mathcal{D} > 0$. Desarrollando el tercer término de la derecha se puede expresar la disipación en función de dos contribuciones, la *disipación interna* y la *disipación por conducción de calor*. Una hipótesis adicional, y más restrictiva, sobre la disipación plantea que cada una de estas contribuciones es siempre positiva, es decir:

$$\mathcal{D}_{int} = \rho \dot{s}\theta - \rho r + \nabla \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (\text{D.82a})$$

$$\mathcal{D}_{cond} = -\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0 \quad (\text{D.82b})$$

La expresión (D.82a) se conoce como *ecuación de Clausius-Plank*. Tomando en cuenta la ecuación de la energía (D.78) se puede obtener una expresión de la ecuación de Clausius-Plank en términos de la energía interna y de la potencia tensional:

$$\mathcal{D}_{int} = -\rho (\dot{u} - \dot{s}\theta) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \quad (\text{D.83})$$

Una forma conveniente en la formulación de modelos constitutivos de la disipación interna se formula en base a la *energía libre de Helmholtz* ψ . Esta se define en función de la energía interna y la entropía como:

$$\psi = u - s\theta \quad (\text{D.84})$$

Reemplazando esta definición en (D.83) se obtiene finalmente:

$$\mathcal{D}_{int} = -\rho (\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \quad (\text{D.85})$$

D.8 Métodos Variacionales

La *forma diferencial* o *forma fuerte* del problema establece una condición local en cada punto del dominio mediante una ecuación diferencial. La solución exacta de estas ecuaciones en aplicaciones prácticas es, en general, imposible y se opta por buscar una solución aproximada mediante un método numérico. El procedimiento más empleado en el análisis de problemas de ingeniería es el *método de los elementos finitos*. En la base de este método está la *equivalencia* de las ecuaciones del problema

en formulación diferencial o fuerte con una formulación integral correspondiente. El procedimiento de solución de un problema por el método de elementos finitos consta de dos pasos fundamentales. El primero de ellos es el planteamiento del problema mediante un *método variacional* y obtener la *forma débil* equivalente, también denominada *forma variacional*. El segundo paso es la *discretización* mediante funciones de elementos finitos, con el fin de resolver la ecuación variacional en forma aproximada.

En vez de verificar en forma *local* (punto a punto) las ecuaciones del problema se exige el cumplimiento de éstas en forma *global* (en el dominio). La forma débil o variacional de un problema establece la condición global en el medio continuo en forma de una ecuación que se integra en todo el dominio. Ésta forma se puede obtener directamente a partir de la forma diferencial mediante el método de *residuos ponderados* o derivándola de un *funcional*; aunque no es imprescindible que exista un funcional asociado al problema para poder expresarlo en forma débil. En cualquier caso, siempre es necesario definir dos tipos de funciones para el planteamiento de la forma débil. Según el *método de Galerkin*, ambos se definen de forma básicamente similar, excepto por los valores que adoptan en el contorno, (Hughes, 1987), (Zienkiewicz and Taylor, 1994a), (Oñate, 1992), etc. Estas funciones son por un lado las candidatas a la solución, que se denominan *funciones de prueba*, y por otro lado las *funciones de ponderación*, que se denominan también como *variaciones*.

D.8.1 Residuos ponderados

De acuerdo con la notación estándar, la región del espacio ocupada por un cuerpo \mathcal{B} se designa por Ω , un dominio abierto en $\mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ (n_{dim} es el número de dimensiones del espacio); su clausura se denota por $\bar{\Omega}$ y su contorno Γ es tal que $\Gamma = \bar{\partial}_u \Omega \cup \bar{\partial}_t \Omega$ y $\partial_u \Omega \cap \partial_t \Omega = \emptyset$.

Por ejemplo, el problema mecánico es gobernado por la ecuación de equilibrio de Cauchy, y consiste en:

Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ tal que:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (\text{D.86a})$$

dadas las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ y las condiciones prescritas en el contorno, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las cargas externas $\bar{\mathbf{t}}$ en $\partial_t \Omega$, respectivamente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{en } \partial_u \Omega \quad (\text{D.87})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_t \Omega \quad (\text{D.88})$$

La condición en la variable \mathbf{u} se denomina condición de *Dirichlet* o *forzada*, pues se debe imponer directamente sobre la función de prueba. La condición sobre las

tracciones se denomina condición de *Neumann* o *natural*, pues como se verá quedará impuesta implícitamente al satisfacerse la ecuación variacional. Por otro lado, el modelo constitutivo del material será el que establezca una relación específica entre las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y las deformaciones, y con los desplazamientos \mathbf{u} mediante las relaciones cinemáticas. Esta es la forma diferencial o fuerte del problema.

El método de residuos ponderados consiste en plantear que deben ser nulas tanto la integral sobre todo el dominio Ω del residuo de la ecuación de equilibrio cuasi-estático $R = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}$, como la integral sobre el contorno $\partial_t \Omega$ del residuo de la condición en tracciones $(\bar{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$, esto es:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} : (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dV + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot (\bar{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{w} \quad (\text{D.89})$$

donde el conjunto de funciones de prueba \mathbf{u} se define de acuerdo con la condición de contorno en $\partial_u \Omega$, y el conjunto de funciones ponderación \mathbf{w} es similar al anterior salvo que en $\partial_u \Omega$ debe adoptar $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ (condición homogénea). Aplicando el teorema de la divergencia al primer término se plantea la relación:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} : \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{D.90})$$

y substituyendo en la expresión de residuos ponderados (D.89) se obtiene finalmente la expresión de la forma débil adecuada para la solución por elementos finitos:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} dV + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (\text{D.91})$$

El planteamiento del problema en forma débil consiste en:

Hallar el campo de desplazamientos \mathbf{u} , tal que se cumpla (D.91) y que $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ en $\partial_u \Omega$.

Se puede demostrar que la forma débil o variacional del problema es equivalente a la forma fuerte o diferencial. Como se puede observar la condición en tracciones $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ en $\partial_t \Omega$ no se menciona en el planteamiento del problema. Esta condición está implícita en la expresión (D.91), lo que justifica el nombre de condición natural. La condición en desplazamientos se debe imponer en la definición misma de la función de prueba \mathbf{u} , por esta razón se la denomina condición forzada. La expresión (D.91), obtenida por el método de los residuos ponderados, es conocida también como el *principio de los trabajos virtuales*.

Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales es una forma débil de las ecuaciones de equilibrio. Expresa la equivalencia de las fuerzas internas y externas a través de la

igualdad del trabajo que cada una de éstas desarrollaría al imponerse un *desplazamiento virtual* $\delta \mathbf{u}$ o variación de desplazamiento, compatible con las condiciones de contorno. De acuerdo con esto la ecuación (D.91) se interpreta físicamente como la igualdad de trabajos virtuales de las fuerzas internas y las externas:

$$\int_{\Omega} \nabla^s (\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV + \int_{\partial_t \Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (\text{D.92})$$

Como se puede observar, las funciones de ponderación en el principio de los trabajos virtuales tienen la interpretación de desplazamientos virtuales o variaciones de desplazamientos, es decir $\mathbf{w} = \delta \mathbf{u}$. Estas variaciones de desplazamientos deben ser compatibles con las condiciones de contorno prescritas, es decir deben ser cinemáticamente admisibles, en $\partial_u \Omega$ por lo tanto $\delta \mathbf{u} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

El principio de los trabajos virtuales es de aplicación completamente general, se cumple independientemente del tipo de material y del rango de las deformaciones, es decir es válido tanto en deformaciones infinitesimales como en grandes deformaciones.

D.8.2 Funcionales y principios variacionales

Como se ha mencionado antes, en una diversidad de problemas es posible obtener la forma débil correspondiente a partir un *funcional*. Este funcional es una función de funciones en forma de integral, y especifica una cantidad escalar. Es decir, una aplicación Π en la forma de una integral tal que $\Pi(\mathbf{u}) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, donde \mathbf{u} es una función en el espacio \mathcal{V} . Muchos principios físicos pueden expresarse mediante principios variacionales, denominados *naturales*. En estos casos, la solución de un problema en el medio continuo está asociada a un punto crítico o de *estacionariedad* de un funcional $\Pi(\mathbf{u})$. Esto es, la solución para el problema del continuo es una función \mathbf{u} que hace que el funcional $\Pi(\mathbf{u})$ sea estacionario respecto a *variaciones* pequeñas de \mathbf{u} , denominadas $\delta \mathbf{u}$. Por lo tanto, la variación del funcional en torno a la solución \mathbf{u} es nula, es decir $\delta \Pi(\mathbf{u}) = 0$. Esta condición es la que da lugar a la expresión en forma débil o variacional de un problema y la que conduce a su solución. La variación del funcional $\Pi(\mathbf{u})$ se evalúa mediante la *derivada de Gateaux* o *derivada direccional*. Si se considera una perturbación de la función \mathbf{u} de la forma $\mathbf{u} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}$, donde $\boldsymbol{\eta}$ se interpreta como una dirección de perturbación, la derivada de Gateaux en dirección $\boldsymbol{\eta}$ o derivada direccional se evalúa como:

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) = \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \boldsymbol{\eta})|_{\varepsilon=0} \quad (\text{D.93})$$

la dirección de la perturbación se define justamente como $\delta \mathbf{u}$.

El cálculo de variaciones de funcionales es una herramienta que se puede utilizar en muchos casos como alternativa para la obtención de las formas débiles necesarias para el planteamiento de problemas por el método de los elementos finitos.

Funcional de Hu-Washizu

Un principio variacional que da lugar a varias formulaciones de elementos en mecánica de sólidos es el principio de Hu-Washizu. El punto de partida es un funcional de 3 campos; estos campos son un campo de deformaciones y uno de tensiones, además del campo de desplazamientos. En deformaciones infinitesimales la expresión del funcional de Hu-Washizu se puede escribir como:

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) : = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \mathbf{u}) dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (\text{D.94})$$

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) : = - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (\text{D.95})$$

en el que las variables $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}\}$ se consideran como variables independientes.

En grandes deformaciones se define el funcional $\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$:

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{P}) & : = \int_{\Omega} \left[\hat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \mathbf{P} : (\text{GRAD}[\mathbf{u}] - \mathbf{F}) \right] dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \\ \Pi_{ext}(\mathbf{u}) & : = - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{D.96})$$

donde \hat{W} es la función de energía de deformación. A partir del principio variacional de Hu-Washizu se establecen diversas formulaciones mixtas de elementos, como por ejemplo la formulación de deformaciones mejoradas *EAS*, que se presenta en forma breve en el anexo C.

Capítulo 3

Formulación mixta y métodos de estabilización

3.1 Introducción

La resolución de un problema de mecánica de sólidos deformables por el método de los elementos finitos tiene como punto de partida el planteamiento del modelo constitutivo y el de la forma débil o forma variacional de las ecuaciones del problema. Luego, la discretización del medio continuo en subdominios o *elementos* conduce al sistema algebraico, que se debe resolver de acuerdo con la ecuación constitutiva en forma local. La definición de los elementos comprende el conjunto de grados de libertad y los espacios polinómicos de interpolación sobre el subdominio. Desde este punto de vista, los *elementos mixtos* son el resultado natural de las aproximaciones por elementos finitos de las *formulaciones variacionales mixtas*. El uso de formulaciones mixtas es indicado en una serie de aplicaciones en las que el método estándar irreducible en desplazamientos no es conveniente, o simplemente no es posible obtener una formulación irreducible que ofrezca buenos resultados. Las formulaciones mixtas se aplican principalmente en los siguientes casos:

- Problemas gobernados por ecuaciones diferenciales de alto orden. Este es el caso de problemas de flexión de placas, por ejemplo. La presencia de derivadas de alto orden en la formulación irreducible implicaría para su aplicación elementos de mayor grado de continuidad. Se reemplaza la formulación irreducible por otra mixta, de menor grado. Para esto, se definen como variables independientes algunas de las que en la formulación irreducible serían derivadas de la variable primaria. Se puede optar así por campos de interpolación de continuidad C_0 , más sencillos de formular.

- Problemas con restricciones internas. Para evitar la verificación explícita de una restricción sobre un campo se introduce un campo adicional. Este es el caso de la incompresibilidad sobre el campo de desplazamientos.

Las ventajas que ofrecen las formulaciones mixtas se logran, sin embargo, dentro de ciertas limitaciones. Los campos de interpolación deben cumplir ciertas condiciones de compatibilidad entre sí, como expresa la *condición de estabilidad de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi, o LBB*; de lo contrario no se podrá esperar resultados con sentido físico de estos elementos. El criterio de estabilidad deja al margen de la aplicabilidad ciertas combinaciones de los campos de interpolación. Por ejemplo las interpolaciones \mathbf{u}/p de iguales grados polinómicos que desde el punto de vista computacional resultarían convenientes, en particular la lineal/lineal. Los métodos de estabilización tienen por objetivo eludir el requisito de compatibilidad entre los campos de interpolaciones en formulaciones mixtas. Gracias a los métodos de estabilización se logra que estos elementos, con combinaciones de interpolaciones que en principio serían descartadas, ofrezcan un comportamiento estable.

Con la finalidad de mostrar la necesidad de las formulaciones mixtas en el problema de incompresibilidad se presentará como modelo el problema elástico en pequeñas deformaciones. A continuación se planteará la aplicación de formulaciones mixtas como alternativa a la formulación irreducible y se mostrará la conveniencia de complementarlas con las técnicas de estabilización. En la formulación de los elementos propuestos en este trabajo se empleará el método de estabilización de las sub-escalas. Este método será ubicado en el contexto del desarrollo de las técnicas de estabilización y será presentado al final del capítulo, destacándose su importancia como marco teórico general para diversas formulaciones de elementos estabilizados.

3.2 Formulación irreducible y problema de incompresibilidad

El problema elástico se planteará siguiendo la notación habitual empleada en el capítulo 3. La región del espacio ocupada por un cuerpo \mathcal{B} se designa por Ω , un dominio abierto en $\mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ y $\bar{\Omega}$ su clausura, n_{dim} es el número de dimensiones del espacio, su contorno Γ es tal que $\Gamma = \overline{\partial_u \Omega} \cup \overline{\partial_t \Omega}$ y $\partial_u \Omega \cap \partial_t \Omega = \emptyset$.

3.2.1 Modelo constitutivo

El comportamiento elástico lineal isótropo se caracteriza mediante la relación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \nabla^s \mathbf{u} \ , \quad \text{con: } c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.1a)$$

es decir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{1} + 2\mu \nabla^s \mathbf{u} \quad (3.2)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, \mathbf{u} el vector de desplazamientos, $[\nabla^s \mathbf{u}] = u_{(i,j)}$ representa el gradiente simétrico de los desplazamientos y \mathbf{c} es el tensor constitutivo elástico. Los *parámetros de Lamé* λ y μ caracterizan el comportamiento del material.

En la práctica ingenieril para identificar un material se emplean otros parámetros y una terminología propia correspondiente. Por ejemplo, el parámetro μ se denomina *módulo de cizallamiento* y se denota como G . De igual manera, naturalmente, dos parámetros bastan para la caracterización de un material, normalmente estos son el *módulo de elasticidad* E y el *coeficiente de Poisson* ν . Las relaciones entre estas propiedades y los parámetros de Lamé son:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.3a)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.3b)$$

3.2.2 Formulación en el continuo

Forma fuerte

Las ecuaciones que definen el problema en forma fuerte son la ecuación de equilibrio en forma local y las condiciones de contorno, junto con la ecuación constitutiva correspondiente. El problema elástico lineal se expresa como:

Dados los valores prescritos de las cargas externas $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, tal que:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (3.3da)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_u \Omega \quad (3.3db)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_t \Omega \quad (3.3dc)$$

donde las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ vienen dadas en términos de \mathbf{u} por la relación constitutiva (3.2).

Sin pérdida de generalidad se puede suponer, tal como se ha hecho aquí, condiciones homogéneas en los desplazamientos prescritos.

Forma débil

La forma débil se puede obtener directamente a partir de las ecuaciones de la forma fuerte. Para plantearla es necesario definir previamente ciertas características de los espacios de funciones en que se buscará la solución. Estas definiciones describen la suavidad de las funciones, mediante requisitos relacionados con la continuidad y la diferenciabilidad.

El espacio de funciones cuyo cuadrado es integrable en Ω es $L^2(\Omega)$. $H^1(\Omega)$ es el espacio de funciones cuyas primeras derivadas pertenecen a $L^2(\Omega)$. Formalmente esto se escribe:

$$L^2(\Omega) = \left\{ w \mid \int_{\Omega} w^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (3.5a)$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial w}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, n_{\text{dim}} \right\} \quad (3.5b)$$

es decir, el espacio $L^2(\Omega)$ contiene funciones acotadas definidas en Ω . Caben en $L^2(\Omega)$ inclusive funciones discontinuas. $H^1(\Omega)$ contiene funciones continuas cuyas derivadas pertenecen a $L^2(\Omega)$. $H^1(\Omega)$ es un subespacio del espacio de las funciones continuas $C^0(\Omega)$, es decir, $H^1(\Omega) \subset C^0(\Omega)$. Los espacios vectoriales correspondientes se denotarán en letra negrita.

Para simplificar la notación en las expresiones integrales el producto interno L^2 en Ω se denotará como $(\cdot, \cdot) := \int_{\Omega} (\cdot) (\cdot) d\Omega$ y como $(\cdot, \cdot)_{\Gamma} := \int_{\partial\Omega} (\cdot) (\cdot) d\Gamma$ al producto interno L^2 en Γ .

Con estas consideraciones el problema elástico se expresa como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u\Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, tal que

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} dV + \int_{\partial_t\Omega} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 \quad (3.5f)$$

donde las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ vienen dadas en función de \mathbf{u} por la relación constitutiva (3.2), concretamente en función de $\nabla^s \mathbf{u}$.

\mathcal{V}_0 es el espacio de las funciones de ponderación o de las variaciones de desplazamientos admisibles, es decir, aquellas variaciones que pueden ser superpuestas de acuerdo con la condición de contorno en $\partial_u\Omega$:

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ en } \partial_u\Omega \right\} \quad (3.7)$$

Los requisitos de continuidad se desprenden de manera natural de la forma débil. Éstos se exigen de modo que las integrales involucradas tengan sentido. En este caso,

para describir los desplazamientos y sus variaciones requerimos funciones continuas y que tengan primeras derivadas definidas en Ω .

La expresión abstracta de la forma débil (3.5f) es:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}) \quad , \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 \quad (3.8)$$

donde:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \mathbf{c} : \nabla^s \mathbf{u} \, dV \quad (3.9a)$$

$$l(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = \langle \mathbf{w}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{w}, \bar{\mathbf{t}} \rangle_{\Gamma_t} \quad (3.9b)$$

$a(\cdot, \cdot)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ son formas bilineales simétricas. La ecuación (3.8) representa el equilibrio de las fuerzas internas y las fuerzas externas a nivel global en el dominio Ω . Estas fuerzas están representadas por los términos izquierdo y derecho de esta ecuación, respectivamente.

La práctica común en ingeniería es emplear para estas expresiones la notación matriz-vector, (Simo and Huges, 1998). De acuerdo con ésta, por ejemplo,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, dV \quad (3.10)$$

En esta expresión $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot) = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}]^T$ es el vector correspondiente al tensor $\nabla^s(\cdot)$, mediante el cual se representan las deformaciones infinitesimales y \mathbf{D} es el arreglo matricial correspondiente al tensor constitutivo \mathbf{c} .

3.2.3 Discretización por elementos finitos

El planteamiento del problema por elementos finitos es canónico (Hughes, 1987), (Zienkiewicz and Taylor, 1994a), (Johnson, 1987), (Oñate, 1992). Básicamente implica definir una partición regular $\{\Omega^e\}$ en n_{elm} subdominios de Ω y un espacio de aproximación de dimensión finita asociado a ésta. El diámetro o dimensión característica de la partición $\{\Omega^e\}$ se denota usualmente como h . El espacio de funciones de aproximación $\mathcal{V}_{0,h} \subset \mathcal{V}_0$ se define como:

$$\mathcal{V}_{0,h} = \{ \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_0 \mid \mathbf{w}_h \in \mathbf{C}^0(\Omega) \text{ y } \mathbf{w}_h|_{\Omega^e} \in P_k(\Omega^e) \text{ , } e = 1, \dots, n_{elm} \} \quad (3.11)$$

donde $P_k(\Omega^e)$ representa el espacio de polinomios completos de orden k asociados al subdominio Ω^e .

En base a estos polinomios se define la aproximación mediante una interpolación nodal. De acuerdo al método de Galerkin se emplean, tanto para las funciones de

ponderación como para los desplazamientos, las mismas funciones de interpolación en cada nodo:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}^A \mathbf{N}^B \dots \mathbf{N}^{n_{nod}}] , \quad \mathbf{N}^A = N^A \mathbf{I}_{n_{\text{dim}}} , \quad A = 1, \dots, n_{nod} \quad (3.12)$$

donde N^A es la función de interpolación del nodo A , n_{nod} es el número de nodos del elemento e $\mathbf{I}_{n_{\text{dim}}}$ es la matriz identidad en n_{dim} dimensiones. Las aproximaciones a las funciones de ponderación y al campo de desplazamientos dentro de cada elemento Ω^e resultan:

$$\mathbf{w}_h|_{\Omega^e} = \mathbf{N}\mathbf{w}^{(e)} , \quad \mathbf{u}_h|_{\Omega^e} = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)} \quad (3.13)$$

donde

$$\mathbf{w}^{(e)} = [\mathbf{w}^A \mathbf{w}^B \dots \mathbf{w}^{n_{nod}}] , \quad \mathbf{u}^{(e)} = [\mathbf{u}^A \mathbf{u}^B \dots \mathbf{u}^{n_{nod}}]^T \quad (3.14)$$

son los arreglos que contienen los vectores de variaciones y de desplazamientos de los nodos de cada elemento, $\mathbf{w}^A = \{w_1^A \dots w_{n_{\text{dim}}}^A\}^T$ y $\mathbf{u}^A = \{u_1^A \dots u_{n_{\text{dim}}}^A\}^T$.

Los vectores de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ y de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ dentro del elemento se expresan en función de los desplazamientos $\mathbf{u}^{(e)}$ como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|_{\Omega^e} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)} , \quad \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega^e} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{u}^{(e)} \quad (3.15)$$

donde

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_A \mathbf{B}_B \dots \mathbf{B}_{n_{nod}}] \quad (3.16)$$

es el operador de deformaciones discretizadas del elemento, que contiene los operadores correspondientes a cada nodo \mathbf{B}_A , tal como se definen típicamente, por ejemplo para $n_{\text{dim}} = 3$:

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} N^A_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & N^A_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & N^A_{,z} \\ N^A_{,y} & N^A_{,x} & 0 \\ 0 & N^A_{,z} & N^A_{,y} \\ N^A_{,z} & 0 & N^A_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

El procedimiento convencional para plantear las ecuaciones de equilibrio global del sistema discretizado implica el cálculo en cada subdominio y el ensamblaje de las contribuciones de cada elemento. De acuerdo con las interpolaciones (3.13) y (3.15), las contribuciones de un elemento Ω^e correspondientes a los términos de fuerzas internas (3.10) y de fuerzas externas son:

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)|_{\Omega^e} = \mathbf{w}^{(e)T} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right]^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.18a)$$

$$l(\mathbf{w}_h)|_{\Omega^e} = \mathbf{w}^{(e)T} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right]^{(e)} \quad (3.18b)$$

De esta manera, el problema expresado en forma débil se llega a reducir a un problema algebraico, que finalmente se puede expresar como:

Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_{0,h}$, tal que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h) \quad , \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_0 \quad (3.19)$$

Expresión matricial

La expresión correspondiente al problema discretizado (3.19) es:

Hallar \mathbf{U} tal que:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{f} \quad (3.20)$$

donde \mathbf{U} es el arreglo vectorial de los desplazamientos, \mathbf{K} es la matriz de rigidez global del sistema y \mathbf{f} el vector de fuerzas externas equivalentes, que respectivamente son:

$$\mathbf{K} = \mathbb{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{K}]^{(e)} \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{f} = \mathbb{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}]^{(e)} \quad (3.21b)$$

donde $\mathbb{A}_{e=1}^{n_{elm}}$ denota la operación de ensamblaje de elementos finitos, consistente en sumar las contribuciones de cada elemento en la posición apropiada en la matriz o vector global del sistema. Las submatrices típicas de $[\mathbf{K}]^{(e)}$ y $[\mathbf{f}]$ son:

$$[\mathbf{K}^{AB}]^{(e)} = \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_A^T \mathbf{D} \mathbf{B}_B d\Omega \right]^{(e)} \quad (3.22a)$$

$$[\mathbf{f}]^{(e)} = \left[\int_{\Omega^e} [\mathbf{N}^A]^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} [\mathbf{N}^A]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right]^{(e)} \quad (3.22b)$$

Este es el planteamiento general por el método de los elementos finitos del problema elástico. El método ofrece muy buenos resultados en general. Sin embargo, como se ha anticipado, no ocurre así en problemas con restricciones internas, tales como la de incompresibilidad del medio.

3.2.4 Inviabilidad de la formulación para el problema de incompresibilidad

La condición de incompresibilidad en el caso elástico lineal se puede expresar en términos del coeficiente de Poisson ν . La resistencia al cambio de volumen de un material es tanto mayor en la medida en que el valor de su coeficiente de Poisson

es más cercano a 0,5. A su vez, el parámetro de Lamé $\lambda \rightarrow \infty$, tal como se puede observar en la expresión (3.3a). La incompresibilidad se alcanza en el límite cuando $\nu = 0,5$. En este caso la deformación volumétrica debe ser nula localmente,

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{kk} = u_{k,k} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.23)$$

es decir, el campo de deformaciones debe tener divergencia nula. A los campos con esta característica se les denomina solenoidales.

En el contexto de una solución por elementos finitos, sin embargo, dada una interpolación es prácticamente imposible obtener un campo de desplazamientos solenoidal en forma local. La dificultad numérica que esto trae consigo se puede apreciar insertando la expresión del modelo constitutivo (3.2) en (3.19)

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w}_h : (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}_h \mathbf{1} + 2\mu \nabla^s \mathbf{u}_h) dV = l(\mathbf{w}_h) , \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (3.24)$$

Como se puede apreciar, ya que el parámetro $\lambda \rightarrow \infty$ no está acotado, el término asociado a la deformación volumétrica tiene una dominancia espuria y los resultados son extremadamente sensibles a su valor numérico. Éste se determina a partir del cálculo de las derivadas de los desplazamientos, cuya precisión es inferior a la de los desplazamientos mismos. Este término representa la energía de deformación asociada al cambio de volumen, que debería resultar nula. El error que se comete en la deformación volumétrica se amplifica en las tensiones. La determinación de la componente de la tensión relacionada con la deformación volumétrica, denominada tensión media, se hace imprecisa y resulta sobrestimada. Esto a su vez repercute en la estimación de los desplazamientos; la formulación al no poder representar un campo de deformaciones realista con $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0$, tiende al bloqueo. El problema se manifiesta no sólo en el límite de incompresibilidad, sino también al considerarse situaciones cuasi-incompresibles, es decir, con valores de ν cercanos a 0,5.

Otra formulación irreducible alternativa para el problema de incompresibilidad consiste en buscar la solución en un espacio de tipo solenoidal. Para esto el espacio de aproximación se debe construir imponiendo explícitamente esta condición:

$$\mathcal{J}_h \subset \mathcal{J} = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ en } \partial_u \Omega , \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \} \quad (3.25)$$

Aunque este método ofrece ciertas ventajas que lo hacen atractivo en problemas bidimensionales, en problemas tridimensionales la complejidad y el costo computacional restringen su aplicabilidad.

3.3 Una formulación mixta para el problema de incompresibilidad: problema de Stokes

Con la finalidad de mostrar las posibilidades y limitaciones de las formulaciones mixtas se planteará como ejemplo una formulación específica para el caso elástico incompresible. En la formulación mixta, se interpola además de los desplazamientos, independientemente algún campo adicional, típicamente un campo de tensiones. En efecto, para este caso se introducen una incógnita y una ecuación adicional, ambas relacionadas con el término volumétrico de la deformación.

3.3.1 Modelo constitutivo

La introducción de la variable adicional equivale en este caso a la modificación de la expresión constitutiva (3.2): $\boldsymbol{\sigma} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{1} + 2\mu \nabla^s \mathbf{u}$, y adoptar en su lugar

$$\boldsymbol{\sigma} = p \mathbf{1} + 2\mu \nabla^s \mathbf{u} \quad (3.26)$$

donde p se suele denominar presión. Ésta variable adicional se debe determinar como una incógnita más de la solución.

3.3.2 Formulación en el continuo

La ecuación adicional necesaria para resolver esta incógnita es:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.27)$$

denominada condición cinemática de incompresibilidad. El problema modificado se plantea como sigue:

Forma fuerte

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas máscas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ y el campo de presiones $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tales que

$$\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \nabla^s \mathbf{u}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (3.28a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.28b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_u \Omega \quad (3.28c)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_t \Omega \quad (3.28d)$$

donde las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ vienen dadas ahora en función de \mathbf{u} y p por la relación constitutiva (3.26).

Forma débil

La obtención de la forma débil se puede hacer de manera similar a la de la elasticidad compresible, salvo que ahora se debe definir un espacio de funciones para las presiones y sus variaciones o funciones de ponderación.

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ y el campo de presiones $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tales que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : (p\mathbf{1} + 2\mu \nabla^s \mathbf{u}) \, dV &= l(\mathbf{w}) \, , & \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \, , & \forall q \in \mathcal{Q} \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde $l(\mathbf{w})$ es el término de fuerzas externas, tal como se definió antes.

De acuerdo con los requisitos de integrabilidad de estas expresiones, el espacio de funciones para los desplazamientos y sus variaciones es \mathcal{V}_0 :

$$\mathcal{V}_0 = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ en } \partial_u \Omega \} \quad (3.30)$$

mientras que el espacio de funciones para las presiones y sus variaciones es:

$$\mathcal{Q} = L^2(\Omega) \quad (3.31)$$

es decir que las presiones pueden ser incluso discontinuas entre elementos. (Obsérvese que en las expresiones (3.28) aparecen sólo las funciones primitivas de p y q , y no sus derivadas).

La expresión abstracta de la forma débil (3.28) es:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(p, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}) \, , \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 \quad (3.32a)$$

$$b(q, \mathbf{u}) = 0 \, , \quad \forall p \in \mathcal{Q} \quad (3.32b)$$

donde:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 2\mu \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \nabla^s \mathbf{u} \, dV \quad (3.33a)$$

$$b(p, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dV \quad (3.33b)$$

$$b(q, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV \quad (3.33c)$$

$$l(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{b}) + (\mathbf{w}, \bar{\mathbf{t}})_{\Gamma_t} \quad (3.33d)$$

En la formulación mixta se puede considerar que la restricción de incompresibilidad se incorpora en forma débil mediante la variable p , que actúa como multiplicador de Lagrange. Estas ecuaciones de gobierno son idénticas a las expresiones correspondientes al problema de Stokes en mecánica de fluidos. Aunque éste se refiere a un fenómeno diferente, un problema de flujo viscoso e incompresible, desde el punto de vista de las expresiones sólo cambia la interpretación de las variables respecto de las del problema elástico lineal. En efecto, en el problema de Stokes \mathbf{u} es la velocidad y μ es la viscosidad dinámica del fluido.

3.3.3 Discretización

Tal como se planteara para el problema elástico general se define el espacio de aproximación de los desplazamientos $\mathcal{V}_{0,h} \subset \mathcal{V}_0$. Además se debe definir el espacio para la aproximación de la presión $\mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q}$. Ya que las presiones pueden ser incluso discontinuas, para definir la interpolación de la presión hay una gama de posibilidades más amplia que la correspondiente a los desplazamientos.

En general las interpolaciones de la presión y de su variación se pueden expresar como:

$$p_h|_{\Omega^e} = \mathbf{N}_p \mathbf{p}^{(e)} \quad (3.34)$$

donde

$$\mathbf{p}^{(e)} = [p^A \ p^B \ \dots \ p^{n_{\text{nop}}}]^T \quad (3.35a)$$

$$\mathbf{N}_p = [N_p^A \ N_p^B \ \dots \ N_p^{n_{\text{nop}}}] \quad (3.35b)$$

n_{nop} es el número de nodos de presión, $\mathbf{p}^{(e)}$ y \mathbf{N}_p son los arreglos de presiones nodales y de funciones de interpolación de la presión, respectivamente. La variación de presión, o lo que es lo mismo, la función de ponderación correspondiente a la presión, se interpola de manera similar a p_h .

La expresión abstracta de la forma débil discretizada es:

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + b(p_h, \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (3.36a)$$

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) = 0, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h \quad (3.36b)$$

donde las contribuciones de un elemento Ω_e a los términos (3.36b) y (3.36c) son respectivamente:

$$b(p_h, \mathbf{w}_h)|_{\Omega^e} = \mathbf{w}^{(e)T} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{1} \mathbf{N}_p d\Omega \right]^{(e)} \mathbf{p}^{(e)} \quad (3.37a)$$

$$b(q_h, \mathbf{u}_h)|_{\Omega^e} = \mathbf{q}^{(e)T} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_p^T \mathbf{1}^T \mathbf{B} d\Omega \right]^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.37b)$$

donde $\mathbf{1}$ es el vector unidad, $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$

3.3.4 Expresión matricial

La expresión matricial del problema algebraico se puede escribir como:

Hallar \mathbf{U} y \mathbf{P} , tales que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

es decir:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{G}\mathbf{P} = \mathbf{f} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

donde \mathbf{P} es el arreglo de presiones nodales, \mathbf{U} , \mathbf{f} y \mathbf{K} se definen igual que antes. \mathbf{G} es una matriz que se puede interpretar como el operador gradiente que se aplica al vector de presiones y \mathbf{G}^T como el operador divergencia que se aplica al vector de desplazamientos.

En efecto, la ecuación (3.37), $\mathbf{G}^T\mathbf{U} = \mathbf{0}$, representa en forma discretizada la condición cinemática de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Las submatrices típicas de \mathbf{G} a nivel de elemento tienen la forma:

$$[\mathbf{G}^{AB}]^{(e)} = \left[\int_{\Omega^e} [\mathbf{b}_A] N_p^B d\Omega \right]^{(e)}, \quad \text{donde } [\mathbf{b}_A] = [N_{,1}^A \dots N_{,n_{\text{dim}}}^A]^T \quad (3.41)$$

Esta formulación no se aplica en la práctica de la manera como se ha presentado debido a que el sistema algebraico presenta ceros en la diagonal, lo que complica la solución del sistema mediante algoritmos directos, y como se ve en la próxima sección presenta problemas de estabilidad numérica. Una alternativa para evitar esta dificultad es la *forma penalizada*. Sin embargo, las limitaciones propias de las formulaciones mixtas que se quieren mostrar a continuación son comunes a ambos planteamientos, razón por la cual es suficiente para tal fin tomar como base la formulación descrita hasta aquí.

3.4 Limitaciones de las formulaciones mixtas

3.4.1 Introducción

La formulación mixta permite evaluar la presión (la componente media de las tensiones) como una variable primaria, independiente de los desplazamientos, y aplicar la restricción de incompresibilidad del medio en forma débil. Esta flexibilidad adicional respecto a las formulaciones irreducibles no es ilimitada. Existen restricciones en la

compatibilidad de los campos de interpolación que se emplean en la formulación, fuera de las cuales no cabe esperar buen comportamiento de las formulaciones mixtas. El objetivo de esta sección es presentar brevemente algunos resultados importantes del análisis matemático de convergencia y estabilidad, de modo que permitan reconocer la existencia de tales limitaciones y las dificultades que representan en la aplicación de los elementos mixtos.

Previamente es necesario introducir algunos conceptos básicos. Los conceptos básicos que se manejan en el análisis del método son tres. Por un lado la *convergencia* evalúa la medida del error $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ entre la solución exacta y la solución discretizada del problema. La *aproximabilidad* de un espacio \mathcal{V}_h a una función \mathbf{u} mide qué tan buena puede ser la mejor aproximación a esta función mediante elementos \mathbf{v}_h de ese espacio. La aproximabilidad es una característica del espacio dada una determinada función; es, por lo tanto, independiente del problema y de la solución del método. Una buena aproximabilidad no garantiza una buena convergencia; sin embargo, si limita qué tan buena puede ser.

Para medir las magnitudes de los elementos de un espacio \mathcal{V} es necesario definir una *norma*, que se denota como $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$. Los espacios tienen una norma natural asociada a sus productos internos; por ejemplo, las normas y los productos internos en L_2 y H_1 son, respectivamente:

$$\text{en } L_2 : \quad \|w\|_0 = (w, w) , \quad (u, w) = \int_{\Omega} u w d\Omega \quad (3.42)$$

$$\text{en } H_1 : \quad \|w\|_1 = (w, w)_1 , \quad (u, w)_1 = (u, w) + (\nabla u, \nabla w) \quad (3.43)$$

A continuación se presentarán primero algunas propiedades de la solución irreducible. Luego se podrán mostrar de manera más clara las condiciones particulares sobre las formulaciones mixtas en los apartados 3.4.3 y 3.4.4 siguientes.

3.4.2 Propiedades de la solución de la formulación irreducible

El buen comportamiento de la formulación irreducible del método de elementos finitos, presentada en la sección 3.2, es un hecho corroborado en la práctica en diversas aplicaciones. El análisis matemático del método ofrece garantías de exactitud de la aproximación y convergencia bajo ciertas hipótesis.

La forma abstracta de la formulación irreducible del problema en forma débil es (3.8):

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}) , \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0$$

la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ define una norma equivalente a $\|w\|_1$, es decir:

$$c_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}}^2 \leq a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \leq c_2 \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}}^2 \quad (3.44)$$

$a(\cdot, \cdot)$ se conoce como *norma energética* y se puede utilizar más fácilmente que $\|\cdot\|_{H_1}$ como medida en el espacio H_1 en el contexto de este problema. Esto es una consecuencia de dos propiedades de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$, la *continuidad*, que se define como:

$$\exists N_a > 0 \mid \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}, a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq N_a \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}} \quad (3.45)$$

y la *coercividad*, definida como:

$$\exists K_a > 0 \mid \forall \mathbf{w}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}, a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq K_a \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}}^2 \quad (3.46)$$

Bajo estas condiciones el *lema de Lax-Milgram* asegura que el problema tiene solución única.

La formulación discretizada del problema se expresa mediante la ecuación (3.19):

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (3.47)$$

El problema discretizado hereda las propiedades de continuidad y coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ y tiene solución única. En espacios de dimensión finita, como es el caso del espacio de elementos finitos \mathcal{V}_h , la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ tiene una interpretación en términos de la matriz asociada \mathbf{K} . Que $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva es tanto como decir que \mathbf{K} es definida positiva (todos los valores propios de \mathbf{K} son diferentes de cero y positivos), y decir que $K_a > 0$ es exigir que el número de condicionamiento de \mathbf{K} sea acotado.

Se puede mostrar que la respuesta en desplazamientos está acotada en función de los datos del problema. Sin perjuicio del carácter general de los resultados que se quieren mostrar más adelante, se supondrá que la forma lineal es de tipo $l(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle$ y se definirá la siguiente norma para \mathbf{b} :

$$\|\mathbf{b}\|_* = \sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{V}} \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{V}}} \quad (3.48)$$

que se denomina *norma dual* (se excluye el caso en que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$). Con esta definición y haciendo $\mathbf{w}_h = \mathbf{u}_h$ en las ecuación del problema (3.8), se obtiene:

$$K_a \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}}^2 \leq a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = l(\mathbf{u}_h) \leq \|\mathbf{b}\|_* \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}} \quad (3.49)$$

donde para fijar la cota inferior se ha invocado la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ y para la superior la definición de la norma de $\|\mathbf{b}\|_*$. Se concluye entonces que:

$$\|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\|\mathbf{b}\|_*}{K_a} \quad (3.50)$$

Por tanto, los desplazamientos están acotados en función de los datos del problema en función de la constante de coercividad K_a que, como se ha dicho antes, en un

problema de dimensión finita ésta está relacionada con el condicionamiento de la matriz \mathbf{K} asociada a $a(\cdot, \cdot)$.

Más aún, otro resultado importante conocido como el *lema de Céa* asegura que el error de la solución es del orden de la mejor aproximación del espacio de elementos finitos, es decir:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{N_a}{K_a} \min_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{V}} \quad (3.51)$$

donde $\min_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{V}}$ es la aproximabilidad respecto a \mathbf{u} del espacio \mathcal{V}_h , que es independiente del problema. En otras palabras, el problema se reduce simplemente a una cuestión de aproximabilidad del espacio \mathcal{V}_h .

Un resultado básico de la teoría de interpolación permite establecer para este problema, en función del orden del polinomio de interpolación k , el siguiente estimador de error:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq \left(c \frac{N_a}{K_a} \right) h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1} \quad (3.52)$$

Considerando que la solución del problema continuo es suficientemente regular de manera que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{k+1}$. En un proceso de cálculo mediante una sucesión de mallas cada vez más finas, caracterizadas por el diámetro h , se dice que hay *convergencia* si:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}} \rightarrow 0, \quad \text{a medida que } h \rightarrow 0 \quad (3.53)$$

El *orden de convergencia* es el exponente de h en la expresión (3.52), en este caso k , lo que se denota como $\mathcal{O}(h^k)$. Si en una secuencia de problemas K_a permanece acotada inferiormente por encima de cero estos resultados garantizan que el proceso converge de manera estable a la solución exacta, de la misma manera que la mejor aproximación en el espacio \mathcal{V}_h .

Otra propiedad que se demuestra directamente a partir de las propiedades de la norma energética $a(\cdot, \cdot)$ es la *ortogonalidad del error*:

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{w}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h \quad (3.54)$$

Esto significa que “*el error en la solución por elementos finitos es ortogonal al sub-espacio $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$* ”. Dicho de otra manera, “ *\mathbf{u}_h es la proyección de \mathbf{u} sobre \mathcal{V}_h con respecto a $a(\cdot, \cdot)$* ”.

3.4.3 Formulación mixta y necesidad de control sobre la presión: condición LBB

Como se ha visto en el apartado anterior, la formulación irreducible conduce a un problema de aproximabilidad: ofrece garantías de que se pueden obtener resultados tan buenos como la mejor aproximación del sub-espacio \mathcal{V}_h . Sin embargo, en

problemas con restricciones internas, tales como la incompresibilidad del medio, fallan los elementos de la formulación irreducible empleados usualmente y que en la práctica común dan buenos resultados. La dificultad radica en que la aproximabilidad de los espacios no es suficientemente buena, y por lo tanto, las soluciones son pobres. La formulación mixta es la alternativa que ofrece la posibilidad de tratar las restricciones del medio de manera más flexible. Sin embargo, al igual que en la formulación irreducible, existen ciertos requisitos que deben cumplirse para poder garantizar buenos resultados.

El análisis de las propiedades de la solución en las formulaciones mixtas la situación es algo más complejo. El factor principal es la dependencia de la solución de ciertos requisitos de *compatibilidad* entre los espacios de aproximación en los que se buscan las soluciones para cada uno de los campos. De no cumplirse éstos, aún cuando cada uno de los espacios tuviera buenas propiedades de aproximabilidad, no se podrán esperar buenos resultados de los elementos. El objetivo de este apartado es mostrar la naturaleza de estos requisitos y las implicaciones que tiene el cumplimiento o no de los mismos en el comportamiento de los elementos.

Para la presentación se considerará la formulación mixta discretizada representada por las ecuaciones (3.36a-b):

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + b(p_h, \mathbf{w}_h) &= l(\mathbf{w}_h) \quad , \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{0,h} \\ b(q_h, \mathbf{u}_h) &= 0 \quad , \quad \forall p_h \in \mathcal{Q}_{0,h} \end{aligned}$$

Si bien el operador $a(\cdot, \cdot)$ no es el mismo que en la formulación anterior, como se puede ver en (3.33a), posee también las características de continuidad y coercividad. La función $l(\cdot)$ se considerará igual a la del caso anterior. A diferencia de la formulación irreducible, para garantizar la existencia de solución única del problema no bastan las propiedades de $a(\cdot, \cdot)$; como se verá, se requiere además una condición en relación con $b(\cdot, \cdot)$.

Se puede mostrar igual que antes que la respuesta en desplazamientos en esta formulación está acotada en función de los datos. Para esto se hace $\mathbf{w}_h = \mathbf{u}_h$ y $q_h = -p_h$ en las ecuaciones anteriores, con lo cual se obtiene:

$$K_a \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}}^2 \leq a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = l(\mathbf{u}_h) \leq \|\mathbf{b}\|_* \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}} \quad (3.56)$$

donde se han invocado nuevamente la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ y la definición de la norma de $\|\mathbf{b}\|_*$. Se deduce de lo anterior el control sobre los desplazamientos:

$$\|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\|\mathbf{b}\|_*}{K_a} \quad (3.57)$$

Para garantizar el control sobre la respuesta de la formulación en presiones se precisa una expresión similar, de tipo $\|p_h\|_{\mathcal{Q}} \leq c \|\mathbf{b}\|_*$. Este control debe establecerse

a partir de la ecuación (3.36a):

$$b(p_h, \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) \quad (3.58)$$

haciendo uso de la condición de continuidad de $a(\cdot, \cdot)$ y de la definición de la norma de $\|\mathbf{b}\|_*$ en esta expresión:

$$b(p_h, \mathbf{w}_h) \leq \|\mathbf{b}\|_* \|\mathbf{w}_h\|_{\mathcal{V}} + N_a \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}} \|\mathbf{w}_h\|_{\mathcal{V}} \quad (3.59)$$

Teniendo en cuenta la condición (3.57), se obtiene:

$$\frac{N_a}{K_a} \|\mathbf{b}\|_* \|\mathbf{w}_h\|_{\mathcal{V}} + \|\mathbf{b}\|_* \|\mathbf{w}_h\|_{\mathcal{V}} \geq b(p_h, \mathbf{w}_h) \quad (3.60)$$

Por lo tanto, no se obtiene control sobre la presión a menos que se pueda asegurar que los espacios \mathcal{Q}_h y \mathcal{V}_h sean tales que:

$$\forall q_h \in \mathcal{Q}_h \quad \exists \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h \mid b(q_h, \mathbf{w}_h) \geq K_b \|q_h\|_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{w}_h\|_{\mathcal{V}}, \quad K_b \geq 0 \quad (3.61)$$

condición con la cual se puede obtener de (3.60) la siguiente cota para la presión:

$$\frac{1}{K_b} \left(\frac{N_a}{K_a} + 1 \right) \|\mathbf{b}\|_* \geq \|p_h\|_{\mathcal{Q}} \quad (3.62)$$

La condición (3.61), en base a la que ha sido posible establecer el control sobre la presión, también se puede especificar sobre \mathcal{V}_h en función de la siguiente expresión equivalente:

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h} \frac{b(q_h, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathcal{V}}} \geq K_b \|q_h\|_{\mathcal{Q}}, \quad K_b \geq 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h \quad (3.63)$$

Se imponen de esta manera restricciones de compatibilidad entre el campo de interpolación de las presiones \mathcal{Q}_h y el de los desplazamientos \mathcal{V}_h . Esta es la denominada *condición de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB)*. Otra expresión equivalente explica el nombre de *condición inf-sup* con que también se la conoce:

$$\inf_{q_h \in \mathcal{Q}_h} \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h} \frac{b(q_h, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathcal{V}_h} \|q_h\|_{\mathcal{Q}_h}} \geq K_b \geq 0 \quad (3.64)$$

Como se ha mencionado antes, en problemas de dimensión finita estas condiciones se traducen en otras relacionados con las matrices asociadas. Se puede interpretar esta condición haciendo un símil de la condición de coercividad de $a(\cdot, \cdot)$. En el caso de la matriz \mathbf{K} asociada a $a(\cdot, \cdot)$ se obtiene control sobre los desplazamientos en función de los datos gracias a que sus valores propios son distintos de cero, en particular positivos. El caso de $b(\cdot, \cdot)$ es análogo; se obtiene el control de la presión

en función de los desplazamientos al requerir que $K_b \geq 0$, es decir, que el número de condicionamiento de \mathbf{G} esté acotado, que es tanto como requerir que los valores propios de la matriz \mathbf{G} , aunque no sean necesariamente positivos, no sean cero (ni cercanos a cero).

La existencia y unicidad de la solución de este problema en el continuo depende de la condición *LBB*:

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}} \sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{V}} \frac{b(q, \mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \|q\|_{\mathcal{Q}}} \geq \beta \geq 0 \quad (3.65)$$

como demostró Ladyzhenskaya. Esta condición se cumple para la pareja de espacios $\mathcal{V}_0 \subset \mathbf{H}^1$ y $\mathcal{Q} = L^2$ establecidos para el problema continuo en el apartado 3.28. La extensión a otros problemas mixtos de este requisito de compatibilidad fue hecha por *Babuška* (Babuska, 1971) y posteriormente el análisis en el contexto de la forma discretizada del problema de Stokes fue desarrollado por Brezzi (Brezzi, 1974).

Al abordar la discretización por elementos finitos se presenta una dificultad en la verificación de esta condición sobre los espacios de trabajo. A diferencia de la coercividad y continuidad de la forma $a(\cdot, \cdot)$, que son las otras propiedades que también se requieren para garantizar existencia y unicidad de la solución, la condición *LBB* no se hereda al pasar del problema continuo al discretizado. En efecto, el cumplimiento de la condición inf-sup en los espacios $\mathcal{V}_0 \subset \mathbf{H}^1$ y $\mathcal{Q} = L^2$ *no garantiza* el cumplimiento de ésta para cualquier pareja de espacios de aproximación $\mathcal{V}_{0,h}$ y \mathcal{Q}_h . Teniendo en cuenta que el espacio de aproximación de dimensión finita es $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ (se puede pensar como una inclusión de subconjunto), puede ocurrir que los elementos que garantizan el cumplimiento de la condición *LBB* presentes en \mathcal{V} no pertenezcan a \mathcal{V}_h . En general, la estabilidad tiende a mejorar si se amplía o enriquece el espacio de los desplazamientos \mathcal{V}_h para un \mathcal{Q}_h definido. La condición *LBB* para el problema discretizado (3.64) se debe exigir específicamente para cada pareja de espacios de aproximación $\mathcal{V}_{0,h}$ y \mathcal{Q}_h , de manera que se pueda asegurar que permanece acotada inferiormente por encima de cero $K_b > 0$ independientemente de h . De lo contrario puede ocurrir que la condición se cumpla en función de h y que $K_b \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Desde el punto de vista algebraico, la matriz \mathbf{G} podría estar mal condicionada y no se puede garantizar el control sobre la presión, es decir, la presión puede presentar *problemas de inestabilidad*.

Existen una serie de elementos mixtos para los cuales se ha demostrado el cumplimiento de la condición *LBB*, y que por lo tanto tienen comportamiento estable. Para estos elementos el teorema de Brezzi (Brezzi, 1974), análogo al lema de Céa (3.51), garantiza que el error es del orden de la mejor aproximación y por lo tanto el problema se reduce a una cuestión de aproximabilidad de los espacios:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C \min_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{V}} + \min_{p_h \in \mathcal{Q}_h} \|p - p_h\|_{\mathcal{Q}} \quad (3.66)$$

En particular, si la solución del problema continuo es suficientemente regular se obtiene el siguiente estimador del error:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq Ch^{\min(k_u, k_p + 1)} \quad (3.67)$$

donde k_u y $k_p + 1$ son los órdenes de las funciones de interpolación de los desplazamientos y de las presiones, respectivamente. Se dice que los errores “están balanceados” si $k_u = k_p + 1$.

3.4.4 Técnica de conteo de restricciones: elementos descartados

Demostrar matemáticamente el cumplimiento de la condición de estabilidad para un elemento puede ser una tarea complicada. Incluso existen elementos utilizados en la práctica, con buenos resultados, para los que esta condición no ha sido demostrada aún. Este es el caso del conocido elemento $Q1/P0$ (Hughes, 1980). Éste es un elemento lineal en desplazamientos y presión constante, desarrollado por Hughes en el marco de la formulación denominada *B-Bar*.

En la práctica ingenieril existe una técnica que permite hacer una valoración preliminar del comportamiento que se puede esperar de un elemento mixto. Ésta se denomina técnica de *conteo de restricciones* (Hughes, 1987), (Zienkiewicz and Taylor, 1994a) y se basa en un requisito de *solubilidad*. Por lo tanto, establece una condición necesaria pero no suficiente por sí misma para garantizar *estabilidad*. Sin embargo ha mostrado ser efectiva para dar indicios de ciertas características del comportamiento de un elemento.

Esta técnica se basa en un razonamiento heurístico acerca de la relación entre el número de ecuaciones de equilibrio y el número de condiciones de incompresibilidad en el problema. En el sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema esta relación es igual a n_{dim} , el número de dimensiones del problema. Es de esperar que esta relación tienda a ser representada en una malla de elementos finitos muy fina al evaluarse el parámetro de restricción r :

$$r = \frac{n_u}{n_p} \quad (3.68)$$

donde n_u es el número de grados de libertad en desplazamientos después de impuestas las condiciones de contorno y n_p el número de restricciones de incompresibilidad efectivas. En un problema concreto la relación depende de las condiciones de contorno impuestas. El test consiste en hacer el conteo y evaluación en una configuración sencilla de manera que permita obtener una aproximación al límite correspondiente a una malla fina. Esta configuración se muestra en las figuras 3.1 y 3.2. En cada caso

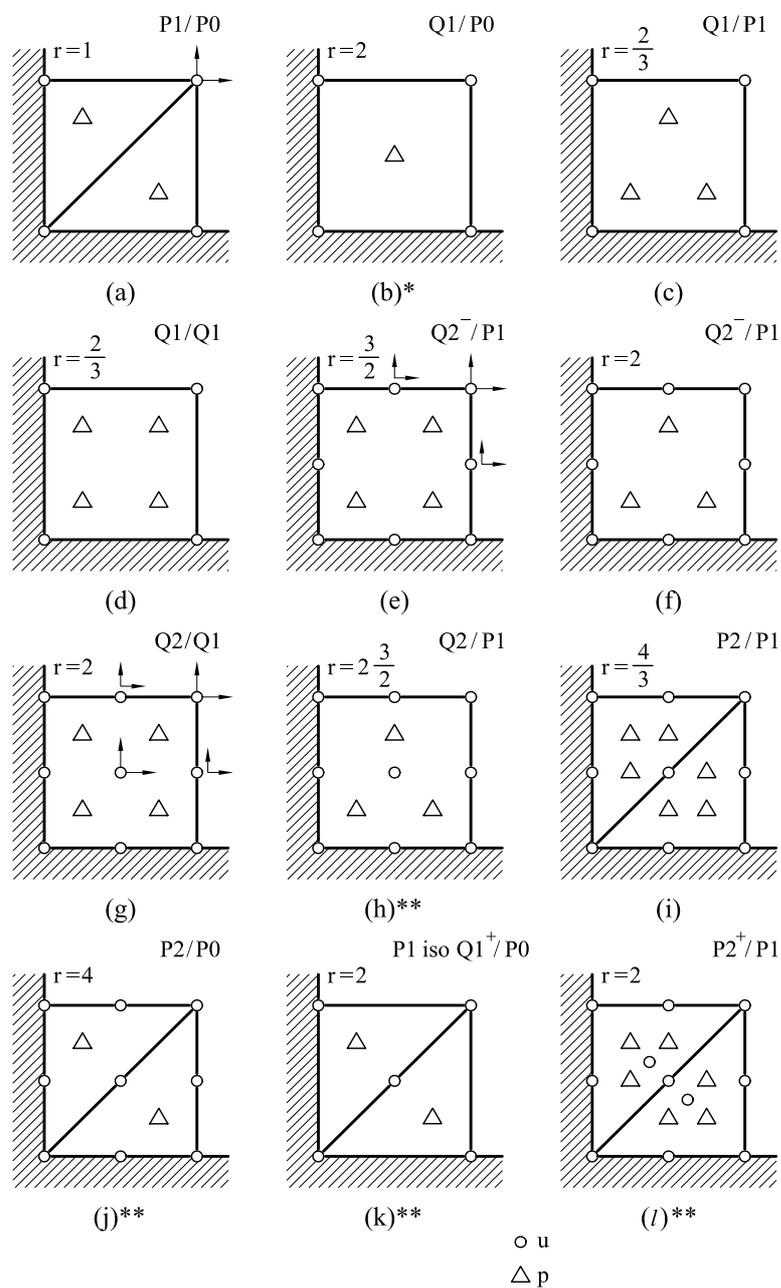


Figura 3.1: Elementos mixtos u/p con presión discontinua. Parámetro de restricción r . (*) Se supone que cumple la condición LBB en mallas distorsionadas aunque no se ha demostrado matemáticamente. (**) Estos elementos cumplen la condición LBB .

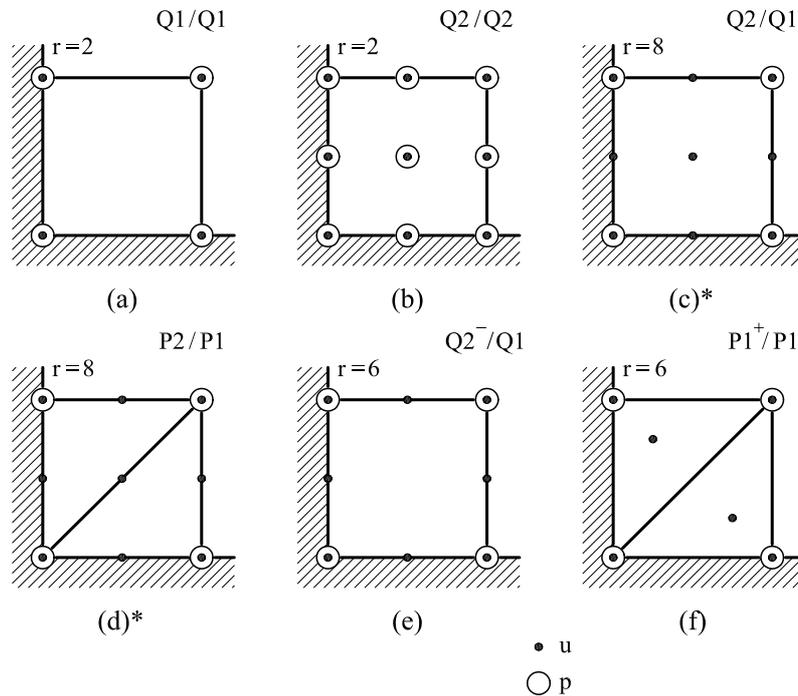


Figura 3.2: Elementos mixtos u/p con presión continua. Parámetro de restricción r . (*) Estos elementos cumplen la condición LBB .

se prescriben los grados de libertad (de desplazamiento y presión) en las paredes de la esquina y se evalúa r en base sólo a los grados de libertad restantes.

En dos dimensiones el valor óptimo es $r = 2$. El resultado que arroja cada elemento particular con relación a este valor indica la tendencia de su comportamiento. Efectivamente, valores de $r \leq 2$ dan indicios de excesivas restricciones de incompresibilidad en relación a los grados de libertad en desplazamientos. El elemento tiende al bloqueo en la medida en que el parámetro r sea más pequeño y bloquea si $r \leq 1$. Por otro lado, elementos que arrojan $r \geq 2$ no bloquean, pero valores muy grandes del parámetro r indican una pobre interpolación de presiones en relación a los desplazamientos. El error en presiones repercute en el error general del método y el orden de convergencia resulta ser pobre, aún cuando la interpolación en desplazamientos sea de alto orden. Este efecto se puede apreciar en la ecuación (3.67) en función de los ordenes k_u y k_p de los polinomios de interpolación respectivos.

En el Anexo B se resume, debido a su importancia, un método de general para problemas de incompresibilidad desarrollado en (Simo et al., 1985), en el que se pueden encuadrar el $Q1/P0$ y otros elementos de presión discontinua.

El criterio de estabilidad conduce tal como se ha mostrado al planteamiento de la condición LBB , lo que se traduce en una restricción en la elección de las interpo-

laciones en un elemento mixto. Quedan al margen de la aplicación, por violar esta restricción, elementos que desde el punto de vista computacional resultarían convenientes en aplicaciones prácticas, por ejemplo los de iguales ordenes de interpolación \mathbf{u}/p . El objetivo planteado en este trabajo es formular elementos triangulares y tetraédricos para problemas de incompresibilidad con interpolaciones lineales y continuas en presión y desplazamientos. Una combinación de interpolaciones como ésta no cumple la condición *LBB*, por lo que una formulación mixta como la que se ha presentado no garantiza comportamiento estable de la presión. El objetivo implica plantear una formulación de elementos mixtos al margen de la condición *LBB* y que, no obstante esto, ofrezca comportamiento estable. En la siguiente sección se presenta una reseña de las técnicas que tratan de corregir inestabilidades numéricas semejantes que se presentan en diferentes aplicaciones, con la finalidad de ubicar en ese contexto la formulación estabilizada que se planteará en este trabajo.

3.5 Métodos de estabilización: breve reseña

Las dificultades numéricas que se manifiestan de manera similar a la inestabilidad de la presión en la formulación mixta del problema incompresible ocurren también en otras aplicaciones. Como se ha mencionado el problema elástico incompresible responde a las mismas ecuaciones de gobierno que el problema de Stokes. A su vez el operador diferencial correspondiente a estas ecuaciones se encuentra también en modelos matemáticos que describen otros fenómenos físicos, tales como las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles. La inestabilidad de la presión se manifiesta de igual manera en este problema. También se presentan inestabilidades numéricas en el tratamiento mediante elementos finitos de otro importante problema en mecánica de fluidos como es el de convección-difusión-reacción. Este es un problema en una sola variable, velocidades, en el que la dificultad radica en que la aproximación numérica a la que conduce el método de Galerkin sub-estima el efecto difusivo. En casos en que el término convectivo predomina fuertemente sobre el difusivo, esto resulta crítico en el tratamiento numérico y da origen a inestabilidades que se manifiestan como oscilaciones no-físicas en la respuesta en velocidades. Las técnicas orientadas a evitar estas dificultades reciben el nombre de *métodos de estabilización*.

En general los métodos de estabilización conducen a una modificación de la forma débil que se resuelve, mediante la adición de términos que dependen de la malla. Las modificaciones propuestas no siempre han tenido una justificación convincente, y en algunos casos éstas se establecieron a partir de la práctica numérica. Dificultades como las mencionadas en los problemas de la mecánica de fluidos impulsaron el desarrollo de estos métodos.

Por ejemplo, en el problema de convección-difusión-reacción las primeras ideas para solucionar la inestabilidad numérica condujeron a compensar la sub-estimación de la difusividad agregando difusión artificial (Johnson, 1987). El método evolucionó en modificaciones sucesivas que fueron corrigiendo inconvenientes de la idea primitiva. Así, se logró que la modificación de la difusividad sólo afectara la dirección de las líneas de corriente (Hughes and Brooks, 1979). El término de estabilización obtenido involucraba el operador diferencial de convección. Sin embargo, debido a la inclusión del término adicional la formulación no era *consistente*, es decir, la solución del continuo no era solución del problema modificado a resolver. Se obtuvo una formulación consistente involucrando en el término de estabilización el residuo de la ecuación diferencial del problema, con lo que quedaba incluido el operador de convección-difusión-reacción completo. Este método en su versión consistente se denomina *método SUPG (stream line upwind Petrov-Galerkin)* (Hughes and Brooks, 1982).

Por otro lado se propusieron métodos de estabilización para resolver el problema de Stokes. En este caso la finalidad es eludir la condición *LBB* y obtener, sin embargo, estabilidad en la presión. Se propuso una formulación Petrov-Galerkin (Hughes et al., 1986), en que la función de ponderación de la ecuación de equilibrio se perturba agregando un término dependiente del gradiente de la función de ponderación de la presión. Posteriormente, se presentó el método *GLS (Galerkin least squares)* (Hughes et al., 1989), como una generalización del método *SUPG*. En el método *GLS* el término adicional también es dependiente del residuo, pero en este caso la forma es la que se podría derivar de la minimización del cuadrado del residuo en el contexto de un principio variacional, lo que explica el nombre del método. En la misma línea se introdujeron algunas modificaciones posteriores. Éstas, consistentes por ejemplo en el cambio de signo de algunos de los operadores, consiguieron mejorar la propiedades de estabilización del método *GLS*.

A pesar de los buenos resultados logrados en la práctica por estos métodos y que incluso se podía explicar cómo actuaba el efecto estabilizador en algunos problemas, no existía un fundamento teórico que los sustentara y varios aspectos del método carecían de sentido físico, como por ejemplo los parámetros algorítmicos de estabilización que todos estos métodos introducen.

Recientemente, varios de estos métodos de estabilización han encontrado fundamentación y conexión entre sí en un marco conceptual general que se denomina *método de las sub-escalas*; (Hughes, 1995), (Hughes et al., 1998). Si bien es cierto que el método tiene origen en el ámbito de la mecánica de fluidos su potencialidad permite avizorar el desarrollo de nuevas y mejores formulaciones en diversos problemas de la mecánica en general. Una visión comparativa de diversos métodos de estabilización se puede encontrar en (Codina, 1997). Se emplea en este trabajo el método de las sub-escalas, en particular el método de las sub-escalas ortogonales,

para la formulación de los elementos propuestos para problemas en sólidos elasto-plásticos, simulados mediante el modelo de plasticidad J2.

Capítulo 4

Formulación de elementos estabilizados en deformaciones infinitesimales

4.1 Introducción

En este capítulo se desarrolla la formulación de elementos triangulares y tetraédricos con interpolaciones lineales y continuas de desplazamientos y presión \mathbf{u}/p en el rango de deformaciones infinitesimales. Para lograr elementos estables con estas interpolaciones es necesario emplear un método de estabilización. La formulación de estos elementos en este trabajo se desarrolla en el marco del método de estabilización de las sub-escalas ortogonales, *OSGS*, que se introduce en la siguiente sección. Aunque de acuerdo con el objetivo de este trabajo el interés se centra en elementos específicos, el método es aplicable en general a elementos de distintos órdenes de interpolación y forma geométrica. Se abordan en este rango tanto el problema elástico como el problema elasto-plástico. En cada caso se presentan las hipótesis y los aspectos de implementación que se han considerado con la finalidad de obtener elementos con propiedades de exactitud y estabilidad mejoradas y bajo costo computacional.

4.2 El método de las sub-escalas

La solución de un problema por el método de elementos finitos, como se ha mencionado, consiste en buscar en un espacio de funciones de dimensión finita $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ una aproximación a la solución de un problema en un medio continuo. La idea fundamental que introduce el método de las sub-escalas es que al definir una malla

de elementos finitos quedan establecidas dos *escalas* o *niveles de resolución*, una que corresponde a la malla y será captado mediante la aproximación de elementos finitos y otra más fina, que corresponde a la parte que no se logra captar, que se denominará *sub-escala* (“*sub-scale*” o “*sub-grid scale*”). De acuerdo con este punto de vista, si bien se admite que existe una componente no resuelta de la solución que no se puede captar, sin embargo se debería al menos aproximar de alguna manera *los efectos* de esta componente de la solución sobre la componente que se resuelve numéricamente. Diversos problemas de estabilidad numérica tendrían como origen el no tener en cuenta los efectos de las sub-escalas en la escala de la malla de elementos finitos. El objetivo del método es mejorar las propiedades de estabilidad de la formulación de un problema teniendo en cuenta una aproximación *adecuada* de estos efectos.

4.2.1 Planteamiento de un problema por el método de las sub-escalas

El problema de la sección 3.2, definido como:

Dados los valores prescritos de las cargas externas $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, tal que:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_u \Omega \quad (4.1b)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_t \Omega \quad (4.1c)$$

donde las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ vienen dadas en términos de \mathbf{u} por la relación constitutiva (3.2).

se puede escribir en notación abstracta como:

Hallar $\mathbf{U} \in \mathcal{W}_0$, de acuerdo con las condiciones de contorno, tal que la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathcal{F} \quad (4.2)$$

donde $\mathcal{L}(\cdot)$ es el operador diferencial del problema; en este caso, $\mathcal{L}(\mathbf{U}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U})$ y $\mathcal{F} = \mathbf{b}$.

La expresión de residuos ponderados correspondiente es:

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot [\mathcal{F} - \mathcal{L}(\mathbf{U})] dV = 0, \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W}_0 \quad (4.3)$$

El término $\int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathcal{L}(\mathbf{U})$ involucra derivadas de segundo orden de \mathbf{U} . De acuerdo al procedimiento usual, se aplica la integración por partes para compensar los órdenes de diferenciación sobre \mathbf{U} y \mathbf{W} :

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathcal{L}(\mathbf{U}) dV = B(\mathbf{U}, \mathbf{W}) - \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (4.4)$$

donde se ha aplicado el teorema de la divergencia en el primer término de la derecha. Insertando esta relación en (4.3) se obtiene la forma débil:

$$B(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = L(\mathbf{W}) \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W}_0 \quad (4.5)$$

donde

$$L(\mathbf{W}) = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathcal{F} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (4.6)$$

La solución de un problema continuo en el contexto del método de las sub-escalas se aproxima como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}} \quad (4.7)$$

La componente de la solución en el espacio de elementos finitos $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_{0,h}$, mientras que la componente $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0$, donde $\mathcal{W}_{0,h}$ y $\tilde{\mathcal{W}}_0$ son los espacios de elementos finitos y el espacio de las sub-escalas, respectivamente. De esta manera, la solución $\mathbf{U} \in \mathcal{W}_0$, donde el espacio \mathcal{W}_0 se ha refinado del siguiente modo:

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_{h,0} \oplus \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (4.8)$$

El problema en el medio continuo se puede re-escribir como:

Hallar $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_{0,h}$ y $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0$ tales que:

$$B(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = L(\mathbf{W}_h) \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (4.9a)$$

$$B(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = L(\tilde{\mathbf{W}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (4.9b)$$

donde las variaciones de cada componente se han definido como $\mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{0,h}$ y $\tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0$.

Como se puede observar, la primera ecuación está definida en el espacio de elementos finitos y la segunda en el espacio de las sub-escalas. Si $B(\cdot, \cdot)$ se puede desdoblar en las componentes asociadas a cada una de las escalas, por ejemplo si $B(\cdot, \cdot)$ es lineal en la primera componente, estas ecuaciones se pueden re-escribir como:

$$B(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) + B(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = L(\mathbf{W}_h) \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (4.10)$$

$$B(\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{W}}) + B(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = L(\tilde{\mathbf{W}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (4.11)$$

La ecuación (4.10) es la que correspondería a la expresión de un problema aproximado por elementos finitos de la manera usual, esto es $B(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) = L(\mathbf{W}_h)$, salvo por la presencia del término adicional $B(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h)$. Éste es el término que contiene el efecto de las sub-escalas sobre la solución en el espacio de elementos finitos. Este término adicional es el *término de estabilización* de la formulación estabilizada.

La ecuación (4.11) en el espacio de las sub-escalas se utiliza para definir una aproximación adecuada de $\tilde{\mathbf{U}}$. A partir de esta aproximación se podrá luego evaluar numéricamente el término de estabilización $B(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h)$ y resolver la primera ecuación. Esta es la idea esencial del procedimiento, sin embargo, es necesario definir algunos aspectos de la aplicación del método de las sub-escalas.

Para obtener a partir de la segunda ecuación una expresión aproximada de $\tilde{\mathbf{U}}$ y reemplazarla luego en la primera es necesario hacer algunas operaciones directas. Éstas son la integración por partes dentro de cada elemento (indicada por el subíndice Ω' en los operadores respectivos) y la aplicación del teorema de la divergencia, como se muestra a continuación. Introduciendo la notación $\int_{\Omega'} := \sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega^e}$ y $\int_{\partial\Omega'} := \sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\partial\Omega^e}$ la ecuación (4.11) se puede re-escribir como:

$$\int_{\Omega'} \tilde{\mathbf{W}} \cdot [\mathcal{L}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}})] d\Omega = \int_{\Omega'} \tilde{\mathbf{W}} \cdot \mathcal{F} d\Omega \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (4.12)$$

En (4.12) se ha considerado que las tracciones entre elementos $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{n}$ son continuas, y por lo tanto la suma neta de las integrales de contorno es nula.

Mediante la integración por partes, el segundo término de la izquierda en la ecuación (4.10) se puede expresar como:

$$B(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \int_{\Omega'} \tilde{\mathbf{U}} \cdot \mathcal{L}^*(\mathbf{W}_h) d\Omega + \int_{\partial\Omega'} \tilde{\mathbf{U}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{W}_h) \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (4.13)$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal exterior a la superficie del dominio de integración y \mathcal{L}^* es el adjunto del operador \mathcal{L} . Como simplificación, sólo se consideran los efectos de las sub-escalas en el interior del volumen de los elementos Ω_e . En consecuencia, las integrales de contorno en la ecuación (4.13) se despreciarán. Esto se puede entender como equivalente a considerar que el valor de las sub-escalas se anula en los contornos de los elementos, como ocurriría si se utiliza un espacio de funciones burbuja para definir las. El operador adjunto \mathcal{L}^* se calcula mediante la integración por partes a partir de la siguiente relación con \mathcal{L} (prescindiendo de las integrales de contorno):

$$\int_{\Omega} \mathbf{U} \cdot \mathcal{L}^*(\mathbf{W}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathcal{L}(\mathbf{U}) d\Omega \quad (4.14)$$

Finalmente, de acuerdo con las consideraciones mencionadas, la ecuación (4.10) resulta:

$$B(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) + \int_{\Omega'} \tilde{\mathbf{U}} \cdot \mathcal{L}^*(\mathbf{W}_h) d\Omega = L(\mathbf{W}_h) \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (4.15)$$

y la ecuación (4.12) se expresa como:

$$\int_{\Omega'} \tilde{\mathbf{W}} \cdot \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{U}}) d\Omega = \int_{\Omega'} \tilde{\mathbf{W}} \cdot [\mathcal{F} - \mathcal{L}(\mathbf{U}_h)] d\Omega \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (4.16)$$

La expresión (4.16) relaciona la sub-escala $\tilde{\mathbf{U}}$ con el residuo \mathcal{R}_h de la ecuación diferencial aproximada por elementos finitos, representado por $\mathcal{R}_h = \mathcal{F} - \mathcal{L}(\mathbf{U}_h)$. No son necesarios los valores punto a punto, sino sólo el valor de la integral correspondiente al término de estabilización en (4.15). La ecuación (4.15) es la ecuación general del método estabilizado, donde el segundo término de la izquierda es el término de estabilización.

Hasta este punto la presentación del método de las sub-escalas es general. Debe resaltarse que el objetivo de las aproximaciones en la aplicación del método es obtener una estimación de los efectos de las sub-escalas, cuya evaluación numérica en las ecuaciones de balance sea viable, y no necesariamente calcular el valor mismo de $\tilde{\mathbf{U}}$.

Existen diversas posibilidades para definir la aproximación a las sub-escalas, incluso la definición de funciones específicas para $\tilde{\mathbf{U}}$ de manera similar al método *EAS*. En principio el espacio de la escala fina podría ser cualquier espacio complementario al espacio de elementos finitos. La alternativa adoptada en este trabajo se presenta en el siguiente apartado.

4.2.2 Las sub-escalas ortogonales

(Codina, 2000a) propuso como definición razonable para el espacio de las sub-escalas el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos. Esta definición da origen a una formulación ingeniosa y precisa, denominada *método de las sub-escalas ortogonales*. De acuerdo con este planteamiento, se adopta como aproximación para el espacio de la escala fina:

$$\tilde{\mathcal{W}}_0 \approx \tilde{\mathcal{W}} \approx \mathcal{W}_h^\perp \quad (4.17)$$

donde \mathcal{W}_h^\perp es el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos. Por lo tanto las sub-escalas quedan definidas en el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos, es decir:

$$\tilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{W}_h^\perp \quad (4.18)$$

Resta por obtener específicamente una aproximación para $\tilde{\mathbf{U}}$ a partir de la ecuación (4.16):

$$\int_{\Omega'} \tilde{\mathbf{W}} \cdot \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{U}}) d\Omega = \int_{\Omega'} \tilde{\mathbf{W}} \cdot [\mathcal{F} - \mathcal{L}(\mathbf{U}_h)] d\Omega, \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \mathcal{W}_h^\perp \quad (4.19)$$

Esta ecuación representa la proyección del residuo de la ecuación diferencial, es decir $\mathcal{R}_h = \mathcal{F} - \mathcal{L}(\mathbf{U}_h)$, sobre el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos \mathcal{W}_h^\perp . Si bien esta ecuación no será resuelta y no se hallará el valor exacto de las sub-escalas $\tilde{\mathbf{U}}$, se puede al menos aproximar el operador lineal \mathcal{L} por una matriz de parámetros:

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{U}}) \approx \boldsymbol{\tau}_e^{-1} \tilde{\mathbf{U}} \quad (4.20)$$

con lo cual, si se denota como $P_h\{\cdot\}$ la proyección sobre el espacio de elementos finitos y $P_h^\perp\{\cdot\} = \{\cdot\} - P_h\{\cdot\}$ la proyección sobre el espacio \mathcal{W}_h^\perp ortogonal al espacio de elementos finitos, se puede tomar $\tilde{\mathbf{U}}$ como:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \boldsymbol{\tau}_e P_h^\perp\{[\mathcal{F} - \mathcal{L}(\mathbf{U}_h)]\} \quad \text{en } \Omega_e \quad (4.21)$$

donde $\boldsymbol{\tau}_e$ es la *matriz de parámetros de estabilización* en cada elemento. Codina desarrolló, en el marco de las ecuaciones de Oseen (Codina, 2000b), una deducción de los valores de los parámetros de estabilización mediante un análisis de Fourier, basada por primera vez en razonamientos físicos. Los valores de los parámetros de la matriz $\boldsymbol{\tau}_e$ dependen de los coeficientes de la ecuación diferencial y se establecen mediante la comparación de las normas L_2 del residuo y de $\tilde{\mathbf{U}}$ sobre cada elemento.

4.2.3 Aspectos de la aplicación a la estabilización de la formulación mixta del problema incompresible

Los elementos triangulares y tetraédricos con combinación de interpolaciones lineales y continuas de desplazamientos y presión, objetivo de este trabajo, no cumplen la condición de estabilidad *LBB*. Sin embargo, se empleará el método de las sub-escalas como la técnica de estabilización que permita formular elementos de esas características con comportamiento estable.

En el marco general del método, planteado en el apartado anterior, se interpreta que las expresiones (4.2) y (4.3) comprenden en notación abstracta, tanto la ecuación de balance de momentum como la condición de incompresibilidad en forma fuerte y en forma débil, respectivamente. El operador diferencial $\mathcal{L}(\cdot)$ y el vector \mathcal{F} correspondientes al problema formulado en la sección 3.3 se definen como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) : = \begin{bmatrix} -\nabla p - 2\mu \nabla \cdot (\nabla^s \mathbf{u}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathcal{F} : = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

donde $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, p]^T$ es el vector que contiene las variables de la formulación mixta, tanto en desplazamientos $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_0$ como en presiones $p \in \mathcal{Q}$. El espacio al que pertenece \mathbf{U} es $\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$. Del mismo modo, los términos de la forma débil (4.9) son:

$$B(\mathbf{U}, \mathbf{W}) : = a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(p, \mathbf{w}) + b(q, \mathbf{w}) \quad (4.24)$$

$$L(\mathbf{W}) : = (\mathbf{b}, \mathbf{w}) + (\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{w})_{\Gamma_t} \quad (4.25)$$

que fueron definidos en (3.33a). Se hará empleará esta notación para simplificar las expresiones.

La solución en el continuo $\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}$ es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_h} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{U}}} \quad (4.26)$$

Sin embargo, en el presente trabajo el refinamiento de la solución $\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}$ se empleará específicamente para enriquecer el campo de desplazamientos con la finalidad de estabilizar la formulación. Es decir, se considerará solamente la componente de $\tilde{\mathbf{U}}$ en la sub-escala de los desplazamientos, $\tilde{\mathbf{u}}$. Esto viene sugerido por lo comentado en los apartados 3.4.3 y 3.4.4. La ampliación o enriquecimiento del espacio de desplazamientos con respecto al espacio de las presiones tiene efecto estabilizador en la formulación mixta. Como se comprobará mediante los resultados obtenidos, el refinamiento en desplazamientos será suficiente para lograr el comportamiento estable de los elementos diseñados. Por lo tanto, no se considerarán los efectos de sub-escalas de la presión, lo que se puede interpretar también como adoptar $\tilde{p} = 0$ para el campo de presiones.

En (Codina, 2000b) se establecen consideraciones para definir la matriz de estabilización τ_e , y se calculan los parámetros correspondientes mediante el análisis en series de Fourier de las ecuaciones en el marco del planteamiento en sub-escalas del problema de Oseen. En particular para el problema de Stokes, en (Codina, 2000a), la matriz de parámetros de estabilización en la expresión (4.21) se define como la matriz diagonal:

$$\tau_e = \tau_e \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_{\text{dim}}}, 0 \right) \quad (4.27)$$

con:

$$\tau_e = \frac{ch^2}{2\mu} \quad (4.28)$$

donde h es el diámetro característico de la malla, el módulo de cizallamiento μ y de c una constante numérica que depende sólo del tipo de elemento. Como consecuencia

de la consideración adoptada con respecto a las sub-escalas, $\tilde{p} = 0$, se observa en la definición (4.27) de la matriz $\boldsymbol{\tau}_e$ que la posición correspondiente a la presión se considera como cero.

La expresión (4.28) para el parámetro de estabilización τ_e también ha sido establecida por otros métodos, además del de Codina en (Codina, 2000b), por ejemplo mediante el análisis de convergencia o el método del cálculo finito; (Hughes et al., 1986), (Hughes, 1995), (Oñate et al., 2002). Desde el punto de vista algorítmico τ_e es un parámetro robusto, puesto que las variaciones del valor de la constante c no tienen un impacto significativo sobre la solución, incluso si el valor se modifica en orden de magnitud. La experiencia numérica indica que para elementos lineales el valor de c se puede escoger alrededor de 0, 5 ó 0, 75.

De acuerdo con las pautas establecidas hasta aquí se abordará en la siguiente sección la formulación de los elementos mixtos estabilizados que son el objetivo de este trabajo.

4.3 Formulación en régimen elástico

Se puede plantear una formulación mixta del problema elástico en la que el problema incompresible representa una situación límite del problema compresible general. En esta formulación se define la presión p como variable independiente y adicional a los desplazamientos \mathbf{u} .

4.3.1 Modelo constitutivo

El comportamiento constitutivo en elasticidad infinitesimal se puede expresar mediante el siguiente par de ecuaciones:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + 2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{u}] \quad (4.29a)$$

$$p = K \varepsilon_v \quad \text{con } \varepsilon_v = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.29b)$$

donde ε_v y $\operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{u}]$ son las componentes volumétrica y desviadora de la deformación, respectivamente; K es el módulo volumétrico, que en términos de los parámetros de Lamé es:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (4.30)$$

Como se puede observar en las ecuaciones constitutivas (4.29a) y (4.29b), la descomposición de la deformación en sus componentes volumétrica y desviadora conduce a una expresión del tensor de tensiones desacoplada del mismo modo. La expresión del tensor constitutivo elástico \mathbf{c} asociado al desacoplamiento en partes volumétrica y desviadora es:

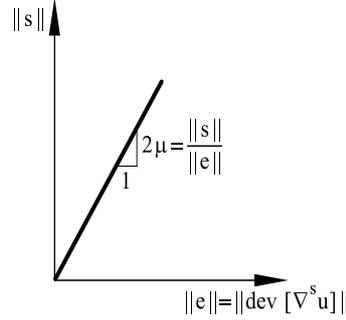


Figura 4.1: Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras en modelo elástico lineal.

$$[\mathbf{c}]_{ijkl} = \underbrace{K \delta_{ij} \delta_{kl}}_{\mathbf{c}_{\text{vol}}} + 2\mu \underbrace{\left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)}_{\mathbf{c}_{\text{dev}}} \quad (4.31)$$

donde \mathbf{c}_{vol} y \mathbf{c}_{dev} son las componentes volumétrica y desviadora del tensor constitutivo \mathbf{c} , respectivamente.. Nótese las diferencias entre las expresiones de los tensores de tensiones (3.26) y (4.29a), así como entre las expresiones de los tensores constitutivos. Como se verá más adelante, resultará conveniente desacoplar el tensor de deformaciones en componentes volumétrica y desviadora al tratar el comportamiento plástico mediante modelos constitutivos J2.

Obsérvese que las tensiones desviadoras vienen dadas por el producto tensorial de la componente desviadora del tensor constitutivo \mathbf{c}_{dev} y las deformaciones totales, este producto tensorial involucra en forma efectiva sólo la componente desviadora del tensor de deformaciones:

$$\mathbf{s} = \text{dev} [\boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{c}_{\text{dev}} : \nabla^s \mathbf{u} = 2\mu \text{dev} [\nabla^s \mathbf{u}] \quad (4.32)$$

En consecuencia, como se puede ver en la figura 4.1, la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras es lineal y depende del módulo de cizallamiento:

$$2\mu = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\|\text{dev} [\nabla^s \mathbf{u}]\|} \quad (4.33)$$

4.3.2 Formulación en el continuo

Forma fuerte

Las ecuaciones constitutivas anteriores, la ecuación de equilibrio en forma local y las condiciones de contorno definen el problema en forma fuerte. Siguiendo la

nomenclatura abstracta empleada en el capítulo anterior, el problema elástico lineal se expresa como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, p]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, tal que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathcal{F} \quad (4.34)$$

donde:

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) : = \begin{bmatrix} -\nabla p - 2\mu \nabla \cdot \text{dev} [\nabla^s \mathbf{u}] \\ -\frac{1}{K} p + \nabla \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (4.35a)$$

$$\mathcal{F} : = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35b)$$

junto con las condiciones de contorno:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_u \Omega \quad (4.36)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_t \Omega \quad (4.37)$$

Es decir las ecuaciones de esta formulación en el dominio son:

$$\nabla p + 2\mu \nabla \cdot \text{dev} [\nabla^s \mathbf{u}] + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (4.38a)$$

$$-\frac{1}{K} p + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.38b)$$

donde en la ecuación de equilibrio (4.38a) se ha reemplazado la expresión de las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ dada en función de \mathbf{u} y p por la relación constitutiva (4.29a).

Obsérvese que la formulación es válida tanto en el caso compresible como en el límite incompresible. En particular, en el caso incompresible, cuando $K \rightarrow \infty$, la ecuación (4.38b) se transforma en la condición cinemática de incompresibilidad.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.39)$$

El operador adjunto del operador $\mathcal{L}(\cdot)$ en (4.35a) se calcula a partir de la relación (4.14), $\int_{\Omega} \mathbf{U} \cdot \mathcal{L}^*(\mathbf{W}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathcal{L}(\mathbf{U}) d\Omega$. Integrando por partes esta expresión se obtiene:

$$\mathcal{L}^*(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} -\nabla q - 2\mu \nabla \cdot \text{dev} [\nabla^s \mathbf{w}] \\ -\frac{1}{K} q + \nabla \cdot \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Forma débil

La forma débil o variacional del problema se expresa en este caso como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas máscas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, p]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, tal que:

$$B(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = L(\mathbf{W}), \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W}_0 \quad (4.41)$$

donde $\mathbf{W} \in \mathcal{W}_0$ es el vector de variación de \mathbf{U} y:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{U}, \mathbf{W}) & : = \langle \nabla^s \mathbf{w}, 2\mu \operatorname{dev} \nabla^s \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}, p \rangle + \langle q, \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle - \left\langle q, \frac{1}{K} p \right\rangle \\ L(\mathbf{W}) & : = \langle \mathbf{w}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{w}, \bar{\mathbf{t}} \rangle_{\partial_t} \end{aligned}$$

Esta forma débil se suele expresar mediante el siguiente par de ecuaciones contenidas implícitamente, asociadas a las variaciones de desplazamientos y de presión, respectivamente:

$$\langle \nabla^s \mathbf{w}, 2\mu \operatorname{dev} \nabla^s \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}, p \rangle = l(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 \quad (4.42)$$

$$\langle q, (\nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{K} p) \rangle = 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q} \quad (4.43)$$

donde como antes, $l(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{w}, \bar{\mathbf{t}} \rangle_{\Gamma_t}$ es el término de fuerzas externas. Este par de ecuaciones se puede expresar en un arreglo 2×1 de forma compacta como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W}_0 \quad (4.44)$$

donde:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}, 2\mu \operatorname{dev} \nabla^s \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}, p \rangle - l(\mathbf{w}) \\ \langle q, (\nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{K} p) \rangle \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Se adopta esta notación pues permite identificar con más claridad cada ecuación y sus respectivos términos.

El espacio al que pertenece \mathbf{U} es $\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, donde \mathcal{V}_0 y \mathcal{Q} son los espacios de los desplazamientos y presiones. En el medio continuo estos espacios son, respectivamente:

$$\mathcal{V}_0 = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ en } \partial \Omega_u \}, \text{ y } \mathcal{Q} = L^2(\Omega) \quad (4.46)$$

La estabilidad de esta formulación mixta depende del cumplimiento de la condición *LBB*. Esta condición conduce a la necesidad de utilizar diferentes interpolaciones para \mathbf{u} y p en la formulación por elementos finitos. Sin embargo, en la siguiente sección se desarrolla la formulación estabilizada que elude el requisito de la condición *LBB* y hará posible el uso de interpolaciones de igual orden para desplazamientos y presiones, en particular lineales y continuas.

4.3.3 Planteamiento en multiescalas

A continuación se formula el problema en el marco del *método de las sub-escalas*. En adelante se considera que los espacios de funciones de elementos finitos de desplazamientos y presión, \mathbf{u}_h y p_h respectivamente, son ambos lineales y continuos, de acuerdo con el objetivo planteado. Es decir, los espacios de aproximación de elementos finitos que se considerarán serán tales que $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_{0,h} = \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{Q}_h \subset [H^1(\Omega)]^{n_{\text{dim}}+1}$.

Como caso particular del método genérico se empleará el método de las *sub-escalas ortogonales (OSGS)*, propuesto por R. Codina en (Codina, 2000a), según el cual el espacio complementario $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ se escoge como el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos. De acuerdo con esto, se definen las sub-escalas $\widetilde{\mathbf{U}} \in \widetilde{\mathcal{W}}_0$ y se aproxima $\widetilde{\mathcal{W}}_0 \approx \mathcal{W}_h^\perp$. Tal como se adelantó en la sección 4.2.3, el refinamiento de la solución $\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \widetilde{\mathbf{U}}$ se empleará específicamente para enriquecer el campo de desplazamientos, con la finalidad de mejorar las propiedades de estabilidad de la formulación mixta de elementos finitos del problema incompresible. Así:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{u}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

El problema en el medio continuo se transforma en:

Hallar $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_{0,h}$ y $\widetilde{\mathbf{U}} \in \widetilde{\mathcal{W}}_0$, tales que:

$$B(\mathbf{U}_h + \widetilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = L(\mathbf{W}_h), \quad \forall \mathbf{W}_h \quad (4.48a)$$

$$\int_{\Omega'} \widetilde{\mathbf{W}} \cdot \mathcal{L}(\mathbf{U}_h + \widetilde{\mathbf{U}}) d\Omega = \int_{\Omega'} \widetilde{\mathbf{W}} \cdot \mathcal{F} d\Omega, \quad \forall \widetilde{\mathbf{W}} \quad (4.48b)$$

que corresponden respectivamente a las expresiones (4.10) y (4.11), de acuerdo con el planteamiento presentado en la sección 4.2.1.

La ecuación (4.48a), definida en el espacio de elementos finitos, equivale al par de ecuaciones en desplazamientos y presiones respectivamente:

$$\langle \nabla^s \mathbf{w}_h, 2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s (\mathbf{u}_h + \widetilde{\mathbf{u}})] \rangle_{\Omega'} + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h \rangle_{\Omega'} = l(\mathbf{w}_h) \quad (4.49a)$$

$$\langle q_h, (\nabla \cdot (\mathbf{u}_h + \widetilde{\mathbf{u}}) - \frac{1}{K} p_h) \rangle_{\Omega'} = 0 \quad (4.49b)$$

donde $l(\mathbf{w}_h) = \langle \mathbf{w}_h, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{w}_h, \bar{\mathbf{t}} \rangle_{\Gamma_t}$. En notación compacta, éstas son:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (4.50)$$

En (4.49a) y (4.49b) los operadores gradiente y el operador divergencia, $\nabla^s(\cdot)$ y $\nabla \cdot (\cdot)$ respectivamente, están aplicados a $(\mathbf{u}_h + \widetilde{\mathbf{u}})$. Ambos operadores son lineales, por lo que estas ecuaciones se pueden expresar en este caso como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (4.51)$$

donde $\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h)$ y $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{V}_h)$ son respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) &= \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, 2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{u}_h] \rangle_{\Omega'} + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h \rangle_{\Omega'} - l(\mathbf{w}_h) \\ \langle q_h, (\nabla \cdot \mathbf{u}_h - \frac{1}{K} p_h) \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) &= \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, 2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}] \rangle_{\Omega'} \\ \langle q_h, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

El efecto estabilizador de las sub-escalas se refleja en los términos contenidos en (4.52). De manera análoga a la presentada en (4.15), los términos en (4.52) se evalúan integrando por partes. De esta manera se consigue una expresión equivalente a (4.52), pero que en vez de estar expresada en función de derivadas de $\tilde{\mathbf{u}}$ está en función de la primitiva:

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} -\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{w}_h]) \rangle_{\Omega'} \\ -\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla q_h \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

De manera similar, la forma débil expresada en (4.48b), definida en el espacio de sub-escalas ortogonales, equivale a la ecuación en forma compacta:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{0} \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (4.54)$$

donde:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = \begin{bmatrix} \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot 2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s (\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})] \rangle_{\Omega'} + \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla p_h \rangle_{\Omega'} + \langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{b} \rangle_{\Omega'} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Como se puede observar, no hay ecuación asociada a las variaciones de presión en el espacio de las sub-escalas, ya que sólo se ha considerado sub-escalas de desplazamientos. A partir de estas expresiones, y considerando la linealidad del operador divergencia en (4.55), se puede obtener:

$$-\langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot (2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]) \rangle_{\Omega'} = \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla p_h + \nabla \cdot 2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{u}_h] + \mathbf{b} \rangle_{\Omega'} \quad (4.56)$$

que corresponde a la ecuación (4.19). Esta expresión relaciona, a través de proyecciones sobre el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos, la sub-escala $\tilde{\mathbf{u}}$ con el residuo de la ecuación de equilibrio $\mathbf{R}_h = \nabla p_h + \nabla \cdot (2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{u}_h]) + \mathbf{b}$. La aproximación a la sub-escalas planteada en la sección 4.2, expresada en (4.21), consiste

en considerar que la sub-escala es proporcional a la proyección sobre el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos del residuo de la ecuación de equilibrio. Esta proporcionalidad está expresada en cada elemento mediante la matriz de parámetros algorítmicos (4.27). En este caso tal aproximación resulta:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e P_h^\perp \{[\nabla p_h + \nabla \cdot (2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{u}_h]) + \mathbf{b}]\} \quad \text{en } \Omega_e \quad (4.57)$$

donde el parámetro de estabilización se toma según (4.28). Ya que se emplean elementos lineales, las segundas derivadas de funciones de elementos finitos como $\nabla \cdot (\nabla^s \mathbf{u}_h)$ son nulas en este caso. Además, se considera que \mathbf{b} se aproxima mediante elementos del espacio elementos finitos, y por lo tanto $P_h^\perp(\mathbf{b}) = 0$. De esta manera la aproximación a la sub-escala es finalmente:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e (\nabla p_h - P_h(\nabla p_h)) \quad \text{en } \Omega_e \quad (4.58)$$

donde la proyección ortogonal de una variable se calcula como $P_h^\perp(\cdot) = (\cdot) - P_h(\cdot)$, y (\cdot) es la identidad de la variable.

Resta sólo insertar la aproximación obtenida para $\tilde{\mathbf{u}}$ en las ecuaciones correspondientes al espacio de elementos finitos (4.49a) y (4.49b). Teniendo en cuenta que se emplean elementos lineales y reemplazando la expresión (4.58) de las sub-escalas $\tilde{\mathbf{u}}$ en (4.53) se obtiene finalmente el término de estabilización:

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{V}_h) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, [\nabla p_h - \mathbf{\Pi}_h] \rangle_{\Omega_e} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

donde $\mathbf{\Pi}_h = P_h(\nabla p_h)$ es la proyección del gradiente de presión sobre el espacio de elementos finitos \mathcal{W}_h , que se define como una variable nodal adicional. Esta variable se calcula mediante la relación entre el gradiente de presión y su proyección $\mathbf{\Pi}_h$:

$$\langle \nabla p_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle = \langle \mathbf{\Pi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathcal{V}_h \quad (4.60)$$

Finalmente, como resultado del procedimiento desarrollado, la versión estabilizada propuesta para abordar el problema elástico mediante elementos lineales triangulares o tetraédricos es:

Hallar $[\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{\Pi}_h]^T \in \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h$ tales que:

$$\langle \nabla^s \mathbf{w}_h, 2\mu \operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{u}_h] \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h \rangle - l(\mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \quad (4.61a)$$

$$\langle q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h - \frac{1}{K} p_h \rangle - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla p_h - \mathbf{\Pi}_h \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad \forall q_h \quad (4.61b)$$

$$\langle \nabla p_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle - \langle \mathbf{\Pi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \quad (4.61c)$$

Como se puede observar, el planteamiento del problema mediante el método de las sub-escalas conduce a un sistema que incluye un término de estabilización en la ecuación de deformación volumétrica. Éste término involucra una variable adicional, la proyección del gradiente de presión. El término es función de la diferencia entre el gradiente de presión, discontinuo a nivel de elemento, y su correspondiente variable continua o “alisada”, su proyección; es decir $\sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla p_h - \Pi_h \rangle_{\Omega_e}$. Esto implica que, cuanto más fina sea la malla de elementos finitos tanto menor será el término de estabilización que se agrega. Los elementos de esta formulación presentan ventajas en comparación con el método de estabilización *GLS*, aplicado por (Klaas et al., 1999) en problemas de mecánica de sólidos. En esta formulación el término de estabilización para elementos lineales es $\sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla p_h \rangle_{\Omega_e}$. Los elementos lineales estabilizados por el método *GLS* también se pueden obtener en el marco del método de las sub-escalas. Esta alternativa difiere con respecto a la aproximación a las sub-escalas ortogonales en que no considera el concepto de proyección del residuo de la ecuación de elementos finitos sobre el espacio de elementos finitos sobre el espacio ortogonal al de elementos finitos, sino que el valor de la sub-escala se establece en función del residuo mismo; esta aproximación se denomina aproximación algebraica a las sub-escalas, *ASGS*; (Codina, 2000a). Fuera del marco del método de las sub-escalas ortogonales, *OSGS*, no se puede deducir ni justificar el término correspondiente a la proyección del gradiente de presión en el término de estabilización; dentro del marco del método *OSGS* este término surge de manera natural.

Desde un punto de vista conceptual, los elementos propuestos, basados en el método de estabilización de las sub-escalas ortogonales, *OSGS*, presentan una ventaja sobre los elementos basados en el método *GLS*. Efectivamente, la solución exacta de la ecuación diferencial del problema satisface las ecuaciones de la formulación estabilizada por el método *OSGS* establecidas para elementos lineales, en virtud de la presencia del término de proyección del gradiente de presión. Los elementos lineales de la formulación *GLS* no cumplen esta condición, que es más estricta que la definición usual de consistencia. Los elementos de la formulación *OSGS* son más precisos y más robustos que los elementos estabilizados por el método *GLS*. Esto significa que los elementos estabilizados propuestos, que corresponden a la formulación *OSGS*, exhiben menor sensibilidad a las variaciones de los parámetros físicos, en particular menor sensibilidad con respecto al parámetro de estabilización; esto queda demostrado en ensayos, como el test de flujo inducido en una cavidad (*driven cavity flow*) presentado en el capítulo de simulaciones de esta tesis y en (Oñate et al., 2002).

Mediante algunas simplificaciones de tipo algorítmico, se logra a partir de la formulación (4.61a)-(4.61c) un método con un bajo costo computacional adicional y buenas propiedades de estabilidad, particularmente adecuado para problemas no-

lineales, como los que se abordarán en las siguientes secciones.

4.3.4 Expresión matricial

La expresión matricial del problema algebraico asociado se puede escribir como:

Hallar $[\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{\Pi}]^T$, tales que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{dev}} & \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T & (-\frac{1}{K}\mathbf{M}_p - \tau\mathbf{L}) & \tau\mathbf{G}^T \\ \mathbf{0} & \tau\mathbf{G} & -\tau\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

donde $[\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{\Pi}]^T$ es el arreglo de variables nodales de desplazamientos, presión y proyección del gradiente de presión respectivamente.

Las submatrices elementales correspondientes a los nodos locales A y B son:

$$[\mathbf{K}_{\text{dev}}^{AB}]^{(e)} = \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_A^T \mathbf{D}_{\text{dev}} \mathbf{B}_B d\Omega \right]^{(e)} \quad (4.63)$$

$$[\mathbf{G}^{AB}]^{(e)} = \left[\int_{\Omega^e} [\mathbf{b}_A] N^B d\Omega \right]^{(e)}, \quad [\mathbf{b}_A] = [N_{,1}^A, \dots, N_{,n_{\text{dim}}}^A]^T \quad (4.64)$$

$$[L^{AB}]^{(e)} = \left[\int_{\Omega^e} [\mathbf{b}_A]^T [\mathbf{b}_B] d\Omega \right]^{(e)} \quad (4.65)$$

$$[M_p^{AB}]^{(e)} = \left[\int_{\Omega^e} N^A N^B d\Omega \right]^{(e)} \quad (4.66)$$

$$[\mathbf{M}^{AB}]^{(e)} = \left[\left(\int_{\Omega^e} N^A N^B d\Omega \right) \delta_{ij} \right]^{(e)}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.67)$$

$$[\mathbf{f}]^{(e)} = \left[\int_{\Omega^e} [\mathbf{N}^A]^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega^e} [\mathbf{N}^A]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right]^{(e)} \quad (4.68)$$

donde \mathbf{D}_{dev} es el arreglo matricial correspondiente a la componente desviadora del tensor constitutivo \mathbf{c}_{dev} . \mathbf{G} representa al operador gradiente y \mathbf{G}^T al operador divergencia. \mathbf{L} representa al operador Laplaciano, que proviene del término $\langle \nabla q_h, \nabla p_h \rangle$, y es el resultado del producto del operador divergencia y el operador gradiente. \mathbf{M} y \mathbf{M}_p son las matrices de masa asociadas a los desplazamientos y presiones, respectivamente.

Se puede obtener una expresión de este sistema que permita una comparación con la formulación \mathbf{u}/p del problema incompresible de la sección 3.3. La tercera ecuación de (4.62) corresponde a (4.61c). Ésta se puede interpretar como un “alisado” del gradiente de presión, que es discontinuo entre elementos cuando se utilizan elementos

lineales. A partir de esta relación, la proyección $\mathbf{\Pi}$ del gradiente de presión se puede expresar en función de \mathbf{P} como:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} \quad (4.69)$$

Si se inserta esta expresión en la segunda ecuación contenida en (4.62) se puede eliminar de manera *formal* la proyección $\mathbf{\Pi}$, lo que conduce a una expresión en función sólo de desplazamientos y presiones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{dev}} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & -\frac{1}{K}\mathbf{M}_p - \tau(\mathbf{L} - \mathbf{G}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

En la formulación estabilizada propuesta, representada por (4.70), la ecuación de la deformación volumétrica es:

$$\mathbf{G}^T\mathbf{U} - \frac{1}{K}\mathbf{M}_p\mathbf{P} - \tau(\mathbf{L} - \mathbf{G}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G})\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (4.71)$$

En el caso incompresible, cuando $K \rightarrow \infty$, el término $-\frac{1}{K}\mathbf{M}_p \rightarrow \mathbf{0}$ y la ecuación resultante representa la condición de incompresibilidad modificada:

$$\mathbf{G}^T\mathbf{U} - \tau(\mathbf{L} - \mathbf{G}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G})\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (4.72)$$

Ésta es comparable con la ecuación (3.37), $\mathbf{G}^T\mathbf{U} = \mathbf{0}$, de la formulación estándar del problema incompresible presentada en la sección 3.3. Se puede observar que la formulación estándar coincide con la representada en la ecuación (4.71) si no se considera el término $\tau(\mathbf{L} - \mathbf{G}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G})$. Éste representa formalmente el efecto estabilizador de la formulación por el método de las sub-escalas. El término $\mathbf{G}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}$ es análogo al Laplaciano \mathbf{L} , proviene del término $\langle \nabla q_h, \mathbf{\Pi}_h \rangle$. Desde este punto de vista, el término de estabilización $\tau(\mathbf{L} - \mathbf{G}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G})$ en (4.71) puede considerarse como una perturbación de la ecuación de la deformación volumétrica que evita los problemas de estabilidad que presenta la formulación estándar.

En (Codina, 2000a) se establece la relación entre el método de las sub-escalas ortogonales y el método de estabilización basado en la proyección del gradiente de presión (*PGP*), aplicado a las ecuaciones de Stokes; (Codina and Blasco, 2000), (Codina et al., 2001). Como motivación se presenta un método de paso fraccionado *FS*, aplicado al problema incompresible transitorio; ver también (Soto et al., 2001). A partir del método *FS* se obtiene en el caso transitorio el mismo término de estabilización 4.58, deducido por el método de las sub-escalas ortogonales. Por esta razón, el método *PGP* se puede considerar como un caso particular en el marco general del método de las sub-escalas. En el marco del método de las sub-escalas ortogonales *OSGS*, utilizado aquí, el efecto estabilizador de este término encuentra una

Algoritmo para resolver formulación estabilizada
<p>Resolver a nivel global: $\mathbf{U}^{(i)}$ y $\mathbf{P}^{(i)}$:</p> $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{dev}} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & -\frac{1}{K}\mathbf{M}_p - \tau\mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(i)} \\ \mathbf{P}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ -\tau\mathbf{G}^T\boldsymbol{\Pi}^{(i-1)} \end{bmatrix}$ <p>Calcular: $\boldsymbol{\Pi}^{(i)} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{P}^{(i)})$</p> <p>Efectuar nueva iteración: $i \leftarrow i + 1$</p>

Tabla 4.1: Algoritmo para resolver formulación estabilizada

explicación con sentido físico. Una explicación desde un punto de vista algebraico, basada en la condición de definición positiva de este término, se encuentra en (Codina et al., 1998), en el contexto de la mecánica de fluidos. La formulación planteada aquí conduce a un término de estabilización de signo contrario al usual en mecánica de fluidos, por lo que la matriz asociada al sistema es simétrica pero no es definida positiva; este hecho debe tenerse en cuenta al escoger el algoritmo de resolución del sistema. Entre los algoritmos de resolución de tipo iterativo no se puede emplear el método de los gradiente conjugados, adecuado para matrices definidas positivas, y es necesario recurrir a un método más general, como por ejemplo los método de minimización del residuo *GMRES*, o una versión específica para matrices simétricas como el método *MINRES*.

4.3.5 Aspectos de implementación

Existen varias alternativas por considerar para resolver el sistema (4.61a)-(4.61c), representado en (4.62). La variable adicional en la formulación $\boldsymbol{\Pi}_h$ es continua entre elementos y, por lo tanto no se puede condensar a nivel de elemental. La solución monolítica del sistema implicaría un costo computacional adicional muy grande. El desarrollo formal presentado en la sección anterior, que conduce a (4.70), sugiere un procedimiento de solución escalonado (“*staggered*”). En este caso, se puede emplear un procedimiento iterativo en el que los desplazamientos y presiones, $\mathbf{U}^{(i)}$ y $\mathbf{P}^{(i)}$ respectivamente, se calculan en una primera fase utilizando el valor de la iteración anterior $\boldsymbol{\Pi}^{(i-1)}$. En la segunda fase la proyección del gradiente de presión $\boldsymbol{\Pi}^{(i)}$ se resuelve de manera explícita, a partir de (4.69), en función de $\mathbf{P}^{(i)}$ calculado en la fase anterior. El algoritmo iterativo empleado se presenta en la tabla (4.1).

El cálculo de las proyecciones $\boldsymbol{\Pi}$ se transforma en un sistema trivial de ecuacio-

nes si se emplea la matriz de masa aglutinada como aproximación a \mathbf{M} . El costo computacional adicional de este algoritmo para el cálculo de la proyección es poco significativo en el contexto de un problema no-lineal, como se verá más adelante.

4.4 Formulación en régimen plástico

En esta sección se aborda el problema elasto-plástico. El desarrollo considera específicamente que el modelo constitutivo de plasticidad es de tipo J2. Este tipo de modelos considera que la deformación plástica es isocórica. El comportamiento del modelo elasto-plástico tiende a la incompresibilidad en la medida en que predominen las deformaciones plásticas sobre las elásticas. Por otro lado, si el coeficiente de Poisson del material ν es cercano a 0,5 el comportamiento es cuasi-incompresible aunque las deformaciones plásticas no se hallan desarrollado en forma considerable respecto a las elásticas. En cualquiera de estos casos, los elementos formulados mediante el método de Galerkin presentan dificultades para representar la incompresibilidad del medio. De manera similar a la presentada en la sección anterior, se desarrolla a continuación la formulación \mathbf{u}/p estabilizada de acuerdo con un conjunto de hipótesis para este caso específico.

4.4.1 Modelo constitutivo

El tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u}) \quad (4.73)$$

donde $\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$ es la componente desviadora del tensor de tensiones y p es la presión. Éstas se pueden expresar como:

$$p = K\varepsilon_v \quad (4.74)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = 2\mu \text{dev}[\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}^p] = 2\mu \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] \quad (4.75)$$

donde ε_v es la parte volumétrica de las deformaciones, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ son la deformación elástica y plástica respectivamente, μ y K son el módulo de cizallamiento y el módulo de compresibilidad del material, respectivamente, definidos anteriormente. Como se establece en 4.75, la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras elásticas es lineal en función de μ , es decir:

$$2\mu = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\|\text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}^e]\|} \quad (4.76)$$

La hipótesis común a los modelos de tipo J2 es que la deformación plástica es isocórica; es decir, la parte volumétrica de las deformaciones plásticas es nula, $\varepsilon_v^p = 0$. Por lo tanto:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \varepsilon_v = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.77)$$

Como se puede observar, la expresión del tensor de tensiones está desacoplada en componentes volumétrica y desviadora. Ésta es la opción natural para el modelo constitutivo empleado en esta formulación.

4.4.2 Formulación en el continuo

Forma fuerte

El problema en forma fuerte se define mediante las ecuaciones constitutivas anteriores, la ecuación de equilibrio en forma local y las condiciones de contorno. Éste se expresa como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, p]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, tal que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathcal{F} \quad (4.78)$$

donde:

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) : = \begin{bmatrix} -\nabla p - \nabla \cdot \mathbf{s}(\mathbf{u}) \\ -\frac{1}{K}p + \nabla \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (4.79a)$$

$$\mathcal{F} : = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.79b)$$

de acuerdo con las condiciones de contorno:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial \Omega_u \quad (4.80)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial \Omega_t \quad (4.81)$$

donde se ha reemplazado la expresión de las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ dada en términos de \mathbf{u} y p por la relación constitutiva (4.73).

Forma débil

La forma débil asociada se puede escribir en notación compacta como:

Hallar $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, p]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, tal que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W}_0 \quad (4.82)$$

donde:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}, p \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{f} \rangle - \langle \mathbf{w}, \bar{\mathbf{t}} \rangle_{\partial\Omega} \\ \langle q, \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle - \langle q, \frac{1}{K} p \rangle \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

$\mathbf{U} := [\mathbf{u}, p]^t \in \mathcal{W}_0$ y $\mathbf{W} := [\mathbf{w}, q]^t \in \mathcal{W}_0$ son los vectores de incógnitas y sus respectivas variaciones y \mathcal{W}_0 es el espacio de funciones admisibles.

El espacio $\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, donde \mathcal{V}_0 y \mathcal{Q} son los espacios de los desplazamientos y presiones. En el medio continuo éstos son respectivamente:

$$\mathcal{V}_0 = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega_u \} \text{ y } \mathcal{Q} = L^2(\Omega) \quad (4.84)$$

4.4.3 Planteamiento en multiescalas

La solución en el medio continuo se aproxima por:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}} \quad (4.85)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h &:= [\mathbf{u}_h, p_h]^T & \tilde{\mathbf{U}} &:= [\tilde{\mathbf{u}}, 0]^T \\ \mathbf{W}_h &:= [\mathbf{w}_h, p_h]^T & \tilde{\mathbf{W}} &:= [\tilde{\mathbf{w}}, 0]^T \end{aligned} \quad (4.86)$$

Estas componentes de la solución corresponden a la descomposición del espacio en que se plantea el problema continuo $\mathcal{W} = \mathcal{W}_h \oplus \tilde{\mathcal{W}}$, de manera que $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_{h,0}$ y $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0$ respectivamente.

Además, siguiendo un procedimiento similar al detallado para el problema de incompresibilidad elástica en la sección anterior, el problema en el continuo (4.82) se transforma en:

Hallar $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_{h,0}$ y $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0$ tal que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (4.87)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{0} \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (4.88)$$

Obsérvese que la ecuación (4.87) expresa el balance de momentum y la ecuación de la deformación volumétrica en el espacio de elementos finitos $\mathcal{W}_{h,0}$. La ecuación

(4.88) se define en el espacio $\widetilde{\mathcal{W}}_0$, y tal como antes se utilizará para obtener una aproximación a las sub-escalas.

Previamente al desarrollo que se presenta a continuación se introduce una consideración con respecto a las tensiones desviadoras, teniendo en cuenta que el efecto de las sub-escalas es de orden $\tilde{\mathbf{u}} \sim \mathcal{O}(h^2)$; (Codina, 2000b), (Oñate et al., 2002). De acuerdo con esto, las componentes desviadoras de las tensiones $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ se pueden aproximar mediante un desarrollo en serie de Taylor de primer orden alrededor de \mathbf{u}_h , $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x)|_{x=x_0} \Delta x$, despreciando los términos de orden del cuadrado de las sub-escalas y mayores:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h) + \bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{u}})^2$$

donde $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h}$ es el tensor constitutivo tangente desviador evaluado en $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$. Éste tensor relaciona las tensiones desviadoras y las deformaciones totales. El producto tensorial $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}$ representa un incremento de tensiones desviadoras por efecto de las sub-escalas, $\tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}})$, que se pueden considerar desde este punto de vista como una perturbación superpuesta a \mathbf{u}_h . Este producto involucra en forma efectiva sólo la componente desviadora de las deformaciones, debido a que el tensor $\bar{\mathbf{c}}_s$ es desviador. Es decir, $\tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \text{dev}[\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]$. Cuando se desarrolla el flujo plástico, las deformaciones desviadoras totales, particularmente las plásticas, crecen con respecto a las tensiones desviadoras en forma considerablemente mayor que en régimen elástico. El incremento de tensiones desviadoras correspondiente a las deformaciones desviadoras totales asociadas a las sub-escalas se puede calcular de manera sencilla si se hace una aproximación al módulo de $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h}$ en función de 2μ , que según (4.75) representa la relación entre tensiones desviadoras y la componente elástica de las deformaciones desviadoras. Efectivamente, a partir del valor de 2μ dado por (4.76), la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras totales se puede estimar mediante el coeficiente $2\mu^*$, calculado como:

$$2\mu^* = 2\mu \frac{\|\text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}^e]\|}{\|\text{dev}[\nabla^s \mathbf{u}]\|} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\|\text{dev}[\nabla^s \mathbf{u}]\|} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} \quad (4.89)$$

El coeficiente $2\mu^*$, que podría denominarse módulo de cizallamiento efectivo, se puede interpretar en la curva de tensiones desviadoras y deformaciones desviadoras como el módulo secante en $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$, tal como se puede apreciar en la figura 4.2. Este coeficiente $2\mu^*$ representa el efecto del flujo plástico en la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras totales; por lo tanto, debe considerarse cuando se desarrolle el régimen plástico. Si las deformaciones plásticas son relativamente pequeñas en comparación con las elásticas se puede obtener resultados adecuados y comportamiento estable de la presión utilizando el módulo de cizallamiento elástico μ . En fase de carga o descarga elástica el módulo de cizallamiento

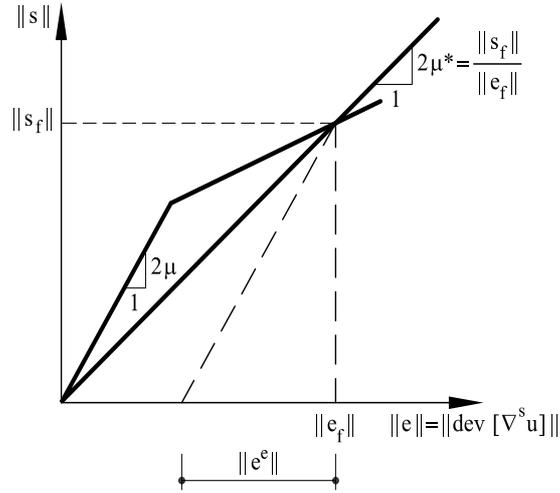


Figura 4.2: Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras en modelo elasto-plástico con plasticidad J2.

debe tomarse igual al valor elástico, es decir igual a μ . De esta manera, el módulo de cizallamiento es:

$$\mu' = \begin{cases} \mu & \text{en carga o descarga elástica} \\ \mu^* & \text{si se desarrolla flujo plástico} \end{cases} \quad (4.90)$$

La interpretación de la aproximación del efecto sobre el módulo de cizallamiento efectivo $2\mu^*$ como el módulo secante en la curva de tensiones vs. deformaciones en $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$ permite hacer una analogía entre el régimen plástico y el caso de un modelo de daño, en el cuál esta misma aproximación surge de manera natural y se puede aplicar de manera sencilla, de acuerdo con las características de ese modelo constitutivo..

Con estos resultados, se puede aproximar el producto tensorial $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]$ como:

$$\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}] = \tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}}) \cong 2\mu' \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]$$

De esta manera, si bien es cierto que $\mathbf{s}(\cdot)$ es no-lineal, es posible descomponerla en la suma de dos contribuciones. Por un lado $\mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h)$ proveniente del efecto inducido por el campo estándar de elementos finitos y por otro lado $\tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}})$, correspondiente al efecto de las sub-escalas. Es decir:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) \cong \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h) + \tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (4.91)$$

De acuerdo con lo anterior, y teniendo en cuenta la linealidad del operador divergencia, la expresión (4.87) se puede separar de manera aditiva:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (4.92)$$

donde $\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h)$ y $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h)$ son respectivamente:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h \rangle_{\Omega'} + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h \rangle_{\Omega'} - l(\mathbf{w}_h) \\ \langle q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h - \frac{1}{K} p_h \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, 2\mu' \operatorname{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}] \rangle_{\Omega'} \\ \langle q_h, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

El segundo término representa el efecto de las sub-escalas en la solución de elementos finitos. La integración por partes de este término, con la finalidad de reducir el orden de derivación sobre $\tilde{\mathbf{u}}$, da como resultado:

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} -\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\mu' \operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{w}_h]) \rangle_{\Omega'} \\ -\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla q_h \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

El asunto que queda pendiente es obtener la aproximación a las sub-escalas.

La descomposición aditiva del tensor de tensiones (4.91) se puede introducir también en la ecuación (4.88), correspondiente al espacio de las sub-escalas. Esta se expresa del siguiente modo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{W}}) = \begin{bmatrix} \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot \mathbf{s}_h \rangle_{\Omega'} + \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{s}} \rangle_0 + \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla p_h \rangle_{\Omega'} + \langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{b} \rangle_{\Omega'} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.96)$$

Como se puede observar no hay ecuación asociada a las variaciones de presión, puesto que sólo se ha considerado sub-escalas de desplazamientos. En esta expresión también es posible hacer la descomposición de (4.88) en las partes asociadas respectivamente a la escala de elementos finitos y a la sub-escala:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{0} \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (4.97)$$

lo que conduce a:

$$-\langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot (2\mu' \operatorname{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]) \rangle_{\Omega'} = \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot \mathbf{s}_h + \nabla p_h + \mathbf{b} \rangle_{\Omega'} \quad (4.98)$$

Esta es la relación entre la sub-escala y el residuo de la ecuación de balance de momento $\mathbf{R}_h = \nabla \cdot \mathbf{s}_h + \nabla p_h + \mathbf{b}$, que es similar a la obtenida en la sección 4.3.3. De acuerdo con las consideraciones adoptadas en la sección 4.2.2, se escoge el espacio de las sub-escalas ortogonales, $\tilde{\mathcal{W}}_0 = \mathcal{W}_h^\perp$, y a partir de (4.98) la sub-escala $\tilde{\mathbf{u}}$ se puede aproximar en cada elemento como:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e P_h^\perp \{\mathbf{R}_h\} \in \mathcal{W}_h^\perp \quad (4.99)$$

donde τ_e es el parámetro de estabilización y $P_h^\perp(\cdot)$ representa la proyección sobre el espacio \mathcal{W}_h^\perp . El parámetro de estabilización en elementos lineales se calcula como:

$$\tau_e = \frac{ch^2}{2\mu'} \quad (4.100)$$

donde el coeficiente μ' tiene en cuenta, si es el caso, el efecto del flujo plástico en las deformaciones desviadoras, que en general se calcula en cada punto de integración; en el caso de elementos lineales con un sólo punto de integración por elemento este valor es único por cada elemento. Esta corrección en el parámetro de estabilización es una contribución original en este trabajo. La mayor robustez de los elementos propuestos, estabilizados con el método *OSGS*, los hace menos sensibles a las simplificaciones consideradas en la aproximación al parámetro de estabilización en comparación con los elementos estabilizados mediante otras técnicas, como la *GLS* en los elementos propuestos en (Klaas et al., 1999).

De acuerdo a lo anterior $\tilde{\mathbf{u}}$ es la proyección del residuo \mathbf{R}_h sobre el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos ponderada por el parámetro de estabilización. Teniendo en cuenta que las segundas derivadas de funciones lineales de elementos finitos son nulas y que $P_h^\perp \{\mathbf{b}\} = \mathbf{0}$, tal como se consideró para la expresión similar en la sección 4.3.3, se obtiene en cada elemento:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e (\nabla p_h - P_h (\nabla p_h)) \quad (4.101)$$

Si se inserta esta aproximación en (4.95) y dado que $\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\mu' \text{dev} [\nabla^s \mathbf{w}_h]) \rangle_{\Omega_e} \equiv 0$ para elementos lineales se obtiene:

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla p_h - \mathbf{\Pi}_h \rangle_{\Omega_e} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

donde $\mathbf{\Pi}_h = P_h (\nabla p_h)$ es la proyección del gradiente de presión sobre el espacio de elementos finitos \mathcal{W}_h .

Finalmente, la versión estabilizada propuesta para resolver el problema elasto-plástico incompresible en rango infinitesimal mediante elementos lineales triangulares o tetraédricos es:

Hallar $[\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{\Pi}_h]^T \in \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h$ tales que:

$$\langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h \rangle - l(\mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \quad (4.103a)$$

$$\langle q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h - \frac{1}{K} p_h \rangle - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla p_h - \mathbf{\Pi}_h \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad \forall q_h \quad (4.103b)$$

$$\langle \nabla p_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle - \langle \mathbf{\Pi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \quad (4.103c)$$

Se puede observar que en la formulación propuesta el término de estabilización afecta sólo a la ecuación de la deformación volumétrica. Por lo tanto, la ecuación de equilibrio se puede resolver tal como en la formulación estándar.

Obsérvese que, de acuerdo con las consideraciones adoptadas, en todas las ecuaciones del desarrollo aparece el valor total de la sub-escala, no el incremental. Por ejemplo en la ecuación (4.98), a partir de la cual se obtiene la aproximación a $\tilde{\mathbf{u}}$.

Esto simplifica el procedimiento de cálculo en comparación con otras opciones en las que, a partir de la linealización de la ecuación de equilibrio o del tensor de tensiones, se obtiene una aproximación al valor incremental de $\tilde{\mathbf{u}}$. Por ejemplo, en (Garikipaty and Hughes, 1998) y (Garikipaty and Hughes, 2000) se aplica el método de sub-escalas al problema unidimensional de localización; en estas publicaciones se emplea una aproximación algebraica a las sub-escalas *ASGS* en vez de las sub-escalas ortogonales *OSGS* empleadas en este trabajo. En (Garikipaty and Hughes, 2000) se definen funciones de interpolación para aproximar $\tilde{\mathbf{u}}$, de manera similar al método *EAS*. En ambos casos, después de linealizar el problema, el desarrollo implica una aproximación al valor incremental de las sub-escalas, a partir de:

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{F}_1 [\mathbf{b}] + \mathcal{F}_2 [\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) - (p + \Delta p) - \bar{\mathbf{c}}_s : \nabla^s \Delta \mathbf{u}_h] \quad (4.104)$$

donde \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 son funcionales lineales y $\bar{\mathbf{c}}_s = \bar{\mathbf{c}}_s(\mathbf{u})$ es la componente desviadora del módulo constitutivo tangente, que depende del valor actual de $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}$; ver (Garikipaty and Hughes, 2000). Este procedimiento conduce a la necesidad de actualizar el valor total de $\tilde{\mathbf{u}}$ en función del incremento calculado y considerar este valor en la componente desviadora del tensor de tensiones $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ y del tensor de tensiones $\bar{\mathbf{c}}_s(\mathbf{u})$.

4.4.4 Aspectos de implementación

El problema plástico implica la no-linealidad del sistema de ecuaciones y, por lo tanto, la solución de (4.103a)-(4.103c) se efectúa mediante procedimientos de tipo incremental-iterativo. En este marco, existen diversas alternativas para calcular la proyección Π . De acuerdo con el planteamiento presentado en la sección 4.3, la estrategia básica consiste en desacoplar la proyección Π y resolver el sistema \mathbf{u}/p , a partir de lo cual existen diversas posibilidades de concatenar los algoritmos de cálculo. En (Codina et al., 2001) se aborda la implementación del método *PGP* aplicado al problema de Navier-Stokes y se analizan diversas alternativas..

La estrategia adoptada en este trabajo consiste en resolver simultáneamente las ecuaciones de balance de momentum y de deformación volumétrica en $t = t^{(n+1)}$. En las iteraciones para hallar el equilibrio, correspondiente a este paso de tiempo, se usa el valor de la proyección del gradiente de presión Π_h en $t = t^{(n)}$. Esta estrategia ha demostrado ser muy eficaz desde el punto de vista computacional, sin perjudicar la robustez y precisión del método. El valor de la proyección del gradiente de presión, la proyección Π_h^n , se evalúa en base al valor convergido del gradiente de presión en el paso de tiempo anterior ∇p_h^n como:

$$(\nabla p_h^n, \boldsymbol{\eta}_h) - (\Pi_h^n, \boldsymbol{\eta}_h) = 0 \quad (4.105)$$

Esta ecuación se transforma en un sistema trivial, si se emplea la matriz de masa aglutinada. Con este valor de $\mathbf{\Pi}_h^n$, las ecuaciones del sistema que se resuelve en el paso de tiempo $n + 1$ son:

$$\begin{aligned} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h^{n+1,i}) \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h^{n+1,i} \rangle - l^{n+1}(\mathbf{w}_h) &= 0 \\ \langle q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i} - \frac{1}{K} p_h^{n+1,i} \rangle - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla p_h^{n+1,i} - \mathbf{\Pi}_h^n \rangle_{\Omega_e} &= 0 \end{aligned}$$

En cada paso de tiempo se debe resolver un sistema no-lineal de ecuaciones. Este sistema se puede resolver aplicando, por ejemplo, el método de Newton-Raphson. Los residuos correspondientes a estas ecuaciones en la iteración i se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} r_1^{n+1,i} &= \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h^{n+1,i}) \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h^{n+1,i} \rangle - l^{n+1}(\mathbf{w}_h) \quad (4.107) \\ r_2^{n+1,i} &= \langle q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i} - \frac{1}{K} p_h^{n+1,i} \rangle - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla p_h^{n+1,i} - \mathbf{\Pi}_h^n \rangle_{\Omega_e} \end{aligned}$$

En cada iteración se debe resolver el sistema lineal:

$$\begin{aligned} a(\Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1}, \mathbf{w}_h) + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, \Delta p_h^{n+1,i+1} \rangle &= -r_1^{n+1,i} \\ \langle q_h, \nabla \cdot \Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1} - \frac{1}{K} \Delta p_h^{n+1,i+1} \rangle - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla \Delta p_h^{n+1,i+1} \rangle_{\Omega_e} &= -r_2^{n+1,i} \end{aligned}$$

El algoritmo para resolver el problema elasto-plástico en deformaciones infinitesimales se muestra en la tabla (4.2). \mathbf{K}_{dev} es la matriz correspondiente al término $a(\Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1}, \mathbf{w}_h)$, cuya sub-matriz típica a nivel de elemento es $[\mathbf{K}_{dev}^{AB}]^{(e)} = [\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_A^T \mathbf{D}_{dev} \mathbf{B}_B d\Omega]^{(e)}$, donde \mathbf{D}_{dev} es el arreglo matricial de la componente desviadora del tensor constitutivo tangente algorítmico. Las demás matrices, \mathbf{G} , \mathbf{L} , \mathbf{M}_p y \mathbf{M} , son las mismas que en la sección 4.3, así como los vectores de variables nodales $[\mathbf{U}, \mathbf{P}]^T$. Los residuos \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 son los vectores asociados a los residuos $r_1^{n+1,i}$ y $r_2^{n+1,i}$. Estos son respectivamente:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{f}_1^{int} - \mathbf{f}_1^{ext} \quad (4.108)$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{f}_2^{int} \quad (4.109)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^{int} &= \sum_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_1^{int}]^{(e)} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_A^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right]^{(e)} + [\mathbf{G}^{AB} p^B]^{(e)} \\ \mathbf{f}_1^{ext} &= \sum_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_1^{ext}]^{(e)} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \left[\int_{\Omega_e} [\mathbf{N}^A]^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega_e} [\mathbf{N}^A]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right]^{(e)} \end{aligned}$$

Algoritmo para resolver problema elasto-plástico	
0.	Paso de carga $n + 1$: Inicializar $i = 0 \rightarrow [\mathbf{U}, \mathbf{P}]^{T(n+1,0)} = [\mathbf{U}, \mathbf{P}]^{T(n)}$
1.	Iteración: Resolver a nivel global: $\Delta \mathbf{U}^{(n+1,i+1)}$ y $\Delta \mathbf{P}^{(n+1,i+1)}$:
2.	$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{dev}} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & -\frac{1}{K} \mathbf{M}_p - \tau \mathbf{L} \end{bmatrix}^{(n+1,i)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{P}^{(i)} \end{bmatrix}^{(n+1,i+1)} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}^{(n+1,i)}$
3.	Actualizar: $[\mathbf{U}, \mathbf{P}]^{T(n+1,i+1)} = [\mathbf{U}, \mathbf{P}]^{T(n+1,i)} + [\Delta \mathbf{U}, \Delta \mathbf{P}]^{T(n+1,i+1)}$
4.	Evaluar convergencia
5.	No: Efectuar nueva iteración: $i \leftarrow i + 1$. (Ir a 1)
6.	Si: Valores convergidos: $[\mathbf{U}, \mathbf{P}]^{T(n+1)} = [\mathbf{U}, \mathbf{P}]^{T(n+1,i+1)}$
7.	Calcular: $\mathbf{\Pi}^{(n+1)} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{P}^{(n+1)}$
8.	Nuevo paso de carga: $n \leftarrow n + 1$. (Ir a 0)

Tabla 4.2: Algoritmo para resolver problema elasto-plástico en deformaciones infinitesimales

$$\mathbf{f}_2^{\text{int}} = \mathbb{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_2^{\text{int}}]^{(e)} = \mathbb{A}_{e=1}^{n_{elm}} \left[(\mathbf{G}^{AB})^T \mathbf{u}^B \right]^{(e)} - [\mathbf{M}_p^{AB} p^B]^{(e)} - \tau_e \left([\mathbf{L}^{AB} p^B]^{(e)} - [(\mathbf{G}^{AB})^T \mathbf{\Pi}^B]^{(e)} \right)$$

Capítulo 5

Formulación de elementos estabilizados en grandes deformaciones

5.1 Introducción

En este capítulo se desarrolla la formulación de elementos triangulares y tetraédricos con interpolaciones lineales y continuas de desplazamientos y presión \mathbf{u}/p en el rango de grandes deformaciones. Se abordan en este rango tanto el problema elástico como el problema elasto-plástico. En cada caso se presentan las hipótesis y los aspectos de implementación que se han considerado con la finalidad de obtener elementos con propiedades de exactitud y estabilidad mejoradas y bajo costo computacional.

5.2 Régimen Elástico

5.2.1 Modelo constitutivo

Se considera un modelo constitutivo hiperelástico, desacoplado en sus componentes volumétrica y desviadora. En modelos hiperelásticos, las relaciones tensión-deformación desacopladas se pueden obtener a partir de funciones de energía almacenada W que a su vez estén desacopladas en componentes volumétrica y desviadora; (Simo and Hughes, 1998), del tipo:

$$W = KU(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{b}}) \quad (5.1)$$

donde U y \bar{W} son las componentes volumétrica y desviadora de W , respectivamente. J es el determinante del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} y $\bar{\mathbf{b}}$ es la componente

isocórica del tensor izquierdo de Cauchy-Green, $\bar{\mathbf{b}} = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{b}$, \mathbf{b} es el tensor elástico izquierdo de Cauchy Green; una descripción detallada de este tipo de modelos se puede encontrar en (Simo and Hughes, 1998). Se pueden definir diversas expresiones válidas para U y \bar{W} . En este trabajo se utilizan las funciones propuestas en (Simo et al., 1985) y (Simo, 1992):

$$U(J) = \frac{1}{2}(\ln J)^2 \quad (5.2a)$$

$$\bar{W}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\mu(\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}] - 3) \quad (5.2b)$$

donde μ es el parámetro de Lamé, denominado módulo de cizallamiento (que se denota también por G). Las tensiones de Kirchhoff, $\boldsymbol{\tau}$, de este modelo se pueden expresar como:

$$\boldsymbol{\tau} = T\mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u}) \quad (5.3a)$$

donde $\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \text{dev}[\boldsymbol{\tau}]$ es la componente desviadora del tensor de tensiones y la componente volumétrica es $\boldsymbol{\tau}_{\text{vol}} = T\mathbf{1}$. Las componentes del tensor de tensiones $\boldsymbol{\tau}$ que se derivan directamente de éstas son:

$$T = K[JU'(J)] \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}] \quad (5.4b)$$

En las referencias citadas se puede encontrar la deducción de estas expresiones. En éstas, la componente volumétrica se define en función de la presión p , que es la componente media del tensor de tensiones de Cauchy. En este trabajo esta componente se define de manera ligeramente diferente, en función directamente de la componente media del tensor de Kirchhoff, T . La relación entre las definiciones de la componente volumétrica en aquellas referencias y la que se emplea en esta formulación es:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{vol}} = \underbrace{Jp}_T \mathbf{1} = T\mathbf{1} \quad (5.5)$$

Como se puede observar, la relación entre éstas es la que existe entre los tensores de tensión de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ y de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \quad (5.6)$$

Queda establecido en (5.4b), como se puede observar en la figura 5.1, que la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras expresadas mediante el tensor izquierdo de Cauchy-Green es lineal en función de μ :

$$\mu = \frac{\|\mathbf{s}(\mathbf{u})\|}{\|\text{dev}[\bar{\mathbf{b}}]\|} \quad (5.7)$$

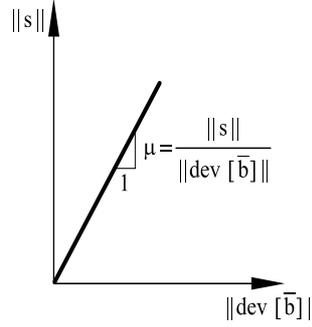


Figura 5.1: Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras expresadas en función del tensor izquierdo de Cauchy-Green correspondientes a un modelo hiperelástico.

5.2.2 Formulación en el medio continuo

Forma fuerte

La forma fuerte del problema se puede expresar tanto en la configuración espacial Ω_t , como en la configuración material Ω . El paso de una a otra expresión se hace mediante el cambio de variables en función de la transformación o ecuación del movimiento $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X})$ y las operaciones de transporte de tensores, presentadas en el anexo D.

En la configuración material, la ecuación de equilibrio en forma local y las condiciones de contorno en la configuración material Ω , definen el problema en forma fuerte como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, T]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, tales que:

$$\text{DIV } \mathbf{P} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (5.8a)$$

$$-\frac{1}{K}T + [JU'(J)]_{J=J(\mathbf{u})} = 0 \quad (5.8b)$$

de acuerdo con las condiciones de contorno:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_u \Omega \quad (5.9)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_t \Omega \quad (5.10)$$

donde el primer tensor de tensiones de Piola Kirchhoff \mathbf{P} viene dado por la relación $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}$, \mathbf{n} es la normal a $\partial_t \Omega$ y las ecuaciones constitutivas (5.3a), (5.4a), (5.4b).

En la configuración espacial, la ecuación de equilibrio en forma local y las condiciones de contorno en la configuración espacial Ω_t . Las variables, tales como fuerzas másicas, tracciones prescritas, etc., expresadas en función de coordenadas espaciales se indicarán aquí mediante el sub-índice t . El problema en forma fuerte se define en la configuración espacial como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}}_t : \partial_t \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega_t$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b}_t : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, T]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, tales que:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}_t = \mathbf{0} \quad (5.11a)$$

$$-\frac{1}{K}T + [JU'(J)]_{J=J(\mathbf{u})} = 0 \quad (5.11b)$$

de acuerdo con las condiciones de contorno:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_u \Omega_t \quad (5.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t = \bar{\mathbf{t}}_t \quad \text{en } \partial_t \Omega_t \quad (5.13)$$

donde el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ viene dado por la relación (5.6), \mathbf{n}_t es la normal a $\partial_t \Omega_t$ y las ecuaciones constitutivas (5.3a), (5.4a), (5.4b).

Esta formulación es válida tanto en el caso compresible como en el límite incompresible.

Forma débil

La forma débil del problema, en particular la ecuación de equilibrio, se puede expresar en descripción material o espacial. Para plantear la forma débil es necesario definir el espacio de funciones de ponderación, o variaciones admisibles. Este espacio contiene los desplazamientos \mathbf{w} que, superpuestos sobre la configuración deformada Ω_t verifican la condición de contorno en $\partial_u \Omega_t$. Tal como se ha enunciado, éstos se definen sobre la configuración deformada, pero pueden referenciarse respecto a coordenadas materiales o espaciales. En coordenadas materiales se define el espacio de desplazamientos admisibles como:

$$\mathcal{V}_0 = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{0} \text{ en } \partial_u \Omega \} \quad (5.14)$$

Las funciones de ponderación, o desplazamientos admisibles, \mathbf{w} son independientes del tiempo.

La forma débil de la ecuación de equilibrio en descripción material es:

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} : \text{GRAD } \mathbf{w} \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (5.15)$$

y en descripción espacial es:

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\tau} : \nabla^s \mathbf{w}_t \frac{dv}{J} = \int_{\Omega_t} \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{b}_t \, dv + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w}_t \cdot \bar{\mathbf{t}}_t \, d\gamma \quad (5.16)$$

donde las funciones de ponderación, o desplazamientos admisibles referenciados en coordenadas espaciales, se denominan \mathbf{w}_t . Éstas se relacionan con las referenciadas en coordenadas materiales según: $\mathbf{w} = \mathbf{w}_t(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}))$; es decir, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_t|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})}$. El desarrollo de estas expresiones se puede encontrar en el anexo E, y en la bibliografía en obras como (Simo and Huges, 1998).

Todos los integrandos en estas ecuaciones son magnitudes escalares y, por lo tanto, los valores correspondientes no dependen de la configuración o de las coordenadas en que se los describa. Dada la objetividad del integrando las expresiones son equivalentes. Sin embargo, aunque la descripción material y la descripción espacial son equivalentes, desde el punto de vista de la implementación las diferencias entre estas alternativas se hacen notables en las formulaciones mixtas como ésta, y en particular en la formulación de la matriz de rigidez. La implementación del problema en función de variables espaciales es más sencilla, implica menor número de términos y de operaciones a realizar, y por lo tanto tiene menor costo computacional; (Simo et al., 1993), (Perez, 2000). Es por esto por lo que se adopta aquí esta opción. En consecuencia, se define el problema en forma débil como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, T]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, tal que:

$$\langle \nabla^s \mathbf{w}, (T\mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u})) \rangle - l(\mathbf{w}) = 0 \quad (5.17a)$$

$$\left\langle q, -\frac{1}{K}T + [JU'(J)]_{J=J(\mathbf{u})} \right\rangle = 0 \quad (5.17b)$$

$\forall \mathbf{W} := [\mathbf{w}, q]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, de acuerdo con la ecuación constitutiva (5.4b), donde:

$$l(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{b}) + (\mathbf{w}, \bar{\mathbf{t}})_{\Gamma_t}$$

Obsérvese que en esta formulación las integrales se calculan en la configuración de referencia y que los integrandos en la ecuación de equilibrio están planteados en función de variables espaciales expresadas en función de coordenadas materiales; ver anexo E.

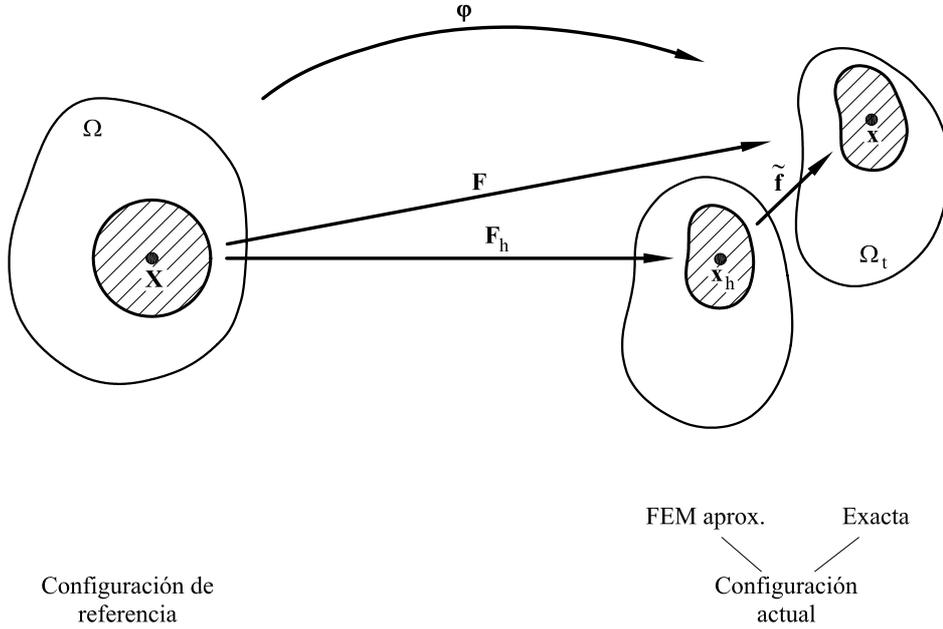


Figura 5.2: Esquema de las relaciones cinemáticas en el problema elástico mediante sub-escalas.

5.2.3 Planteamiento en multiescalas

La solución en el medio continuo se aproxima por:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}} \quad (5.18)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h &:= [\mathbf{u}_h, T_h]^T & \tilde{\mathbf{U}} &:= [\tilde{\mathbf{u}}, 0]^T \\ \mathbf{W}_h &:= [\mathbf{w}_h, q_h]^T & \tilde{\mathbf{W}} &:= [\tilde{\mathbf{w}}, 0]^T \end{aligned} \quad (5.19)$$

son las componentes de la solución que corresponden a la descomposición del espacio en que se plantea el problema $\mathcal{W} = \mathcal{W}_h \oplus \tilde{\mathcal{W}}$, de manera que $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_{h,0}$ y $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0$, respectivamente.

Las relaciones cinemáticas entre las componentes de los desplazamientos, en el espacio de elementos finitos y en el espacio de las sub-escalas, respectivamente, se definen a partir de:

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{X} + \mathbf{u}_h}_{\mathbf{x}_h} + \tilde{\mathbf{u}} \quad (5.20a)$$

donde \mathbf{X} es la coordenada de un punto en la configuración de referencia, \mathbf{x} la coordenada espacial correspondiente a ese punto en el medio continuo y \mathbf{x}_h el valor

de esta coordenada evaluado en función de los desplazamientos calculados en el espacio de elementos finitos. Las relaciones cinemáticas en función del gradiente de deformaciones se pueden expresar como:

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{f}} \mathbf{F}_h \quad (5.21)$$

donde $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ representa el gradiente de deformaciones, $\mathbf{F}_h = \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial \mathbf{X}}$ es el valor de este tensor evaluado en función de la aproximación por elementos finitos y $\tilde{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_h}$ es el gradiente de deformaciones relativo a la configuración deformada representada mediante las coordenadas \mathbf{x}_h . Efectivamente, esta expresión se puede obtener a partir de (5.20a), aplicando el operador $\text{GRAD}(\cdot) = \partial_{\mathbf{X}}(\cdot)$ a ambos miembros:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}_h + \tilde{\mathbf{J}} \quad (5.22)$$

donde $\mathbf{J}_h = \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{X}}$ y $\tilde{\mathbf{J}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{X}}$ son los tensores gradiente de desplazamientos correspondientes a la escala de elementos finitos y las sub-escalas, respectivamente; realizando operaciones directas, se obtiene finalmente:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_h + \tilde{\mathbf{J}} \quad (5.23)$$

$$= \underbrace{(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{F}_h^{-1})}_{\tilde{\mathbf{f}}} \mathbf{F}_h \quad (5.24)$$

Esta expresión multiplicativa explica la interpretación de $\tilde{\mathbf{f}}$ en el entorno local de un punto material como el gradiente de deformaciones relativo a la configuración deformada caracterizada por \mathbf{F}_h .

El problema en el medio continuo se transforma en:

Hallar $\mathbf{U}_h := [\mathbf{u}_h, T_h]^T \in \mathcal{W}_{h,0} = \mathcal{V}_{h,0} \times \mathcal{Q}_h$ y $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0$, dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\tilde{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega_t$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, tal que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (5.25a)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (5.25b)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) &= \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, [T_h \mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})] \rangle - l(\mathbf{w}_h) \\ \langle q_h, (-\frac{T_h}{K} + [JU'])|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h+\tilde{\mathbf{u}}} \rangle \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \begin{bmatrix} \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot ([T_h \mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})] + \mathbf{b}) \rangle \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$l(\mathbf{w}_h) = (\mathbf{w}_h, \mathbf{b}) + (\mathbf{w}_h, \bar{\mathbf{t}})_{\partial_t}$$

y $\mathbf{W}_h := [\mathbf{w}_h, q_h]^T \in \mathcal{W}_{h,0} = \mathcal{V}_{h,0} \times \mathcal{Q}_h$ y $\widetilde{\mathbf{W}} \in \widetilde{\mathcal{W}}_0$.

Tal como se ha visto en las secciones 4.3 y 4.4, parte del procedimiento consiste en identificar los efectos de las sub-escalas en relación con la escala de elementos finitos. Esto se debe hacer tanto en la expresión (5.25b) en el espacio de las sub-escalas, para obtener una aproximación del valor de las mismas, como en la expresión (5.25a) para evaluar el efecto de éstas en el espacio de elementos finitos. El problema de elasticidad en el rango de deformaciones finitas presenta tanto la no-linealidad material como la geométrica con respecto a los desplazamientos. En las expresiones del problema esto se manifiesta no sólo en la ecuación de balance de momentum, como ocurría en el problema plástico en rango infinitesimal, sino también en la ecuación del cambio volumétrico. La no-linealidad de estas ecuaciones dificulta identificar estos efectos y la relación que existe entre ellos. Con la finalidad de obtener una formulación mejorada y a la vez de bajo costo computacional, es necesario hacer una serie de simplificaciones a partir de estas expresiones.

En (5.25a) y en (5.25b) se puede descomponer el tensor de tensiones $\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \widetilde{\mathbf{u}})$ en sus componentes asociadas a los desplazamientos en el espacio de elementos finitos y las sub-escalas, respectivamente. Esto se puede hacer mediante un desarrollo en serie de Taylor de primer orden, o mediante algunas otras simplificaciones. Por ejemplo, si se considera que $\mathbf{F} \cong \mathbf{F}_h$ al efectuar algunas operaciones, tales como las de transporte de tensores *pull-back* y *push forward*. De esta manera, el tensor de Cauchy-Green, $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, se puede aproximar como:

$$\mathbf{b} \cong \mathbf{b}_h + 2\nabla_{\mathbf{x}}^s \widetilde{\mathbf{u}} \quad (5.26)$$

donde $\nabla_{\mathbf{x}}^s$ es el operador gradiente material simétrico. Efectivamente, si se reemplaza la expresión del gradiente de deformaciones $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}_h + \widetilde{\mathbf{J}}$, y se efectúan algunas operaciones directas y se desprecian los términos cuadráticos en $\widetilde{\mathbf{J}}$, se obtiene:

$$\mathbf{b} = \mathbf{I} + \mathbf{J}_h \underbrace{[\mathbf{I} + (\mathbf{F} - \mathbf{F}_h)]}_{\cong \mathbf{I}} + \underbrace{[\mathbf{I} + (\mathbf{F} - \mathbf{F}_h)^T]}_{\cong \mathbf{I}} \mathbf{J}_h^T + \mathbf{J}_h \mathbf{J}_h^T + \widetilde{\mathbf{J}} + \widetilde{\mathbf{J}}^T \quad (5.27)$$

en la que, para simplificar los términos entre llaves, se considera que $\mathbf{F} \cong \mathbf{F}_h$. La componente isocórica se calcula como:

$$\bar{\mathbf{b}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}_h + 2\mu J^{-\frac{2}{3}} \nabla_{\mathbf{x}}^s \widetilde{\mathbf{u}} \quad (5.28)$$

Con la finalidad de simplificar la notación se denotará $\bar{\mu} = \mu J^{-\frac{2}{3}}$. Como consecuencia de lo anterior, la componente desviadora del tensor de tensiones se puede descomponer en forma aproximada como:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) \cong \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h) + \tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (5.29)$$

donde las componentes asociadas al campo de desplazamientos de elementos finitos y a las sub-escalas son respectivamente:

$$\mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h) = \mu \operatorname{dev} [\bar{\mathbf{b}}_h] \quad (5.30a)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}}) = 2\bar{\mu} \operatorname{dev} [\nabla_{\mathbf{x}}^s \tilde{\mathbf{u}}] \quad (5.30b)$$

De manera similar, en la expresión del cambio volumétrico en (5.25a) el término $[JU'(J)]$ se puede aproximar mediante un desarrollo en serie de Taylor de primer orden, como:

$$[JU'(J)]|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h+\tilde{\mathbf{u}}} = [JU'(J)]|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} + J [JU'(J)]'|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{u}}^2) \quad (5.31)$$

en la que $\tilde{\mathbf{u}}$ se considera una perturbación del campo de desplazamientos de elementos finitos \mathbf{u}_h y se desprecian los términos en $\tilde{\mathbf{u}}$ de orden cuadrático o superior. En esta expresión se ha utilizado la expresión de la derivada temporal $\dot{J} = J \nabla \cdot \mathbf{v}$ como $\Delta J = J \nabla \cdot \Delta \mathbf{u}$, en la que se aprovecha la analogía del formalismo entre derivadas temporales e incrementos, de acuerdo con la cual \dot{J} y ΔJ son análogos, lo mismo que la velocidad \mathbf{v} y un incremento de desplazamientos, que en este caso corresponde a $\tilde{\mathbf{u}}$. De esta manera, el término $[JU'(J)]$ queda descompuesto en dos componentes asociadas al campo de desplazamientos de elementos finitos y al de las sub-escalas, respectivamente. En el caso del modelo constitutivo adoptado se tiene además:

$$J [JU'(J)]' \equiv 1 \quad (5.32)$$

Las expresiones (5.31) y (5.29) permiten identificar y relacionar los efectos de $\tilde{\mathbf{u}}$ y \mathbf{u}_h en las ecuaciones (5.25a) y (5.25b).

Como consecuencia de lo anterior, la expresión (5.25a) se puede separar de manera aditiva como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (5.33)$$

donde $\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h)$ y $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h)$ son respectivamente:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) = \left[\begin{array}{c} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h \rangle_{\Omega'} + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, T_h \rangle_{\Omega'} - l(\mathbf{w}_h) \\ \langle q_h, [JU'(J)]|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} - \frac{1}{K} T_h \rangle_{\Omega'} \end{array} \right] \quad (5.34)$$

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \left[\begin{array}{c} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \tilde{\mathbf{s}} \rangle_{\Omega'} \\ \langle q_h, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega'} \end{array} \right] \quad (5.35)$$

El efecto de las sub-escalas en la solución de elementos finitos está contenido en el segundo término. La integración por partes de éste da como resultado la expresión equivalente, con menor orden de derivación sobre $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} -\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\bar{\mu} \operatorname{dev} [\nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{w}_h]) \rangle_{\Omega'} \\ -\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla q_h \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

donde $\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\bar{\mu} \operatorname{dev} [\nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{w}_h]) \rangle_{\Omega'} \equiv 0$ para elementos lineales.

La ecuación (5.25b), en el espacio de las sub-escalas, se puede reescribir como:

$$-\langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot (2\bar{\mu} \operatorname{dev} [\nabla_{\mathbf{x}}^s \tilde{\mathbf{u}}]) \rangle = \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot ([T_h \mathbf{1} + \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h)] + \mathbf{b}) \rangle \quad (5.37)$$

A partir de la cual se obtiene la aproximación al valor de las sub-escalas $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e (\nabla T_h - P_h(T_h)) \quad \text{en } \Omega_e \quad (5.38)$$

donde τ_e es el parámetro de estabilización que se calcula como:

$$\tau_e = \frac{ch^2}{2\bar{\mu}} \quad (5.39)$$

Dada la poca sensibilidad del método al valor de este parámetro, la expresión del parámetro de estabilización se puede simplificar y utilizar en el cálculo directamente el valor del módulo de cizallamiento μ . Efectivamente, en aplicaciones incompresibles o cuasi-incompresibles $J \approx 1$ y $\bar{\mu} \approx \mu$; por otro lado, como queda demostrado en los ensayos en esta tesis y en otros estudios, como (Oñate et al., 2002), variaciones del parámetro de estabilización incluso de un orden de magnitud no son sensibles en el método, por lo tanto dado el valor del exponente de J en la expresión de $\bar{\mu}$, las variaciones de J con respecto a su valor original del orden de 30 veces o menores no se reflejan sensiblemente en los resultados.

Con la aproximación 5.38 se calcula el término de estabilización, teniendo en cuenta que $\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\bar{\mu} \operatorname{dev} [\nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{w}_h]) \rangle_{\Omega_e} \equiv 0$ para elementos lineales, como:

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla T_h - \mathbf{\Pi}_h \rangle_{\Omega_e} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

donde $\mathbf{\Pi}_h = P_h(\nabla T_h)$ es la proyección de la componente volumétrica del tensor de tensiones de Kirchhoff, T_h , sobre el espacio de elementos finitos \mathcal{W}_h . Esta variable se define como una variable nodal adicional y se calcula mediante la relación entre el gradiente de T_h y su proyección $\mathbf{\Pi}_h$:

$$\langle \nabla T_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle = \langle \mathbf{\Pi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathcal{V}_h \quad (5.41)$$

donde $\boldsymbol{\eta}_h \in \mathcal{V}_h$ son las funciones de ponderación, o variaciones, del campo de desplazamientos.

Finalmente la versión estabilizada propuesta para resolver el problema elasto-plástico incompresible en deformaciones finitas mediante elementos triangulares o tetraédricos lineales es:

Hallar $[\mathbf{u}_h, T_h, \mathbf{\Pi}_h]^T \in \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h$, tal que:

$$\langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, T_h \rangle - l(\mathbf{w}_h) = 0 \quad (5.42a)$$

$$\langle q_h, [JU']|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} - \frac{1}{K}T_h \rangle - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla T_h - \mathbf{\Pi}_h \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad (5.42b)$$

$$\langle \nabla T_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle - \langle \mathbf{\Pi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle = 0 \quad (5.42c)$$

para todo $[\mathbf{w}_h, q_h, \boldsymbol{\eta}_h]^T \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h$.

Como se puede observar, en el caso de deformaciones finitas bajo las hipótesis consideradas el término de estabilización afecta sólo a la ecuación del cambio volumétrico. La ecuación de equilibrio es la misma que se resuelve en la formulación estándar, lo que representa una ventaja de esta formulación.

Una alternativa distinta tiene como punto de partida la linealización de (5.25a) y (5.25b). La diferencia con respecto a la opción adoptada aquí es que las relaciones que se obtienen de esta manera son de tipo incremental. Se deduce una aproximación al valor del incremento $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$, en vez de obtener una aproximación al valor de $\tilde{\mathbf{u}}$ como se hace en (5.38). Esto implica la necesidad de hacer un seguimiento del valor de la subescala para su actualización, ya que en este caso en las ecuaciones del sistema tanto el desviador del tensor de tensiones \mathbf{s} como la deformación volumétrica $[JU'(J)]$ deben evaluarse en $\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}$. La opción adoptada aquí evita esta dificultad y permite relacionar los efectos de $\tilde{\mathbf{u}}$ y \mathbf{u}_h en las ecuaciones (5.33) y (5.37), a partir de (5.31) y (5.29), con lo que se obtiene una formulación con estabilidad y precisión mejoradas a un bajo costo computacional.

La implementación en grandes deformaciones del elemento para modelo elástico es similar a la correspondiente al modelo plástico, con excepción del cálculo del factor de estabilización que requiere una estimación adecuada con la finalidad de tener en cuenta el efecto de flujo plástico. En los demás aspectos la implementación del elemento es similar, por esta razón el algoritmo propuesto se presenta al final del capítulo.

5.3 Régimen Plástico

En esta sección se aborda el problema elasto-plástico en grandes deformaciones. El desarrollo considera específicamente que el modelo constitutivo de plasticidad es de tipo J2. Este tipo de modelos considera que la deformación plástica es isocórica.

El comportamiento del modelo elasto-plástico tiende a la incompresibilidad en la medida en que predominen las deformaciones plásticas sobre las elásticas. Por otro lado, si el coeficiente de Poisson del material ν es cercano a 0,5 el comportamiento es cuasi-incompresible aunque las deformaciones plásticas no se hallan desarrollado en forma considerable respecto a las elásticas. En cualquiera de estos casos, los elementos formulados mediante el método de Galerkin presentan dificultades para representar la incompresibilidad del medio. Se desarrolla a continuación la formulación \mathbf{u}/p estabilizada de acuerdo con un conjunto de consideraciones adecuadas a este caso.

5.3.1 Modelo constitutivo

Se considera un modelo elasto-plástico, desacoplado en componentes volumétrica y desviadora, basado en un modelo de plasticidad J2 y cuyo comportamiento elástico corresponde al mismo modelo hiperelástico presentado en la sección anterior. La respuesta en tensiones se caracteriza mediante la función de energía:

$$W = KU(J) + \overline{W}(\overline{\mathbf{b}}^e) \quad (5.43)$$

donde U y \overline{W} son las componentes volumétrica y desviadora de W , respectivamente. J es el determinante del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} , que se puede descomponer multiplicativamente en sus componentes elástica y plástica como $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$; $\overline{\mathbf{b}}^e = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{b}^e$ es la componente isocórica del tensor elástico izquierdo de Cauchy-Green, $\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}$ es el tensor elástico izquierdo de Cauchy Green; una descripción detallada de este tipo de modelos se puede encontrar en (Simo and Hughes, 1998). Se pueden definir diversas expresiones válidas para U y \overline{W} . En este trabajo se utilizan las funciones propuestas en (Simo et al., 1985) y (Simo, 1992):

$$U(J) = \frac{1}{2} (\ln J)^2 \quad (5.44a)$$

$$\overline{W}(\overline{\mathbf{b}}^e) = \frac{1}{2} \mu (\text{tr}[\overline{\mathbf{b}}^e] - 3) \quad (5.44b)$$

donde μ es el parámetro de Lamé denominado módulo de cizallamiento (que se denota también por G). Las tensiones de Kirchhoff, $\boldsymbol{\tau}$, de este modelo se pueden expresar como:

$$\boldsymbol{\tau} = T\mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u}) \quad (5.45a)$$

donde $\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \text{dev}[\boldsymbol{\tau}]$ es la componente desviadora del tensor de tensiones y la componente volumétrica es $\boldsymbol{\tau}_{\text{vol}} = T\mathbf{1}$. Las componentes del tensor de tensiones $\boldsymbol{\tau}$ que se derivan directamente de éstas son:

$$T = K [JU'(J)] \quad (5.46a)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mu \operatorname{dev} [\bar{\mathbf{b}}^e] \quad (5.46b)$$

En las referencias citadas se puede encontrar la deducción de estas expresiones. Obsérvese que la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras expresadas mediante la componente isocórica del tensor elástico izquierdo de Cauchy-Green es lineal en función del módulo de cizallamiento μ :

$$\mu = \frac{\|\mathbf{s}(\mathbf{u})\|}{\|\operatorname{dev} [\bar{\mathbf{b}}^e]\|} \quad (5.47)$$

5.3.2 Formulación en el medio continuo

La formulación del problema elasto-plástico conduce a ecuaciones similares a las del caso elástico en grandes deformaciones. De manera análoga a lo visto en el capítulo 4, la dificultad particular que presenta el problema elasto-plástico con respecto al elástico es la estimación del parámetro de estabilización, particularmente del módulo de cizallamiento efectivo, en función del desarrollo de flujo plástico.

Forma fuerte

La forma fuerte del problema se puede expresar tanto en la configuración espacial Ω_t , como en la configuración material Ω . En la configuración material, la ecuación de equilibrio en forma local y las condiciones de contorno en la configuración espacial Ω , definen el problema en forma fuerte como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\dim}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\dim}}$, hallar $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, T]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, tales que:

$$\operatorname{DIV} \mathbf{P} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (5.48a)$$

$$-\frac{1}{K}T + [JU'(J)]_{J=J(\mathbf{u})} = 0 \quad (5.48b)$$

de acuerdo con las condiciones de contorno:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_u \Omega \quad (5.49)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_t \Omega \quad (5.50)$$

donde el primer tensor de tensiones de Piola Kirchhoff \mathbf{P} viene dado por la relación $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}$, \mathbf{n} es la normal a $\partial_t \Omega$ y las ecuaciones constitutivas (5.45a), (5.46a), (5.46b).

Forma débil

Para plantear la forma débil se define el espacio de funciones de ponderación, o variaciones admisibles \mathbf{w} . En coordenadas materiales el espacio de desplazamientos admisibles es:

$$\mathcal{V}_0 = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{0} \text{ en } \partial_u \Omega \} \quad (5.51)$$

Se define el problema en forma débil como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, hallar $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, T]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, tal que:

$$\langle \nabla^s \mathbf{w}, (T\mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u})) \rangle - l(\mathbf{w}) = 0 \quad (5.52a)$$

$$\left\langle q, -\frac{1}{K}T + [JU'(J)]_{J=J(\mathbf{u})} \right\rangle = 0 \quad (5.52b)$$

$\forall \mathbf{W} := [\mathbf{w}, q]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$, de acuerdo con la ecuación constitutiva (5.46b), donde:

$$l(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{b}) + (\mathbf{w}, \bar{\mathbf{t}})_{\Gamma_t}$$

5.3.3 Planteamiento en multiescalas

La solución en el medio continuo se aproxima por:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}} \quad (5.53)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h &:= [\mathbf{u}_h, T_h]^T & \tilde{\mathbf{U}} &:= [\tilde{\mathbf{u}}, 0]^T \\ \mathbf{W}_h &:= [\mathbf{w}_h, q_h]^T & \tilde{\mathbf{W}} &:= [\tilde{\mathbf{w}}, 0]^T \end{aligned} \quad (5.54)$$

son las componentes de la solución que corresponden a la descomposición del espacio en que se plantea el problema $\mathcal{W} = \mathcal{W}_h \oplus \tilde{\mathcal{W}}$, de manera que $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_{h,0}$ y $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0$, respectivamente.

El problema en el medio continuo se transforma en:

Hallar $\mathbf{U}_h := [\mathbf{u}_h, T_h]^T \in \mathcal{W}_{h,0} = \mathcal{V}_{h,0} \times \mathcal{Q}_h$ y $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0$, dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, los desplazamientos en $\partial_u \Omega_t$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, tal que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (5.55a)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \quad (5.55b)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) &= \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, [T_h \mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})] \rangle - l(\mathbf{w}_h) \\ \langle q_h, (-\frac{T_h}{K} + [JU']|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h+\tilde{\mathbf{u}}}) \rangle \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \begin{bmatrix} \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot ([T_h \mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})] + \mathbf{b}) \rangle \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$l(\mathbf{w}_h) = (\mathbf{w}_h, \mathbf{b}) + (\mathbf{w}_h, \bar{\mathbf{t}})_{\partial_t}$$

$$\text{y } \mathbf{W}_h := [\mathbf{w}_h, q_h]^T \in \mathcal{W}_{h,0} = \mathcal{V}_{h,0} \times \mathcal{Q}_h \text{ y } \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0.$$

En (5.55a) y en (5.55b) se podría descomponer aditivamente el tensor de tensiones $\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})$ en las ecuaciones de balance de momentum, mediante un desarrollo en serie de Taylor, de manera similar a la que se realizó en la sección 4.4.3, como:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h) + \bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \nabla_{\mathbf{X}}^s \tilde{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{u}})^2 \quad (5.56)$$

donde $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h}$ es el tensor constitutivo tangente desviador evaluado en $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$. Éste tensor relaciona las tensiones desviadoras y las deformaciones totales. El producto tensorial del segundo término de la derecha de la ecuación (5.56) representa el incremento de tensiones desviadoras por efecto de las sub-escalas, $\tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}})$. Para calcular el incremento de tensiones desviadoras correspondiente a las deformaciones desviadoras totales asociadas a las sub-escalas es necesario hacer una aproximación similar a la realizada en la sección 4.4.3. Efectivamente, a partir del valor de μ dado por (5.47), la relación entre las tensiones desviadoras y la componente desviadora de las deformaciones isocóricas totales se puede estimar mediante el coeficiente μ^* , calculado como:

$$\mu^* = \mu \frac{\|\text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^e]\|}{\|\text{dev}[\bar{\mathbf{b}}]\|} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\|\text{dev}[\bar{\mathbf{b}}]\|} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} \quad (5.57)$$

El coeficiente μ^* , que podría denominarse módulo de cizallamiento efectivo, se puede interpretar como el módulo secante en $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$ en la curva de tensiones desviadoras vs. la componente desviadoras de las deformaciones expresadas mediante la parte isocórica del tensor izquierdo de Cauchy -Green. Esto se puede apreciar en la figura 5.3.

Este coeficiente μ^* representa el efecto del flujo plástico en la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras isocóricas totales, por lo tanto debe considerarse sólo cuando se desarrolle el régimen plástico. En fase de carga o descarga elástica el módulo de cizallamiento debe tomarse igual al valor elástico, es decir igual a μ . De esta manera, el módulo de cizallamiento es:

$$\mu' = \begin{cases} \mu & \text{en carga o descarga elástica} \\ \mu^* & \text{si se desarrolla flujo plástico} \end{cases} \quad (5.58)$$

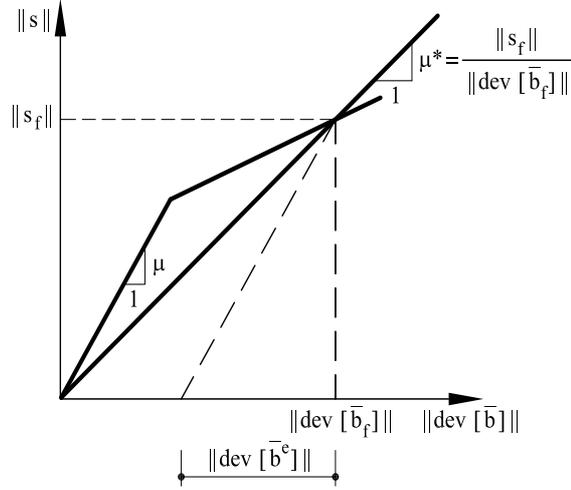


Figura 5.3: Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras expresadas en componente isocórica de la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green para modelo elasto-plástico con plasticidad J2 en grandes deformaciones.

Con este resultado, el producto tensorial $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]$ se puede aproximar como:

$$\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \text{dev} [\nabla_{\mathbf{X}}^s \tilde{\mathbf{u}}] = \tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}}) \cong 2\mu' J^{-\frac{2}{3}} \text{dev} [\nabla_{\mathbf{X}}^s \tilde{\mathbf{u}}]$$

donde $\text{dev} [\nabla_{\mathbf{X}}^s \tilde{\mathbf{u}}]$ es la parte desviadora del tensor de deformaciones infinitesimales correspondiente a las sub-escalas y para simplificar la notación se puede definir $\bar{\mu} = \mu' J^{-\frac{2}{3}}$.

En consecuencia, la componente desviadora del tensor de tensiones se puede descomponer en forma aproximada como:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) \cong \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h) + \tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (5.59)$$

donde las componentes asociadas al campo de desplazamientos de elementos finitos y a las sub-escalas son respectivamente:

$$\mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h) = \mu \text{dev} [\bar{\mathbf{b}}_h^e] \quad (5.60a)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{u}}) = 2\bar{\mu} \text{dev} [\nabla_{\mathbf{X}}^s \tilde{\mathbf{u}}] \quad (5.60b)$$

La expresión de la deformación volumétrica (5.31), que es la misma que la que se presenta en este problema, junto con (5.59) permiten identificar y relacionar los efectos de $\tilde{\mathbf{u}}$ y \mathbf{u}_h en las ecuaciones (5.55a) y (5.55b).

Como consecuencia de lo anterior, la expresión (5.55a) se puede separar de manera aditiva como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (5.61)$$

donde $\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h)$ y $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h)$ son respectivamente:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h \rangle_{\Omega'} + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, T_h \rangle_{\Omega'} - l(\mathbf{w}_h) \\ \langle q_h, [JU'(J)]|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} - \frac{1}{K} T_h \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \tilde{\mathbf{s}} \rangle_{\Omega'} \\ \langle q_h, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

El efecto de las sub-escalas en la solución de elementos finitos está contenido en el segundo término. La integración por partes de éste da como resultado la expresión equivalente, con menor orden de derivación sobre $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} -\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\bar{\mu} \operatorname{dev} [\nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{w}_h]) \rangle_{\Omega'} \\ -\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla q_h \rangle_{\Omega'} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

donde $\langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\bar{\mu} \operatorname{dev} [\nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{w}_h]) \rangle \equiv 0$ para elementos lineales.

La ecuación (5.55b), en el espacio de las sub-escalas, se puede reescribir como:

$$-\langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot (2\bar{\mu} \operatorname{dev} [\nabla_{\mathbf{x}}^s \tilde{\mathbf{u}}]) \rangle = \langle \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot ([T_h \mathbf{1} + \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h)] + \mathbf{b}) \rangle \quad (5.65)$$

A partir de la cual se obtiene la aproximación al valor de las sub-escalas $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e (\nabla T_h - P_h(T_h)) \quad \text{en } \Omega_e \quad (5.66)$$

en la que el parámetro de estabilización se calcula como:

$$\tau_e = \frac{ch^2}{2\bar{\mu}} \quad (5.67)$$

donde el coeficiente $\bar{\mu}$ tiene en cuenta, si es el caso, el efecto del flujo plástico en las deformaciones desviadoras mediante la aproximación al valor μ' , que en general se calcula en cada punto de integración; en el caso de elementos lineales con un sólo punto de integración por elemento este valor es único por cada elemento. La corrección en el parámetro de estabilización en el problema plástico en grandes deformaciones es una contribución original en este trabajo. En aplicaciones incompresibles o cuasi-incompresibles $J \approx 1$ y $\bar{\mu} \approx \mu'$, como ocurre cuando las deformaciones plásticas son grandes en comparación con las elásticas; por otro lado, en aplicaciones compresibles el efecto de su variación es de importancia secundaria con respecto al efecto del flujo plástico reflejado en μ' .

Con todos estos resultados el término de estabilización de la formulación que proviene de (5.64) resulta:

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla T_h - \mathbf{\Pi}_h \rangle_{\Omega_e} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

donde $\mathbf{\Pi}_h = P_h(\nabla T_h)$ es la proyección de la componente volumétrica del tensor de tensiones de Kirchhoff, T_h , sobre el espacio de elementos finitos \mathcal{W}_h . Esta variable se define como una variable nodal adicional y se calcula mediante la relación entre el gradiente de T_h y su proyección $\mathbf{\Pi}_h$:

$$\langle \nabla T_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle = \langle \mathbf{\Pi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathcal{V}_h \quad (5.69)$$

donde $\boldsymbol{\eta}_h \in \mathcal{V}_h$ son las funciones de ponderación, o variaciones, del campo de desplazamientos.

Finalmente la versión estabilizada propuesta para resolver el problema elasto-plástico incompresible en deformaciones finitas mediante elementos triangulares o tetraédricos lineales es:

Hallar $[\mathbf{u}_h, T_h, \mathbf{\Pi}_h]^T \in \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h$, tal que:

$$\langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, T_h \rangle - l(\mathbf{w}_h) = 0 \quad (5.70a)$$

$$\langle q_h, [JU']|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} - \frac{1}{K} T_h \rangle - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla q_h, \nabla T_h - \mathbf{\Pi}_h \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad (5.70b)$$

$$\langle \nabla T_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle - \langle \mathbf{\Pi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle = 0 \quad (5.70c)$$

para todo $[\mathbf{w}_h, q_h, \boldsymbol{\eta}_h]^T \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h$.

Como se puede observar, también en el problema elasto-plástico, bajo las hipótesis consideradas el término de estabilización afecta sólo a la ecuación del cambio volumétrico. La ecuación de equilibrio es la misma que se resuelve en la formulación estándar, lo que representa una ventaja de esta formulación. La opción adoptada aquí evita la dificultad de hacer el seguimiento de las sub-escalas y evaluarlas por suma de incrementos, permite relacionar directamente los efectos de $\tilde{\mathbf{u}}$ y \mathbf{u}_h en las ecuaciones (5.61) y (5.65), a partir de (5.31) y (5.59), con lo que se obtiene una formulación con estabilidad y precisión mejoradas a un bajo costo computacional.

5.3.4 Aspectos de implementación

El problema elasto-plástico en deformaciones finitas presenta dos tipos de no-linealidad, la constitutiva y la geométrica. La solución de las ecuaciones del sistema (5.70a)-(5.70c) se efectúa mediante procedimientos de tipo incremental-iterativo. Tal como se propuso en la sección 4.4, se emplea un procedimiento escalonado en el que la proyección del gradiente de la tensión volumétrica T_h se desacopla del sistema y se resuelve de manera explícita, mediante la ecuación (5.70c). Las ecuaciones de equilibrio y de deformación volumétrica, (5.70a) y (5.70b), conforman un sistema \mathbf{u}/T , que se resuelve de manera simultánea.. El valor de la proyección del gradiente

de tensión volumétrica, la proyección $\mathbf{\Pi}_h^n$, se evalúa en base al valor convergido del gradiente de tensión volumétrica T_h^n en el paso de tiempo ∇T_h^n como:

$$(\nabla T_h^n, \boldsymbol{\eta}_h) - (\mathbf{\Pi}_h^n, \boldsymbol{\eta}_h) = 0 \quad (5.71)$$

Empleando la matriz de masa aglutinada, esta ecuación se transforma en un sistema trivial. En el paso de tiempo $n + 1$ se debe hallar \mathbf{u}_h^{n+1} y T_h^{n+1} que satisfagan las ecuaciones (5.70a) y (5.70b). Este sistema de ecuaciones no-lineales se debe resolver en cada paso de tiempo típico aplicando, por ejemplo, el método de Newton-Raphson. En las iteraciones correspondientes a este paso de tiempo el valor de $\mathbf{\Pi}_h^n$ se mantiene constante. En sistemas geoméricamente no-lineales planteados en descripción espacial, como éste, la variación de la configuración implícita en los gradientes espaciales da origen al linealizar las ecuaciones del sistema a términos adicionales en la matriz tangente, en comparación con el caso infinitesimal. En relación con estos términos se considera además una simplificación adicional en el término de estabilización; ésta consiste en evaluar los gradientes espaciales en este término de acuerdo con la configuración en el paso n ; estos gradientes se denotan como ∇^n . De esta manera, el sistema \mathbf{u}/T que se resuelve en cada paso de tiempo es:

$$\begin{aligned} \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h^{n+1}) \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, T_h^{n+1} \rangle - l^{n+1}(\mathbf{w}_h) &= 0 \\ \langle q_h, [JU'(J)]|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h^{n+1}} - \frac{1}{K} T_h^{n+1} \rangle - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla^n q_h, \nabla^n T_h^{n+1} - \mathbf{\Pi}_h^n \rangle_{\Omega_e} &= 0 \end{aligned} \quad (5.72)$$

Los residuos correspondientes a estas ecuaciones en la iteración i se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} r_1^{n+1,i} &= \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h^{n+1,i}) \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, T_h^{n+1,i} \rangle - l^{n+1}(\mathbf{w}_h) \\ r_2^{n+1,i} &= \langle q_h, [JU'(J)]|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h^{n+1,i}} - \frac{1}{K} T_h^{n+1,i} \rangle - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla^n q_h, \nabla^n T_h^{n+1,i} - \mathbf{\Pi}_h^n \rangle_{\Omega_e} \end{aligned} \quad (5.73)$$

El sistema de ecuaciones linealizadas que se resuelve en cada iteración para hallar los incrementos $\Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1}$ y $\Delta T_h^{n+1,i+1}$, de acuerdo con las simplificaciones adoptadas, es:

$$\begin{aligned} a(\Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1}, \mathbf{w}_h) + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}_h, \Delta T_h^{n+1,i+1} \rangle - \langle \nabla^s \mathbf{w}_h, 2T_h^{n+1,i} \nabla^s \Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1} \rangle + \\ + \langle \nabla \mathbf{w}_h, \nabla \Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1} (T_h^{n+1,i} \mathbf{1} + \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h^{n+1,i})) \rangle &= -r_1^{n+1,i} \\ \langle q_h, \nabla \cdot \Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1} - \frac{1}{K} \Delta T_h^{n+1,i+1} \rangle + \\ - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \langle \nabla^n q_h, \nabla^n \Delta T_h^{n+1,i+1} \rangle_{\Omega_e} &= -r_2^{n+1,i} \end{aligned} \quad (5.74)$$

El desarrollo de estas expresiones se puede encontrar en el anexo E.

La matriz tangente del sistema (5.72) es la matriz asociada al sistema de ecuaciones (5.74). Esta matriz es simétrica, como consecuencia de las consideraciones adoptadas en el término de estabilización respecto a los gradientes espaciales. En particular, los términos correspondientes a la ecuación de la deformación volumétrica resultan similares a los que se obtienen en el caso de deformaciones infinitesimales. Los términos adicionales con respecto al caso infinitesimal son el segundo y el cuarto del lado izquierdo de la primera ecuación linealizada, $-\langle \nabla^s \mathbf{w}_h, 2T_h^{n+1,i} \nabla^s \Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1} \rangle$ y $\langle \nabla \mathbf{w}_h, \nabla \Delta \mathbf{u}_h^{n+1,i+1} (T_h^{n+1,i} \mathbf{1} + \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h^{n+1,i})) \rangle$, respectivamente. En este último término se puede identificar el tensor de tensiones de Kirchhoff evaluado en $n+1, i$ de acuerdo con el modelo constitutivo (5.45a); es decir, $T_h^{n+1,i} \mathbf{1} + \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h^{n+1,i}) = \boldsymbol{\tau}_h^{n+1,i}$. Las sub-matrices típicas de estos términos correspondientes a los nodos locales A y B son:

$$[\mathbf{K}_T^{AB}]^{(e)} = - \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_A^T (2T_h^{n+1,i}) \mathbf{B}_B d\Omega \right]^{(e)} \quad (5.75)$$

$$[\mathbf{K}_{\text{geo}}^{AB}]^{(e)} = \left[\int_{\Omega^e} [\mathbf{b}_A] (\mathbf{B}_B^T \boldsymbol{\tau}_h^{n+1,i}) d\Omega \right]^{(e)}, \quad [\mathbf{b}_A] = [N_{,1}^A, \dots, N_{,n_{\text{dim}}}^A]^T \quad (5.76)$$

En la matriz del sistema linealizado este último término corresponde a la componente denominada matriz geométrica. Los gradientes espaciales de las funciones de forma N^A , que son las componentes del vector $[\mathbf{b}_A]$, se pueden calcular haciendo el *push-forward* de los gradientes materiales, según la siguiente relación:

$$\nabla N^A = \text{GRAD } N^A [\mathbf{F}_h]^{-1} \quad (5.77)$$

lo que equivale a la expresión en notación indicial: $N_{,x_i}^A = N_{,x_K}^A [\mathbf{F}_h^{-1}]_{Ki}$, donde los sub-índices $K, i = 1, \dots, n_{\text{dim}}$ corresponden a las coordenadas materiales y espaciales, respectivamente, y se considera la convención de suma de índices. En la descripción espacial, las matrices \mathbf{B}_A asociadas conservan la misma estructura de las matrices en el caso infinitesimal. Las matrices así calculadas son menos densas que las correspondientes en la descripción material, y en consecuencia las matrices de rigidez resultantes ofrecen también esta característica ventajosa. El algoritmo para resolver el problema en deformaciones finitas se presenta en la tabla (5.1). En esta tabla, la matriz \mathbf{K} es la suma de las contribuciones $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{\text{dev}}^{AB}]^{(e)} + [\mathbf{K}_T^{AB}]^{(e)} + [\mathbf{K}_{\text{geo}}^{AB}]^{(e)}$. Las demás matrices son similares a las definidas en las secciones anteriores, con la diferencia de que los gradientes de las funciones de forma considerados son espaciales y se evalúan según (5.77). Los residuos \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 son los vectores asociados a los residuos $r_1^{n+1,i}$ y $r_2^{n+1,i}$ que vienen dados por las expresiones (5.73).

Algoritmo para resolver problema elasto-plástico en deformaciones finitas

0. Paso de carga $n + 1$: Inicializar $i = 0 \rightarrow [\mathbf{U}, \mathbf{T}]^{T(n+1,0)} = [\mathbf{U}, \mathbf{T}]^{T(n)}$
1. Iteración: Resolver a nivel global: $\Delta \mathbf{U}^{(n+1,i+1)}$ y $\Delta \mathbf{T}^{(n+1,i+1)}$:
2.
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & -\frac{1}{K}\mathbf{M}_p - \tau\mathbf{L} \end{bmatrix}^{(n+1,i)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{T}^{(i)} \end{bmatrix}^{(n+1,i+1)} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}^{(n+1,i)}$$
3. Actualizar: $[\mathbf{U}, \mathbf{T}]^{T(n+1,i+1)} = [\mathbf{U}, \mathbf{T}]^{T(n+1,i)} + [\Delta \mathbf{U}, \Delta \mathbf{T}]^{T(n+1,i+1)}$
4. Evaluar convergencia
5. No: Efectuar nueva iteración: $i \leftarrow i + 1$. (Ir a 1)
6. Si: Valores convergidos: $[\mathbf{U}, \mathbf{T}]^{T(n+1)} = [\mathbf{U}, \mathbf{T}]^{T(n+1,i+1)}$
7. Calcular: $\mathbf{\Pi}^{(n+1)} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{T})^{(n+1)}$
8. Nuevo paso de carga: $n \leftarrow n + 1$. (Ir a 0)

Tabla 5.1: Algoritmo para resolver problema elasto-plástico en deformaciones finitas

Anexo E

Cálculo de algunas expresiones importantes

Se presenta el cálculo de algunas expresiones importantes correspondientes al problema en grandes deformaciones; se presentan las formas fuertes y débiles del problema, en las configuraciones de referencia y deformada, respectivamente, y también la linealización de estas expresiones.

E.1 Expresión del modelo constitutivo

Modelo constitutivo desacoplado en componentes volumétrica y desviadora; expresión del tensor de tensiones de Kirchhoff:

$$\boldsymbol{\tau} = T\mathbf{1} + \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{u}) \quad (\text{E.1})$$

$$T = K [JU'(J)] , \quad \bar{\mathbf{s}} = \text{dev} [\boldsymbol{\tau}] \quad (\text{E.2})$$

E.2 Ecuaciones en forma fuerte

E.2.1 Ecuación de gobierno

- configuración material:

$$\text{DIV } \mathbf{P} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{E.3})$$

- configuración espacial:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}_t = \mathbf{0} \quad (\text{E.4})$$

E.2.2 Ecuación de la deformación volumétrica

$$\frac{T}{K} - [JU'(J)]_{J=J(\mathbf{u})} = 0 \quad (\text{E.5})$$

E.3 Forma débil del problema

E.3.1 Ecuación de gobierno

- configuración material:

Ésta se obtiene a partir de (E.3) y considerando:

$$\mathcal{V}_0 = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{0} \text{ en } \partial_u \Omega \} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\text{DIV } \mathbf{P} + \mathbf{b}) \, dV &= \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \text{DIV } \mathbf{P} \, dV + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, dV \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{P} : \text{GRAD } \mathbf{w} \, dV + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} : \text{GRAD } \mathbf{w} \, dV = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma}_{l(\mathbf{w})} \quad (\text{E.8})$$

- configuración espacial:

Se puede obtener directamente a partir de (E.4) y considerando:

$$\mathcal{V}_t = \{ \mathbf{w}_t \in \mathbf{H}^1(\varphi(\Omega)) \mid \mathbf{w}_t(\varphi(\mathbf{X})) = \mathbf{0} \, \forall \mathbf{X} \in \partial_u \Omega \} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \mathbf{w}_t \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}_t) \, dv &= \int_{\Omega_t} \mathbf{w}_t \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, dv + \int_{\Omega_t} \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{b}_t \, dv \\ &= - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \mathbf{w}_t \, dV + \int_{\Omega_t} \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{b}_t \, dv + \int_{\partial_t \Omega_t} \mathbf{w}_t \cdot \bar{\mathbf{t}}_t \, d\gamma \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \mathbf{w}_t \, dv = \underbrace{\int_{\Omega_t} \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{b}_t \, dv + \int_{\partial_t \Omega_t} \mathbf{w}_t \cdot \bar{\mathbf{t}}_t \, d\gamma}_{l(\mathbf{w}_t)} \quad (\text{E.11})$$

que está expresada en función del tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. También se puede re-escribir la expresión en términos del tensor de tensiones de Kirchhoff, mediante la relación: $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$, como:

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\tau} : \nabla^s \mathbf{w}_t \frac{dv}{J} = l(\mathbf{w}_t) \quad (\text{E.12})$$

La expresión (E.12) se puede obtener también a partir de la forma débil referida a la configuración material (E.8). Efectivamente, mediante el cambio de variables:

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}) = \mathbf{w}_t(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} \quad (\text{E.13a})$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \mathbf{b}_t(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} \quad (\text{E.13b})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) dV(\mathbf{X}) = dv(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} \quad (\text{E.13c})$$

$$\bar{\mathbf{t}} d\Gamma|_{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{t}}_t d\gamma|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} \quad (\text{E.13d})$$

y utilizando:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}) [\mathbf{F}(\mathbf{X})]^T = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} \quad (\text{E.14a})$$

$$\text{GRAD } \mathbf{w}(\mathbf{X}) [\mathbf{F}(\mathbf{X})]^{-1} = \nabla^s \mathbf{w}_t|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} \quad (\text{E.14b})$$

para re-escribir la potencia tensional, representada por la contracción de tensores $\mathbf{P}(\mathbf{X}) : \text{GRAD } \mathbf{w}(\mathbf{X})$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{X}) : \text{GRAD } \mathbf{w}(\mathbf{X}) &= \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} [\mathbf{F}(\mathbf{X})]^{-T} : \text{GRAD } \mathbf{w}(\mathbf{X}) \\ &= \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} : \text{GRAD } \mathbf{w}(\mathbf{X}) [\mathbf{F}(\mathbf{X})]^{-1} \\ &= (\boldsymbol{\tau} : \nabla^s \mathbf{w}_t)|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

se obtiene también (E.12).

Los integrandos en estas ecuaciones son magnitudes escalares y, por lo tanto, los valores correspondientes no dependen de la configuración o de las coordenadas en que se los describa. Por ejemplo, considerando la expresión (E.15) se puede plantear la integral del lado derecho de (E.8) en función de variables espaciales e integrar en la configuración de referencia, como:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \nabla^s \mathbf{w}_t)|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X})} dV = l(\mathbf{w}) \quad (\text{E.16})$$

Interpretación como residuo de fuerzas

Es usual escribir estas ecuaciones en forma de residuo e identificar los términos como fuerzas internas y fuerzas externas:

$$f_{int} - f_{ext} = 0 \quad (\text{E.17})$$

donde:

$$\begin{aligned} f_{int} & : = \int_{\Omega} \text{GRAD } \mathbf{w} : \mathbf{P} \, dV = \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\tau} \, dV \\ f_{ext} & : = l(\mathbf{w}) = l(\mathbf{w}_t) \end{aligned}$$

E.3.2 Ecuación de la deformación volumétrica

Se obtiene a partir de (E.5) y considerando funciones de ponderación $q \in L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} q \left(-\frac{T}{K} + [JU'(J)]_{J=J(\mathbf{u})} \right) dV = 0 \quad (\text{E.18})$$

E.4 Linealización

En el cálculo de algunas expresiones se aprovecha la analogía que existe entre el cálculo formal de los incrementos y las derivadas temporales, aunque corresponden a conceptos diferentes. Por ejemplo, $\Delta \mathbf{u}$ y \mathbf{v} representan respectivamente un incremento de desplazamientos y la velocidad, pero tienen el mismo formalismo; ocurre lo mismo con $\Delta \mathbf{F}$ y $\dot{\mathbf{F}}$, aunque el primero representa un incremento de \mathbf{F} y el segundo la derivada temporal de \mathbf{F} .

E.4.1 Ecuaciones en forma fuerte

Ecuación de gobierno

El residuo de la ecuación de equilibrio en forma fuerte se define como:

$$\text{DIV } \mathbf{P} + \mathbf{b} =: \mathbf{R}_1 \quad (\text{E.19})$$

El planteamiento de un procedimiento incremental consiste en resolver:

$$\mathbf{R}_1 + \Delta \mathbf{R}_1 = \mathbf{0} \quad (\text{E.20})$$

donde:

$$\Delta \mathbf{R}_1 = \text{DIV } \Delta \mathbf{P} \quad (\text{E.21})$$

(se omiten los super-índices en estas expresiones y se considera que si una variable se evalúan en n , por ejemplo \mathbf{R}_1^n , el incremento corresponde a la diferencia $\mathbf{R}_1^{n+1} - \mathbf{R}_1^n$)

Linealización de DIV \mathbf{P} Los tensores de tensiones de Piola-Kirchhoff, primero y segundo, se relacionan entre sí en función del tensor gradiente de deformaciones:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} \quad (\text{E.22})$$

El incremento de este tensor se deduce a partir de esta relación, mediante una serie de operaciones directas:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{P} &= (\Delta\mathbf{F})\mathbf{S} + \mathbf{F}(\Delta\mathbf{S}) \quad (\text{E.23}) \\ &= [(\Delta\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S} + \mathbf{F}(\Delta\mathbf{S})] \\ &= \left[\underbrace{(\Delta\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}}_{\nabla\mathbf{v}} \underbrace{\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T}_{\boldsymbol{\tau}} + \underbrace{\mathbf{F}(\Delta\mathbf{S})\mathbf{F}^T}_{L_v\boldsymbol{\tau}} \right] \mathbf{F}^{-T} \end{aligned}$$

donde se han empleado equivalencias conocidas, tales como la relación entre los gradientes espacial y material (E.14b), y también el push-forward de \mathbf{S} y la derivada de Lie de \mathbf{S} , definidas en el capítulo D. En el contexto de la linealización para la solución de un procedimiento incremental-iterativo, \mathbf{v} representa en esta expresión un incremento en el campo de los desplazamientos $\Delta\mathbf{u}$.

$$\Delta\mathbf{P} = [\nabla\mathbf{v}\boldsymbol{\tau} + L_v\boldsymbol{\tau}] \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{v} = \Delta\mathbf{u} \quad (\text{E.24a})$$

$$[\Delta\mathbf{P}]_{aA} = [\nabla\mathbf{v}_{ac}\boldsymbol{\tau}_{cb} + (L_v\boldsymbol{\tau})_{ab}] \frac{\partial\mathbf{X}_A}{\partial\mathbf{x}_b} \quad (\text{E.24b})$$

en notación directa y en notación de índices, respectivamente. A partir de esta expresión se puede obtener:

$$\begin{aligned} \text{DIV}_A [\Delta\mathbf{P}]_{aA} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{X}_A} [\nabla\mathbf{v}_{ac}\boldsymbol{\tau}_{cb} + (L_v\boldsymbol{\tau})_{ab}] \frac{\partial\mathbf{X}_A}{\partial\mathbf{x}_b} \quad (\text{E.25}) \\ &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_b} [\nabla\mathbf{v}_{ac}\boldsymbol{\tau}_{cb} + (L_v\boldsymbol{\tau})_{ab}] \\ &= \nabla_b \cdot [\nabla\mathbf{v}_{ac}\boldsymbol{\tau}_{cb} + (L_v\boldsymbol{\tau})_{ab}] \end{aligned}$$

En notación directa esta expresión se re-escribe como:

$$\text{DIV } \Delta\mathbf{P} = \nabla \cdot [\nabla\mathbf{v}\boldsymbol{\tau} + L_v\boldsymbol{\tau}], \quad \mathbf{v} = \Delta\mathbf{u} \quad (\text{E.26})$$

La derivada de Lie del tensor de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ y la derivada temporal $\dot{\boldsymbol{\tau}}$, representada en este contexto por $\Delta\boldsymbol{\tau}$, se relacionan mediante la definición:

$$L_v\boldsymbol{\tau} := \left[\Delta\boldsymbol{\tau} - \nabla\mathbf{v}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}(\nabla\mathbf{v})^T \right] \quad (\text{E.27})$$

El tensor constitutivo $\boldsymbol{\tau}$ se ha desacoplado en sus componentes volumétrica y desviadora, que respectivamente son:

$$[\boldsymbol{\tau}_{\text{vol}}] = T\mathbf{1} , \quad [\boldsymbol{\tau}_{\text{dev}}] = \bar{\mathbf{s}} \quad (\text{E.28})$$

Aplicando la definición (E.27) a la componente volumétrica, se puede obtener la relación en función del incremento de T :

$$L_v(\boldsymbol{\tau}_{\text{vol}}) = \Delta T\mathbf{1} - 2T\mathbf{1}\nabla^s \mathbf{v} \quad (\text{E.29})$$

Utilizando esta expresión el (E.27) y la expresión del modelo constitutivo, se obtiene:

$$[\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\tau} + L_v \boldsymbol{\tau}] = [\nabla \mathbf{v} (T\mathbf{1} + \bar{\mathbf{s}}) + (\Delta T\mathbf{1} - 2T\mathbf{1}\nabla^s \mathbf{v} + \mathbf{c}_s : \nabla^s \mathbf{v})] \quad (\text{E.30})$$

donde \mathbf{c}_s es la componente desviadora del tensor constitutivo tangente, de acuerdo con la relación incremental $L_v(\boldsymbol{\tau}_{\text{dev}}) = \mathbf{c}_s : \nabla^s \mathbf{v}$. Finalmente se obtiene:

$$\text{DIV } \Delta \mathbf{P} = \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v} (T\mathbf{1} + \bar{\mathbf{s}}) + (\Delta T\mathbf{1} - 2T\mathbf{1}\nabla^s \mathbf{v} + \mathbf{c}_s : \nabla^s \mathbf{v})] \quad (\text{E.31})$$

Ecuación de la deformación volumétrica

El residuo de la forma fuerte de la ecuación de deformación volumétrica se define como:

$$-\frac{T}{K} + [JU'(J)] =: R_2 \quad (\text{E.32})$$

la ecuación incremental por resolver es:

$$\Delta R_2 + R_2 = 0 \quad (\text{E.33})$$

donde utilizando la expresión obtenida previamente para el incremento del determinante del tensor gradiente de deformaciones, $\Delta J = J\nabla \cdot \mathbf{v}$, se obtiene:

$$\Delta R_2 = \frac{\Delta T}{K} + [JU'(J)]' \Delta J \quad (\text{E.34})$$

E.4.2 Ecuaciones en forma débil

Ecuación de gobierno

El residuo de la forma débil de la ecuación de gobierno se define como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} : \text{GRAD } \mathbf{w} \, dV - l(\mathbf{w}) =: r_1 \quad (\text{E.35})$$

la ecuación incremental que se resuelve:

$$\Delta r_1 + r_1 = 0 \quad (\text{E.36})$$

donde:

$$\Delta r_1 = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{P} : \text{GRAD } \mathbf{w} \, dV \quad (\text{E.37})$$

esta expresión se puede desarrollar mediante operaciones directas y utilizando el resultado obtenido para el incremento de \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{GRAD } \mathbf{w} : \Delta \mathbf{P} \, dV &= \int_{\Omega} \text{GRAD } \mathbf{w} : [\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\tau} + L_v \boldsymbol{\tau}] \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \, dV \\ &= \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : [\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\tau} + L_v \boldsymbol{\tau}] \, dV \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

y utilizando la expresión (E.30), obtenida en la deducción correspondiente de la forma fuerte, la expresión de la forma débil linealizada es:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : [\nabla \mathbf{v} (T\mathbf{1} + \bar{\mathbf{s}}) + (\Delta T\mathbf{1} - 2T\mathbf{1}\nabla^s \mathbf{v} + \bar{\mathbf{c}} : \nabla^s \mathbf{v})] \, dV = -r_1 \quad (\text{E.39})$$

Ecuación de la deformación volumétrica

El residuo de la forma débil de la ecuación de la deformación volumétrica se define como:

$$\int_{\Omega} q \left(-\frac{T}{K} + [JU'(J)] \right) \, dV =: r_2 \quad (\text{E.40})$$

y la ecuación incremental:

$$\Delta r_2 + r_2 = 0 \quad (\text{E.41})$$

donde, utilizando $\Delta J = J \nabla \cdot \mathbf{v}$, se obtiene:

$$\Delta r_2 = \int_{\Omega} q \left(-\frac{\Delta T}{K} + [JU'(J)]' J \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \, dV \quad (\text{E.42})$$

Finalmente la expresión de la forma débil linealizada es:

$$\int_{\Omega} q \left(-\frac{\Delta T}{K} + [JU'(J)]' J \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \, dV = -r_2 \quad (\text{E.43})$$

Capítulo 6

Simulaciones Numéricas

La eficacia de la formulación propuesta se muestra en una serie de ensayos numéricos. Los elementos triangular y tetraédrico propuestos, denominados *T1P1*, se comparan en diversos ensayos con los correspondientes elementos estándar, denominados *P1*, y con los elementos de la formulación *Q1P0*. En los ejemplos se consideran tanto la condición de incompresibilidad, como el comportamiento elasto-plástico simulado mediante un modelo constitutivo J2. Se muestran aplicaciones tanto en problemas de estado plano (2D), en deformación plana, como en problemas tridimensionales (3D). En cuanto al rango de deformaciones, se cubren tanto el rango infinitesimal como el de grandes deformaciones. Con la finalidad de mostrar el comportamiento en situaciones extremas se emplean mallas bastas en la mayoría de los casos. La formulación propuesta está incorporada en el programa de elementos finitos *COupled MEchanical and Thermal analysis (COMET)*, desarrollado en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (*CIMNE*).

El conjunto de ensayos que se presenta se ha organizado de la siguiente manera:

- Ensayos en deformaciones infinitesimales
 - Modelo constitutivo de elasticidad
 - Modelo constitutivo de elasto-plasticidad J2
- Ensayos en grandes deformaciones
 - Modelo constitutivo de elasticidad
 - Modelo constitutivo de elasto-plasticidad J2

6.1 Ensayos en deformaciones infinitesimales

Entre los ensayos en deformaciones infinitesimales con modelo de elasticidad se encuentran el test de la parcela, el problema de una cuña en deformación plana y el test de flujo inducido en una cavidad (*driven cavity flow*). El test de la parcela

es el ensayo básico de validación de elementos; en este caso se realiza en un ensayo en deformación plana. El problema de la cuña tiene por objetivo realizar una comparación del comportamiento del elemento propuesto con el elemento estándar y el elemento $Q1P0$ en situación incompresible. El problema de flujo inducido en una cavidad es un ensayo típico aplicado a las formulaciones mixtas; su objetivo es realizar una comparación entre el elemento $T1P1$ de la presente formulación, estabilizado con el método de las sub-escalas ortogonales $OSGS$, y el elemento similar estabilizado con el método GLS , que es el elemento estabilizado planteado en (Klaas et al., 1999). Entre los problemas con modelo de elasto-plasticidad se encuentran el test de punzonado de Prandtl, el problema de la membrana de Cook, un ensayo de compresión aplicada a un material con régimen de plasticidad perfecta y un ensayo de compresión 3D. Los dos primeros son típicos en la literatura de la tecnología de elementos para realizar validaciones. El objetivo del primero es mostrar, mediante la curva carga vs. desplazamiento, el bloqueo de la formulación estándar en un material con plasticidad perfecta y verificar la eficacia de la formulación propuesta para eliminar este efecto. El problema de la membrana de Cook se utiliza para mostrar en forma comparativa con el elemento $Q1P0$ la convergencia del elemento $T1P1$ hacia la solución en función del refinamiento de la malla. El ensayo de compresión sobre un material con régimen de plasticidad perfecta tiene por objetivo mostrar la necesidad de corregir el parámetro de estabilización en función del desarrollo del flujo plástico y la efectividad de la aproximación propuesta en este trabajo. Finalmente, en el problema de compresión en 3D se muestra mediante distribuciones de tensiones el comportamiento del elemento $T1P1$ en comparación con el elemento $Q1P0$.

6.1.1 Modelo constitutivo de elasticidad

Tests de la Parcela

El test de la parcela es la prueba más importante para los programas de elementos finitos, particularmente al introducir nuevas formulaciones. El test original fue introducido por (Irons and Razzaque, 1972), basado en razonamientos físicos y puede ser interpretado como una prueba que determina si una parcela de elementos sujeta a deformación constante es capaz de reproducir exactamente el comportamiento constitutivo del material y proporcionar las tensiones correctas cuando se hace infinitamente pequeña. Si es así, se puede argumentar que a medida que el tamaño de los elementos disminuye el elemento puede reproducir exactamente el comportamiento de la estructura que se analiza. La satisfacción del test de la parcela proporciona una condición suficiente de convergencia del elemento y verifica que la programación ha sido correcta, (Zienkiewicz and Taylor, 1994a).

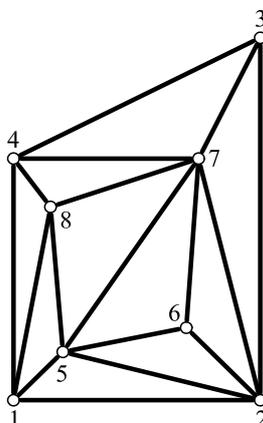


Figura 6.1: Malla utilizada para la verificación de los test de la parcela.

nodo	coord.		desplazamientos		fuerzas	
	x_i	y_i	u	v	F_x	F_y
1	0,0	0,0	0,0	0,0	-2	0
2	2,0	0,0	0,0040	0,0	3	0
3	2,0	3,0	0,0040	-0,00180	2	0
4	0,0	2,0	0,0	-0,00120	-3	0
5	0,4	0,4	0,0008	-0,00024	0	0
6	1,4	0,6	0,0028	-0,00036	0	0
7	1,5	2,0	0,0030	-0,00120	0	0
8	0,3	1,6	0,0006	-0,00096	0	0

Tabla 6.1: Valores utilizados en los tests de la parcela.

La parcela de elementos *T1P1* que se estudia se muestra en la figura 6.1. El test que se aplica es similar al que se presenta en (Zienkiewicz and Taylor, 1994a), con la diferencia de que en este caso se considera un problema de deformación plana. El material es elástico lineal, con módulo de elasticidad $E = 1000$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. La solución en desplazamientos considerada es:

$$u = 0.002x \quad (6.1a)$$

$$v = -0.0006y \quad (6.1b)$$

que en deformación plana produce las siguientes tensiones normales, constantes en toda la parcela:

$$\sigma_x = 2,3460 \quad (6.2a)$$

$$\sigma_y = 0,3462 \quad (6.2b)$$

$$\sigma_z = 0,8077 \quad (6.2c)$$

En la tabla 6.1 se dan los desplazamientos nodales correspondientes a las funciones de desplazamiento 6.1 exactamente. En un primer test se prescriben todos los desplazamientos nodales a los valores especificados en la tabla 6.1 y se verifican en todo el dominio las tensiones teóricas indicadas en (6.2).

Por otro lado, las fuerzas indicadas en la tabla están asociadas a los siguientes valores de tensiones normales, constantes en toda la parcela:

$$\sigma_x = 2,0000 \quad (6.3a)$$

$$\sigma_y = 0,0000 \quad (6.3b)$$

$$\sigma_z = 0,6000 \quad (6.3c)$$

Éstos datos se utilizan en un segundo test. Éste se realiza con el nodo 1 totalmente coartado y el nodo 4 coartado sólo en la dirección x y se aplican fuerzas nodales a los nodos 2 y 3, de acuerdo con los valores de las fuerzas indicados en la tabla 6.1 para estos dos nodos. Este test produjo en toda la parcela las tensiones teóricas indicadas en (6.3). La realización de una serie de verificaciones similares, con otras configuraciones y solicitaciones, asegura una condición suficiente de convergencia del elemento y verifica que la programación ha sido correcta.

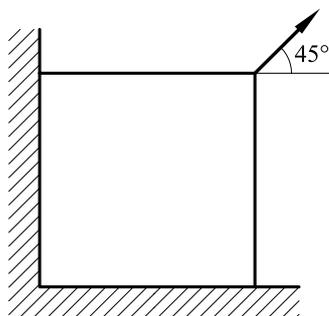


Figura 6.2: Test de cuña en 2D-deformación plana.

Cuña en deformación plana

Este ensayo se realiza con la finalidad de mostrar el comportamiento del elemento propuesto en una situación extrema, desde el punto de vista de las restricciones en los desplazamientos, la singularidad de la carga y la naturaleza incompresible del material.

Se considera una cuña de sección cuadrada de $20 \times 20 \text{ cm}$ en condición de deformación plana, ver figura 6.2. Se restringen totalmente los desplazamientos verticales

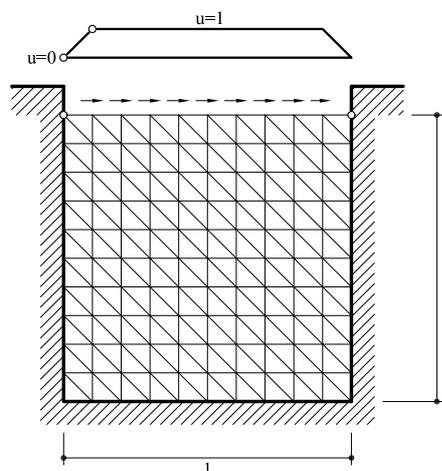


Figura 6.4: Test de flujo inducido en una cavidad (*driven cavity flow*). Datos geométricos. Se muestra una malla de 10×10 elementos triangulares. Se prescriben los desplazamientos (velocidades) horizontales $u = 1$ en la superficie libre, excepto en los nodos extremos donde se prescriben iguales a cero.

del elemento se constata en el aspecto de la geometría deformada de la malla, si se la compara con la que exhibe el elemento $Q1P0$ o la correspondiente a la formulación estabilizada $T1P1$. El efecto de bloqueo de la formulación estándar se puede apreciar también en la distribución de la presión, que presenta un aspecto claramente no realista. Por otro lado, se puede observar que existe similitud entre las distribuciones obtenidas mediante el $Q1P0$ y las correspondientes a la presente formulación. En cuanto a la geometría deformada correspondiente a la malla del $Q1P0$ se puede observar un efecto de “hourglassing”. Esto se debe a que en el elemento $Q1P0$ la condición de incompresibilidad se impone en cada elemento, pues el campo de deformación volumétrica es constante en el dominio elemental y discontinuo entre elementos. En comparación con ésta, se puede apreciar el correcto aspecto de la geometría deformada que se obtiene con la malla de elementos estabilizados de la presente formulación. En todos los casos se debe tener en cuenta que las mallas utilizadas en esta comparación son sumamente bastas, lo que resalta los defectos y bondades de estas formulaciones.

Flujo inducido en una cavidad (*Driven cavity flow*)

El objetivo de este ensayo es realizar una comparación entre el elemento $T1P1$ de la formulación propuesta y el elemento similar estabilizado mediante el método GLS , propuesto en (Klaas et al., 1999). Éste es un test estándar en la literatura, particularmente en la de mecánica de fluidos, empleado para mostrar el comportamiento

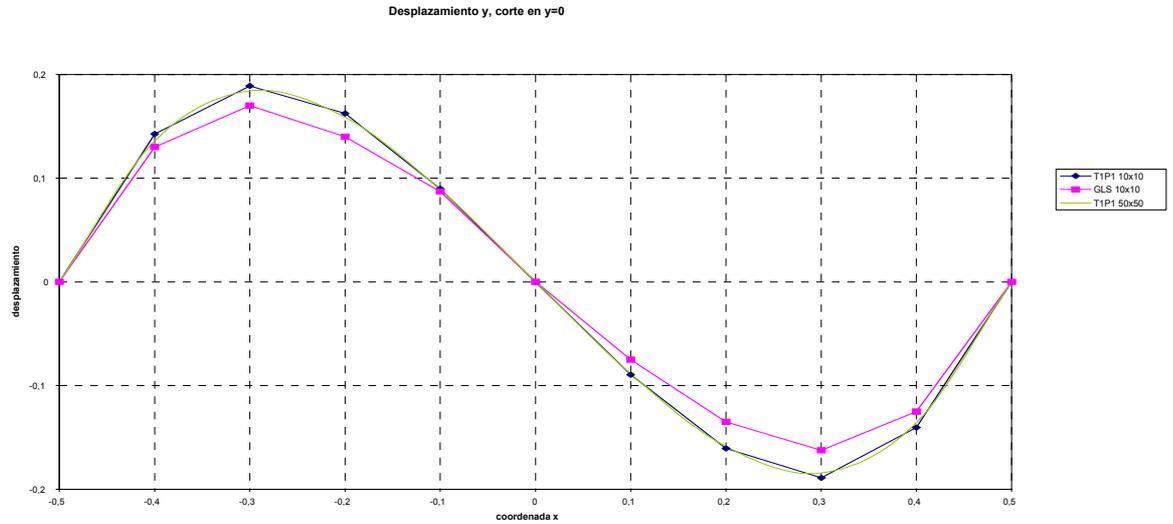


Figura 6.5: Problema de flujo inducido en una cavidad. Desplazamiento vertical v en el plano de corte horizontal central, $y = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ y el elemento similar de la formulación GLS con mallas de 10×10 , comparadas con la solución con malla de elementos $T1P1$ de 50×50 .

de formulaciones mixtas en problemas en medios incompresibles; (Hughes, 1987), (Codina, 1992), (Oñate et al., 2002).

La figura 6.4 muestra los datos geométricos del test, y una malla de 10×10 elementos como ejemplo. El medio confinado en la cavidad es incompresible; los efectos de la fuerza gravitatoria se desprecian en este problema. En las paredes laterales e inferior los desplazamientos están prescritos como nulos, tanto en dirección horizontal como vertical, x e y respectivamente. En la superficie libre se prescribe el desplazamiento x en $u = 1$, excepto en los nodos extremos en los que se prescribe el valor nulo. Además, como en este problema sólo se prescriben condiciones de contorno en desplazamientos, para fijar la respuesta en presión es necesario establecer el valor de este campo en un punto. En este caso se ha prescrito presión nula en el punto medio de la base, es decir $p = 0$. Estas condiciones y los parámetros del material se han tomado como en la referencia (Oñate et al., 2002); se han establecido el módulo de elasticidad $E = 3$ y el coeficiente de Poisson $\nu = 0.49999995$.

Se compara el comportamiento del elemento $T1P1$ con el elemento similar de la formulación estabilizada GLS . Desde el punto de vista de las variables y las ecuaciones del elemento, la diferencia entre ambas formulaciones es la presencia de la proyección del gradiente de presión en el término de estabilización del elemento $T1P1$.

En la figura 6.5 se muestran las curvas correspondientes a los desplazamientos

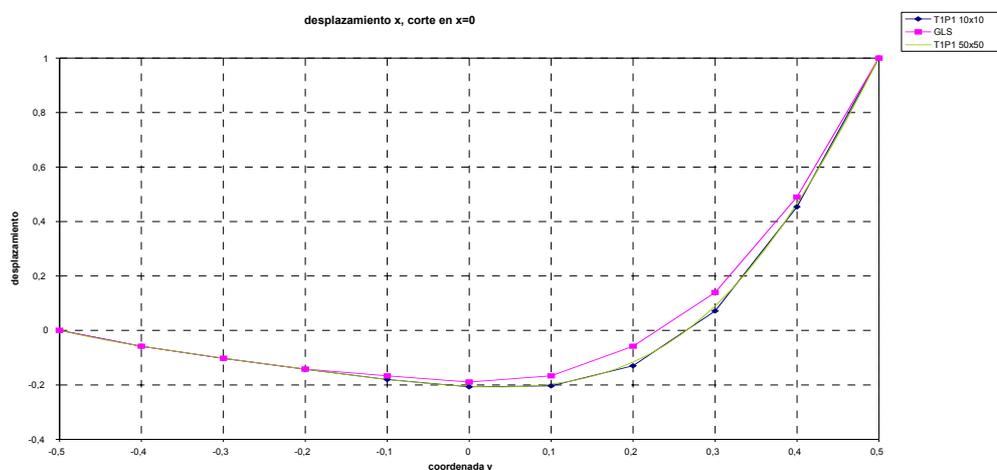


Figura 6.6: Problema de flujo inducido en una cavidad. Desplazamiento horizontal u en el plano de corte vertical central, $x = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ y el elemento similar de la formulación GLS con mallas 10×10 comparadas con la solución con malla de elementos $T1P1$ de 50×50 .

verticales v en el plano horizontal central, $y = 0$, obtenidas mediante elementos $T1P1$ y el elemento similar de la formulación estabilizada GLS . Como referencia se ha tomado la curva para una malla de 50×50 elementos $T1P1$, ya que en esta malla los resultados de las formulaciones básicamente son coincidentes. En la figura se presentan los resultados para una malla de 10×10 elementos. Se observa que el elemento $T1P1$, estabilizado mediante el método de las sub-escalas ortogonales, obtiene mejores resultados en mallas bastas que el elemento similar con estabilización GLS .

De manera similar, en la figura 6.6 se muestran las curvas correspondientes a los desplazamientos horizontales u en el plano vertical central, $x = 0$, obtenidas mediante el elemento $T1P1$ y el elemento similar de la formulación estabilizada GLS . Se observa que, con la misma malla de 10×10 elementos, el elemento $T1P1$ obtiene mejores resultados que el elemento similar con estabilización GLS . El resultado obtenido por el $T1P1$ en esta malla basta es muy cercano al correspondiente al obtenido con la malla de 50×50 elementos utilizada como referencia.

En la figura 6.7 se muestran las curvas correspondientes a la presión p en el plano horizontal central, $y = 0$, obtenidas mediante el elemento $T1P1$ y el elemento similar de la formulación estabilizada GLS . Se observa que, con la misma malla de 10×10 elementos, el elemento $T1P1$ estabilizado mediante el método de las sub-escalas ortogonales obtiene mejores resultados que el elemento similar con estabilización GLS .

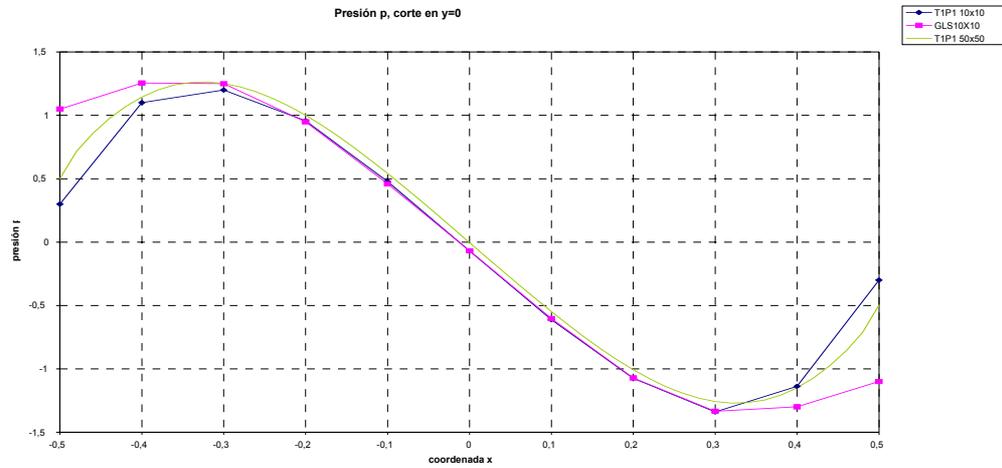


Figura 6.7: Problema de flujo inducido en una cavidad. Presión p en el plano de corte horizontal central, $y = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ y el elemento similar de la formulación GLS con mallas 10×10 , comparadas con la solución con malla de elemento $T1P1$ de 50×50 .

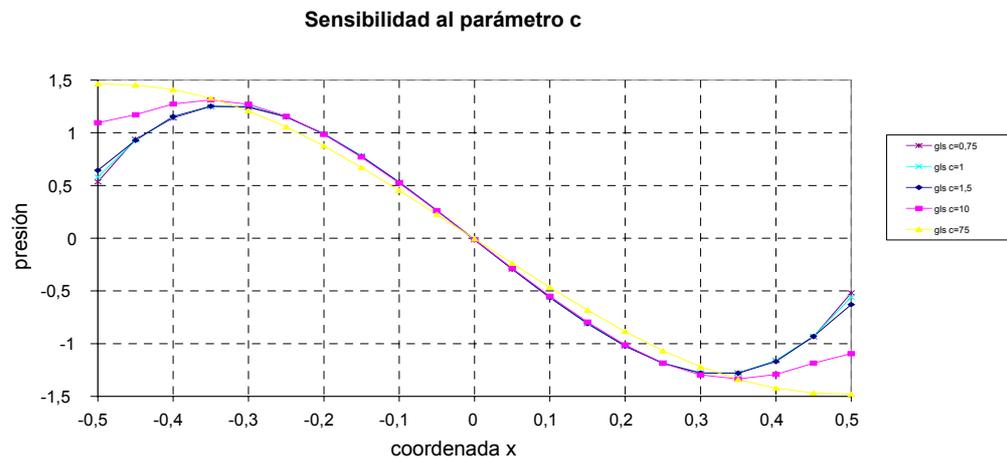


Figura 6.8: Problema de flujo inducido en una cavidad. Sensibilidad al parámetro de estabilización. Presión p en el plano de corte horizontal central, $y = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ estabilizado con el método GLS con malla de 20×20 .

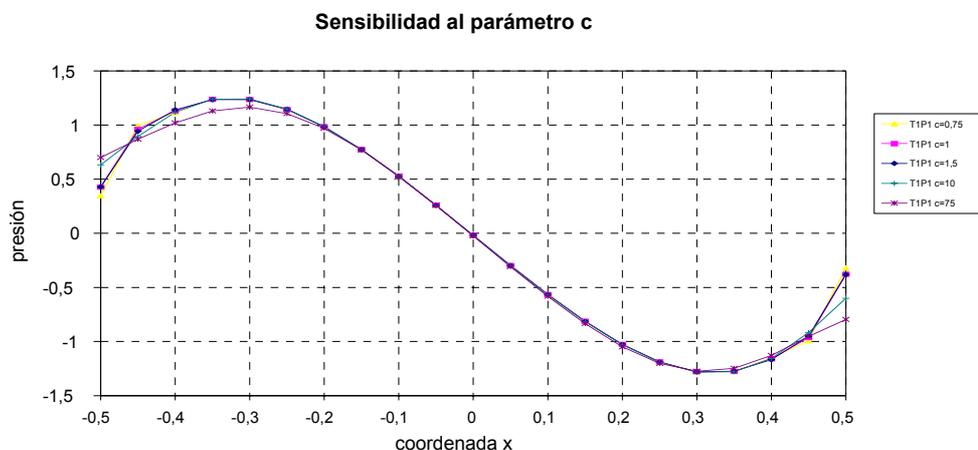


Figura 6.9: Problema de flujo inducido en una cavidad. Sensibilidad al parámetro de estabilización. Presión p en el plano de corte horizontal central, $y = 0$. Resultados para elemento $T1P1$ propuesto.

Todas las curvas anteriores de desplazamiento y presión se han obtenido con el valor de $c = 1$ en el parámetro de estabilización, definido como $\tau = ch^2/2\mu$. La sensibilidad de los resultados respecto al valor de c se evalúa en los siguientes gráficos, 6.8 y 6.9, para las formulaciones GLS y $T1P1$. En las curvas mostradas, obtenidas con una malla de 20×20 elementos, se puede observar la sensibilidad de la presión calculada en el plano $y = 0$ con respecto a las variaciones del parámetro c . Como se puede apreciar, el comportamiento del elemento $T1P1$, estabilizado con el método de las sub-escalas ortogonales, es bastante menos sensible a las variaciones de este parámetro en comparación con el elemento similar de la formulación GLS . La menor sensibilidad del elemento $T1P1$ con respecto al valor del parámetro de estabilización es muy importante, particularmente si se tiene en cuenta que para considerar el efecto del desarrollo de flujo plástico en el valor del mismo es necesario introducir algunas aproximaciones. El elemento $T1P1$ tiene un comportamiento más robusto con respecto al valor del parámetro de estabilización adoptado que el elemento estabilizado por el método GLS .

6.1.2 Modelo de elasto-plasticidad J2

Test de punzonado de Prandtl (*Prandtl punch test*)

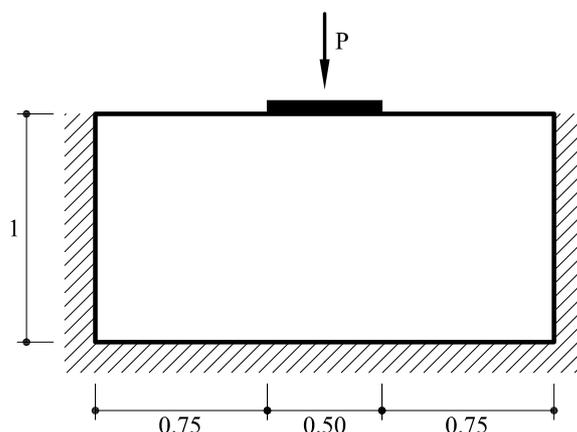


Figura 6.10: Test de punzonado de Prandtl (*Prandtl punch test*). Datos geométricos en *mm*.

El test de punzonado de Prandtl es un ejemplo que permite apreciar el fenómeno de bloqueo de elementos estándar en plasticidad incompresible. Este test es utilizado por diversos autores para mostrar la eficacia de sus formulaciones en la eliminación de este efecto; (Wells et al., 2002), (Huerta and Fernandez-Mendez, 2001). El objetivo es verificar que la respuesta de la formulación está libre de bloqueo; para este fin el indicador que se observa es la carga límite en un proceso de compresión sobre un espécimen. En este test se emplean los datos utilizados en la primera de éstas referencias.

La figura 6.10 muestra los datos geométricos correspondientes al test en deformación plana. Un bloque rígido se presiona contra la superficie superior del material confinado en el recinto mostrado. Este material tiene el movimiento completamente restringido tanto en la base como en las paredes laterales. El comportamiento plástico del material se simula mediante un modelo de plasticidad J2 perfectamente plástico. Los parámetros del material son: módulo de elasticidad del material $E = 1,0 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,49$, tensión de fluencia $\sigma_Y = 0,01 \text{ MPa}$.

Se ha discretizado la mitad del dominio aprovechando la simetría. En la figura 6.11 se muestran las mallas para el cálculo de la curva fuerza vs. desplazamiento y para la obtención de la distribución de deformación plástica equivalente, respectivamente (la discretización mostrada incluye el bloque rígido en la zona superior). Las estructuras de nodos correspondientes a las mallas de cuadriláteros, utilizadas para

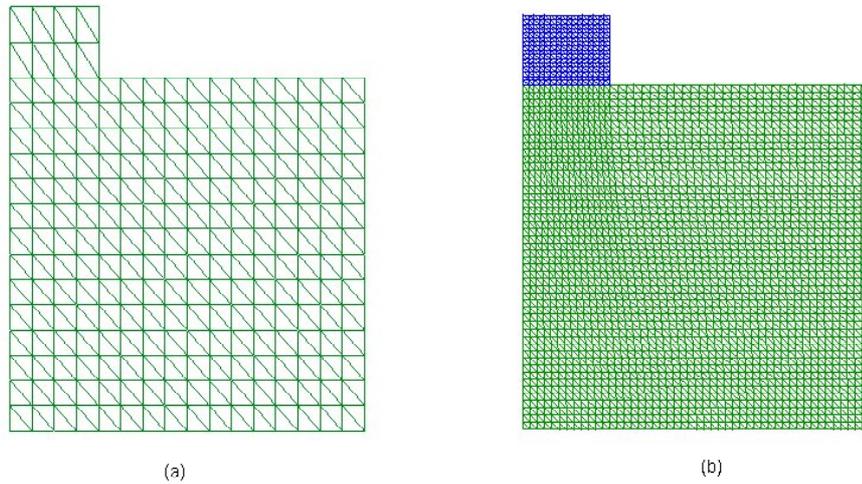


Figura 6.11: Test de punzonado de Prandtl (*Prandtl punch test*). Malla estructurada para a) el cálculo de la curva fuerza vs. desplazamiento b) obtención de la distribución de deformación plástica equivalente

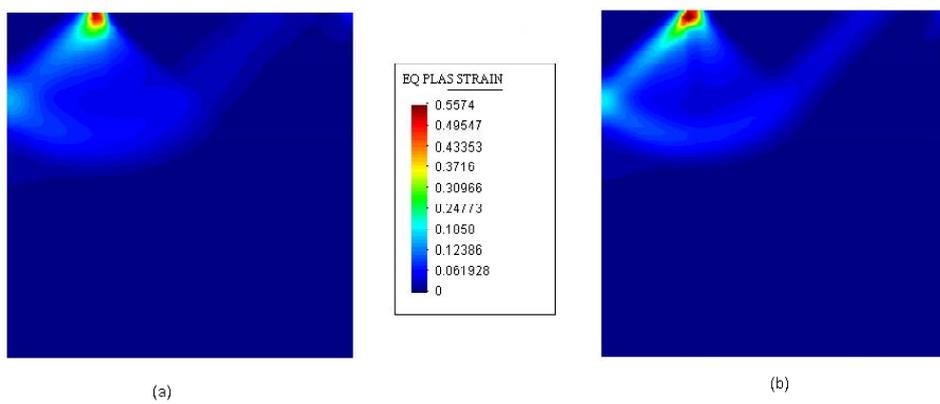


Figura 6.12: Test de punzonado de Prandtl (*Prandtl punch test*). Distribuciones de deformación plástica equivalente para a) elemento *Q1P0* b) elemento propuesto *T1P1*

el elemento $Q1P0$, son las mismas en cada caso (igual número de nodos y ubicación de los mismos). La malla estructurada empleada para la obtención de las curvas fuerza vs. desplazamiento se muestra en la figura 6.11 (a). El número de nodos de esta malla es 255. Para la obtención de la distribución de deformación plástica equivalente se utiliza la malla estructurada que se muestra en la figura 6.11 (b). Esta malla tiene 2673 nodos.

En la figura 6.12 se muestran las distribuciones de deformación plástica equivalente para un valor del desplazamiento del punto central de la superficie superior igual a $0,04\text{ mm}$. Ambas distribuciones muestran una alta concentración de deformaciones en el borde de aplicación de la carga y la correcta formación de las bandas de localización en el material.

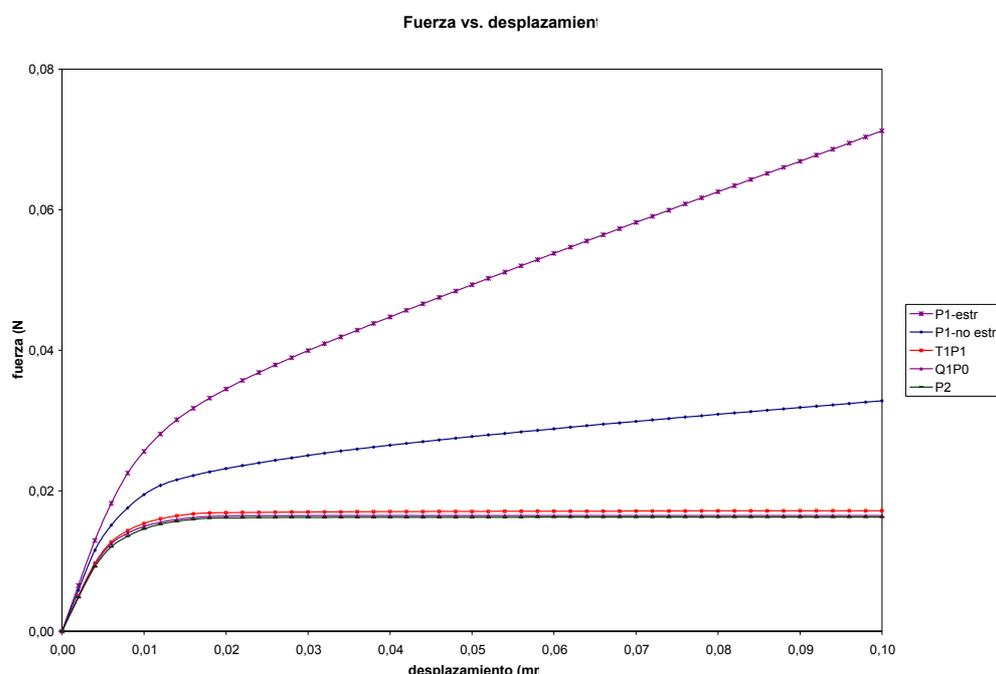


Figura 6.13: Test de punzonado de Prandtl (*Prandtl punch test*). Curva fuerza vs. desplazamiento del punto de aplicación de la carga.

En la figura 6.13 se muestran las curvas fuerza vs. desplazamiento del punto de aplicación de la placa rígida, obtenida mediante el elemento triangular de la formulación propuesta, denominado $T1P1$, los elementos triangulares estándar lineal y cuadrático, denominados $P1$ y $P2$ respectivamente, y el elemento $Q1P0$. Se muestran además los resultados ofrecidos por los elementos triangulares $P1$ y $P2$ utilizando una malla no-estructurada con similar número de elementos que las mallas

de triángulos anteriores. El efecto de bloqueo de la solución con el elemento $P1$ en una malla no-estructurada se puede apreciar por la inexistencia de una carga límite en el rango perfectamente plástico. Para el mismo elemento el efecto de bloqueo se aminora, pero no se elimina, si se emplea una malla no-estructurada. Este efecto se puede observar también en el ensayo de compresión profunda más adelante. La excesiva rigidez de este elemento se aprecia no sólo en el rango plástico sino también en el elástico; esta rigidez se revela en la pendiente de la línea elástica. Los elementos $T1P1$ propuesto y $Q1P0$, utilizados en mallas estructuradas, muestran correctamente la carga plástica límite. Por otro lado, en una malla no-estructurada el elemento triangular $P2$ también muestra correctamente el valor de la carga límite, pero tiene la desventaja de tener un mayor número de grados de libertad por elemento que el $T1P1$ y mayor costo computacional.

Membrana de Cook

El problema de la membrana de Cook se utiliza como referencia para mostrar la validez de las formulaciones de elementos, tal como se puede ver en (Simo and Rifai, 1990), (Miehe, 1994), entre otros. Se trata de un problema de flexión predominante sobre un panel de sección variable empotrado en uno de sus extremos, ver figura 6.14.

Los datos del problema han sido tomados de (Simo and Rifai, 1990). El panel se somete en su extremo libre a una fuerza distribuida de cizallamiento de valor $F = 1,8$. Se emplea el modelo constitutivo de elasto-plasticidad $J2$ caracterizado mediante los siguientes parámetros: módulo de elasticidad $E = 70$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.4999$, límite elástico $\sigma_y = 0,243$, coeficiente de endurecimiento

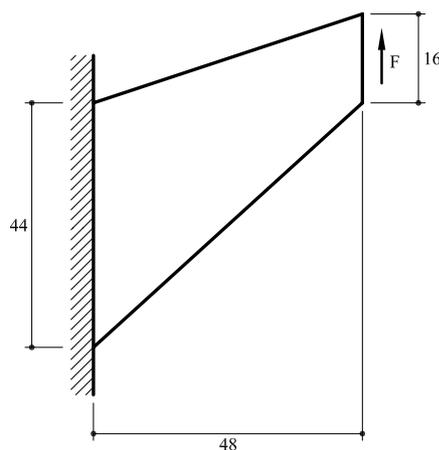


Figura 6.14: Problema de la membrana de Cook.

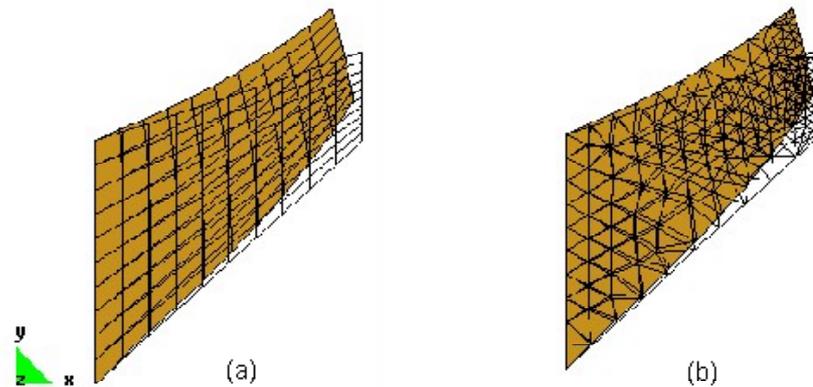


Figura 6.15: Membrana de Cook. Mallas deformadas de 10 elementos por lado a) de cuariláteros $Q1P0$ y b) de triángulos $T1P1$

isotrópico $H = 0,135$.

En la discretización se emplean cinco mallas diferentes y se evalúa la convergencia de la formulación en comparación con el elemento $Q1P0$. En las referencias citadas las mallas de cuadriláteros se caracterizan típicamente por el número de elementos por lado, por ejemplo 2×2 , 5×5 , 10×10 , 20×20 y 50×50 elementos por lado. En el presente caso se utiliza el mismo parámetro característico pero, tal como se ha mencionado antes, debe tenerse en cuenta que una malla con estructura similar de nodos pero con triángulos en vez de cuadriláteros tiene en total el doble de elementos.

En la figura 6.15 se muestran las mallas deformadas de elementos $Q1P0$ y de elementos triangulares de la presente formulación $T1P1$. El valor del desplazamiento de la esquina superior en función del número de elementos por lado se muestra en la figura 6.16, tanto para el elemento triangular de la presente formulación $T1P1$, como para el elemento cuadrilátero $Q1P0$ y el elemento triangular de la formulación estándar, $P1$. La figura muestra el pobre comportamiento del elemento triangular estándar $P1$, debido al efecto de bloqueo de la formulación de Galerkin en situaciones incompresibles. El desplazamiento predicho por este elemento, incluso utilizando mallas finas, está muy por debajo del valor correcto. Se puede apreciar también que el elemento de la formulación estabilizada propuesta converge más rápidamente a la solución que el elemento $Q1P0$.

En la figura 6.17 se muestran las distribuciones de presión de cada una de las formulaciones para la malla de 50×50 elementos. Se puede apreciar la similitud de los resultados ofrecidos por el elemento $Q1P0$ y el $T1P1$ de la formulación propuesta. Asimismo, en la distribución de presión correspondiente al elemento estándar $P1$ se puede apreciar el severo efecto de bloqueo.

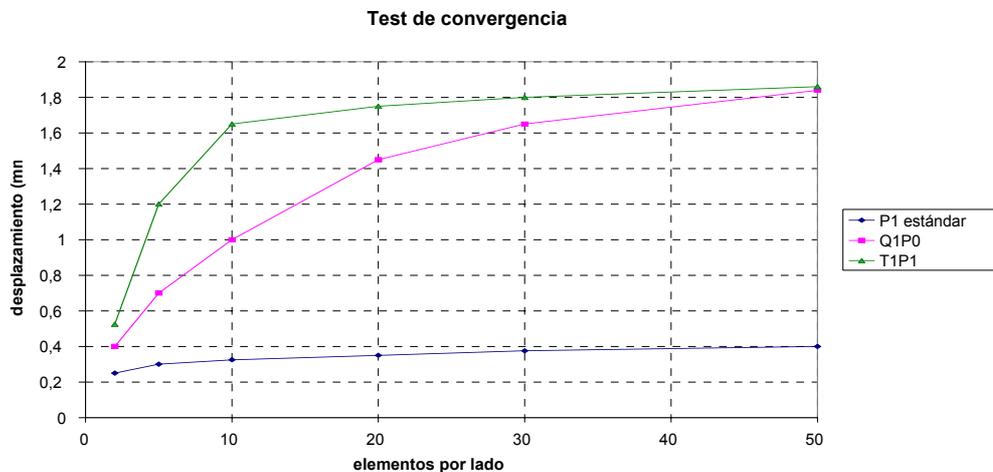


Figura 6.16: Problema de la membrana de Cook con modelo de plasticidad $J2$ incompresible. Ensayo comparativo de convergencia entre el elemento triangular de la formulación estándar, el elemento $Q1P0$ y el elemento triangular de la presente formulación $T1P1$.

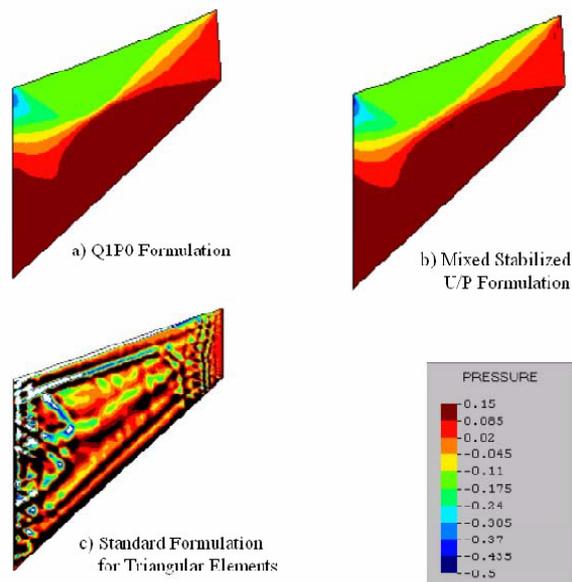


Figura 6.17: Problema de la membrana de Cook con modelo constitutivo de elastoplasticidad $J2$. Distribución de presión con malla de 50×50 elementos por lado de tipo a) cuadrilátero $Q1P0$, b) $T1P1$, triángulo u/p estabilizado de la presente formulación c) $P1$, triángulo estándar.

Compresión 2D con comportamiento elástico compresible y régimen de plasticidad perfecta

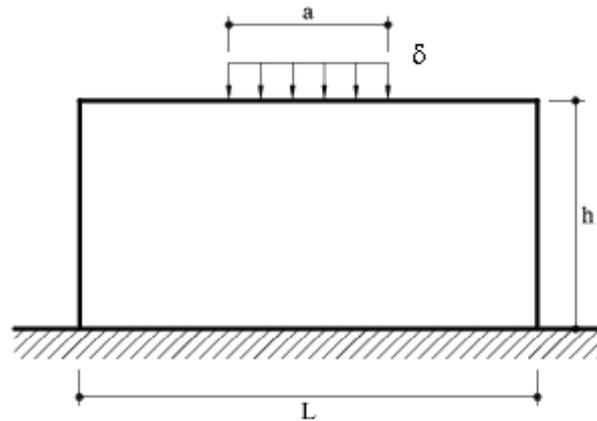


Figura 6.18: Compresión no-homogénea en deformación plana. Datos geométricos: $L = 0,60\text{ m}$, $h = 0,20\text{ m}$, $a = 0,20\text{ m}$ y $\delta = 0,012\text{ m}$.

Se presenta ahora un ensayo de compresión no-homogénea en deformación plana para mostrar el efecto del bloqueo de los elementos estándar en plasticidad y la necesidad de tener en cuenta el efecto del desarrollo del flujo plástico en el cálculo del parámetro de estabilización. La compresión se realiza imponiendo desplazamientos en la superficie superior del espécimen.

Las características geométricas se muestran en la figura 6.18. Un bloque de $0,60 \times 0,20\text{ m}$ se somete en la zona central de $0,20\text{ m}$ de su parte superior a compresión mediante la aplicación de un desplazamiento $\delta = 0,012\text{ m}$. Las condiciones de contorno se prescriben de manera que en la base los desplazamientos verticales son nulos y los horizontales son libres, mientras que en toda la superficie superior los desplazamientos horizontales son nulos. Se emplea en la simulación del material un modelo constitutivo elasto-plástico J2, con régimen de plasticidad perfecta y régimen elástico compresible. Los parámetros del modelo son: el módulo de elasticidad $E = 1,96 \times 10^5\text{ MPa}$, el coeficiente de Poisson en $0,3$ y el límite de fluencia $\sigma_Y = 150\text{ MPa}$.

El dominio completo se discretiza con una malla de cuadriláteros $Q1P0$ de 341 nodos y 300 elementos. Las mallas de triángulos, $T1$ o $T1P1$, son mallas no-estructuradas de 357 nodos y 632 elementos. El desplazamiento prescrito total se aplica en 30 pasos.

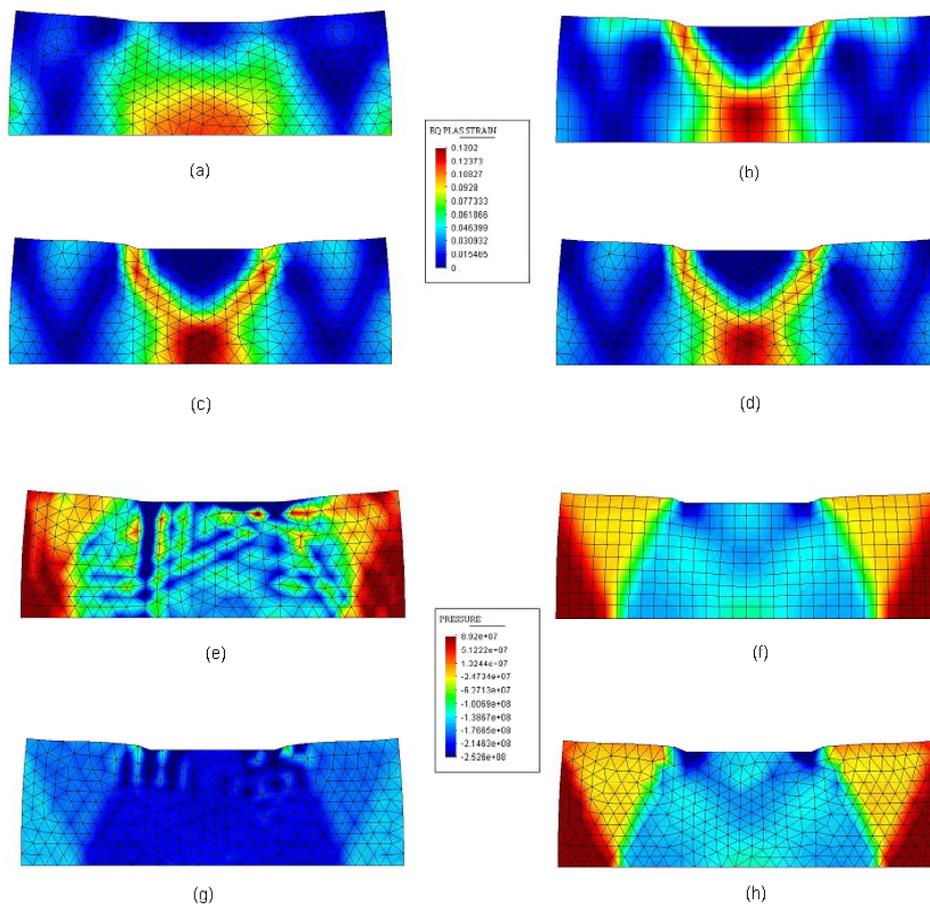


Figura 6.19: Compresión no-homogénea en deformación plana. Distribuciones de deformación plástica equivalente correspondiente a a) elemento triangular estándar $P1$ b) elemento $Q1P0$ c) y d) elemento $T1P1$ sin y con corrección de módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización, respectivamente. Distribuciones de presión correspondientes a e) elemento triangular estándar $P1$ f) elemento $Q1P0$ g) y h) elemento $T1P1$ sin y con corrección de módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización, respectivamente.

En la figuras 6.19 se muestran las distribuciones de deformación plástica equivalente, figuras (a)-(d), y las distribuciones de presión, figuras (e)-(h), correspondientes al elemento triangular estándar $P1$, el elemento $Q1P0$ y dos distribuciones correspondientes al elemento $T1P1$, una de ellas sin considerar el efecto de desarrollo del flujo plástico en el módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización, y la otra con la aproximación propuesta en este trabajo. En la figura 6.19 (a) se puede observar que el elemento $P1$ no es capaz de captar correctamente el efecto de localización de las deformaciones plásticas; en las figuras (b), (c) y (d) se observa que el elemento $Q1P0$ y el elemento $T1P1$, tanto si se considera o no la aproximación al efecto del flujo plástico en el módulo de cizallamiento, sí logran captar el efecto de la localización de deformaciones plásticas. Incluso se puede apreciar en este aspecto un comportamiento del elemento $T1P1$ superior al del $Q1P0$. La figura 6.19 (e) muestra la distribución de presión que ofrece el elemento estándar. En ésta se aprecia el efecto de bloqueo del elemento. Puesto que en régimen elástico el material tiene comportamiento compresible, el bloqueo en este caso es atribuible completamente al desarrollo de deformaciones plásticas, que de acuerdo con la hipótesis de los modelos de plasticidad $J2$ éstas son isocóricas. La figura (f) muestra la distribución obtenida por la malla de elementos $Q1P0$. Como se puede apreciar, la respuesta no sufre el efecto de bloqueo. La figura (g) muestra la distribución de presión que ofrece el elemento $T1P1$ cuando no se tiene en cuenta el efecto del flujo plástico en el parámetro de estabilización. La figura (h) muestra la distribución de presión que ofrece el elemento $T1P1$ con la aplicación de la aproximación propuesta al módulo de cizallamiento en régimen plástico. En comparación con la respuesta que ofrece el elemento $Q1P0$, se puede apreciar que la respuesta del elemento $T1P1$ permite captar mejor las zonas de concentración de presiones. Se percibe cierta sensibilidad a la orientación de los elementos en las distribuciones obtenidas, puesto que el análisis se ha realizado con mallas bastas y, en el caso de los elementos triangulares, con mallas bastas no estructuradas.

Bloque 3D sometido a compresión con régimen de plasticidad perfecta

El comportamiento de la presente formulación se evalúa finalmente en el caso tridimensional. Un bloque de acero de $0,3 \times 0,3 \times 0,2$ m se somete a una presión de compresión de $1,0 \times 10^4$ MPa en la superficie superior, sobre un área de $0,14 \times 0,14$ m. Se ha considerado un comportamiento elasto-plástico perfecto con módulo de elasticidad $E = 2,0 \times 10^5$ MPa, límite elástico $\sigma_o = 150$ MPa, junto con la condición de incompresibilidad establecida mediante el coeficiente de Poisson $\nu = 0,4999$.

Se comparan los resultados obtenidos por el $Q1P0$ en una malla de $15 \times 15 \times 10$ hexaedros y por la presente formulación en una malla no estructurada de tetraedros de $15 \times 15 \times 10$ nodos por lado.

En las figuras 6.20 y 6.21 se muestran respectivamente la deformación y la distribución de presiones sobre una sección de la configuración deformada. Se puede apreciar la similitud en las respuestas en deformaciones y en tensiones ofrecidas por cada el elemento $T1P1$ y el $Q1P0$.

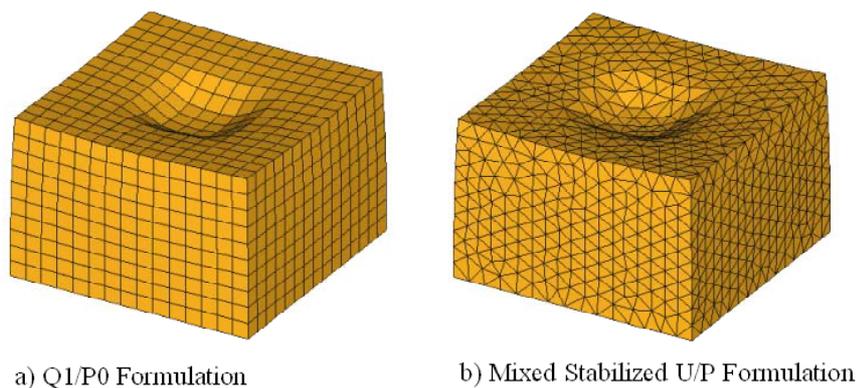


Figura 6.20: Ensayo de compresión 3D con modelo elasto-plástico J2. Mallas deformadas: a) malla de hexaedros de la formulación $Q1P0$ b) malla de elementos tetraédricos estabilizados $T1P1$.

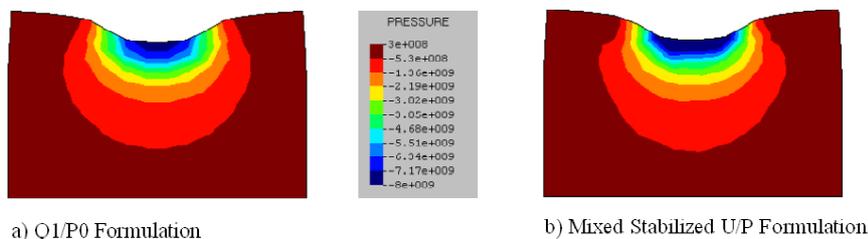


Figura 6.21: Ensayo de compresión 3D con modelo elasto-plástico J2. Distribuciones de presión correspondientes a a) $Q1P0$ b) $T1P1$

6.2 Ensayos en grandes deformaciones

Se presentan a continuación los ensayos en grandes deformaciones; se consideran ensayos con modelos elásticos y con un modelo de elasto-plasticidad J2. Los ensayos elásticos se realizan con un modelo de hiperelasticidad y un modelo de elasticidad en direcciones principales. Se presentan ensayos con elasticidad tanto compresible como incompresible. Se presenta un test de convergencia en forma comparativa en función del refinamiento de la malla para un material hiperelástico compresible en un ensayo de compresión no-homogénea. En un ensayo similar se compara el comportamiento del elemento *T1P1* con el elemento *Q1P0* en elasticidad incompresible en deformación plana. Se presenta también un ensayo de compresión en 3D, tanto en elasticidad compresible como incompresible. Entre los ensayos con modelos de elasto-plasticidad se consideran también materiales con régimen elástico tanto compresible como incompresible. Se exploran de manera más detallada aspectos del comportamiento del elemento *T1P1*. Se realizan ensayos en 2D y 3D y se comparan en cada caso el comportamiento y el costo computacional del elemento *T1P1* y el elemento *Q1P0*. En un ensayo 2D se muestra la sensibilidad de la respuesta con respecto al coeficiente del parámetro de estabilización. En un ensayo en compresión 3D se muestra la necesidad de corregir el parámetro de estabilización en función del desarrollo de flujo plástico en problemas con grandes deformaciones plásticas y la efectividad de la corrección propuesta en este trabajo.

6.2.1 Modelos de elasticidad

Compresión 2D con modelo hiper-elástico

El ensayo de compresión no-homogénea, presentado en (Reese et al., 1999) y (Reese and Wriggers, 2000), se utiliza para mostrar el comportamiento de la presente formulación. Este es un ensayo con carga de presión aplicada al espécimen. Se obtendrán las curvas de convergencia al valor del desplazamiento en función al refinamiento de la malla para el elemento *T1P1* y los elementos estándar y *Q1P0*.

Las características geométricas se muestran en la figura 6.22. Se comprime el espécimen mediante una presión de compresión aplicada sobre la zona central de la superficie superior. Las cargas se miden mediante el factor de carga $nu = p/p_0$, relativo a una carga de referencia $p_0 = 10 \text{ N/mm}^2$ (esta presión se considera aplicada sobre un espesor de 1 mm). Las condiciones de contorno se prescriben de manera que en la base los desplazamientos verticales son nulos y los horizontales son libres, mientras que en la zona central superior los desplazamientos horizontales son nulos.

En este ensayo se ha considerado un modelo constitutivo hiperelástico Neo-Hooke, el mismo empleado en la explicación de la formulación en el capítulo 5,

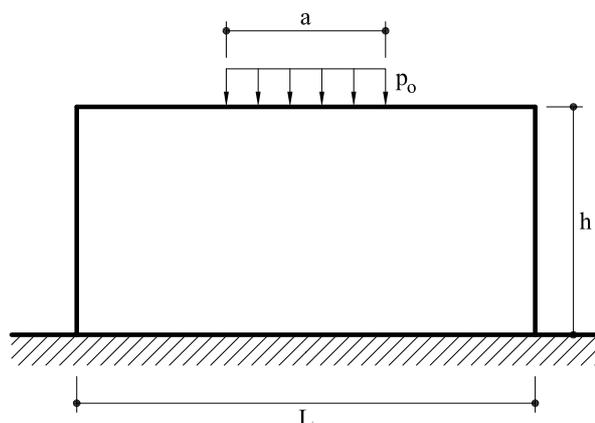


Figura 6.22: Ensayo de compresión no-homogénea 2D. Datos geométricos $L = 20 \text{ mm}$, $a = h = 10 \text{ mm}$.

con módulo de elasticidad $E = 2,085 \times 10^5 \text{ Pa}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. La expresión de las tensiones del modelo es:

$$\boldsymbol{\tau} = K [JU'(J)] \mathbf{1} + \mu \text{dev} [\bar{\mathbf{b}}] \quad (6.4)$$

donde $U(J) = \frac{1}{2} [\ln J]^2$, $\bar{\mathbf{b}}$ es la componente isocórica del tensor izquierdo de Cauchy-Green; K y μ son el módulo de compresibilidad y el módulo de cizallamiento correspondientes, respectivamente.

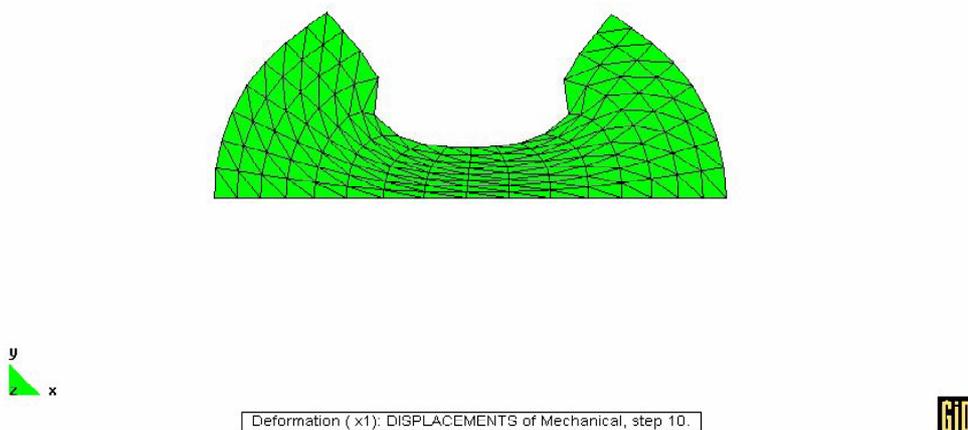


Figura 6.23: Test de compresión no-homogenea. Modelo hiperelástico Neo-Hooke. Malla de 8 elementos sobre la altura del bloque deformada. Factor de carga aplicado $\nu = 40$.

Se aplican factores de carga de $nu = 20, 40$ y 60 y se evalúa el porcentaje de compresión, medido en el punto central de la superficie superior como la relación

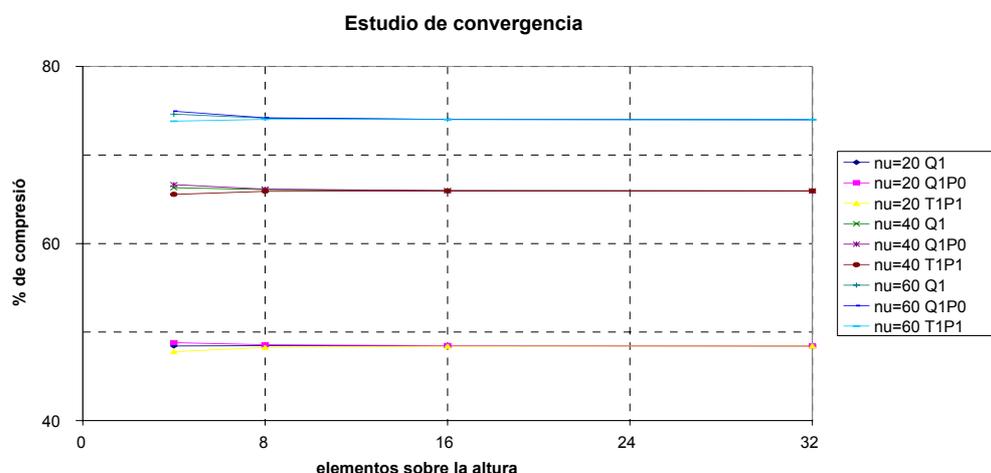


Figura 6.24: Estudio de convergencia con respecto al refinamiento de la malla. Comparación de la relación de compresión (evaluada en el punto central superior) obtenida por los elementos $Q1$, $Q1P0$ y $T1P1$ para diferentes factores de carga.

entre la altura deformada y la altura original de 10 mm . Se comparan los elementos cuadriláteros $Q1$ estándar y $Q1P0$ con el elemento triangular $T1P1$, empleando mallas estructuradas de 4, 8, 16 y 32 elementos sobre la altura del bloque para discretizar el dominio completo.

La figura 6.23 muestra la malla deformada de 8 nodos sobre la altura del bloque sometida a un factor de carga de $\nu = 40$ y el correcto patrón de deformación, exento de modos de deformación espurios. En la figura 6.24 se muestra el resultado del test comparativo de convergencia con respecto al refinamiento de la malla. Los resultados indican la similitud entre los resultados ofrecidos por el elemento $T1P1$ propuesto y los elementos $Q1$ y $Q1P0$ en grandes deformaciones. Además, se aprecia que todos ellos, incluso el estándar $P1$, tienen buen comportamiento en el caso compresible (coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$).

Compresión 2D con modelo elástico en direcciones principales

Este es un ensayo de compresión en el que se imponen desplazamientos en la superficie superior del espécimen. El material elástico en este caso es incompresible y su comportamiento se simula mediante un modelo constitutivo diferente al citado como referencia en la explicación de la formulación en el capítulo 5 (utilizado en el ejemplo anterior).

Las características geométricas son similares a las del ensayo de compresión con desplazamiento aplicado en deformaciones infinitesimales, es decir, el espécimen es de dimensiones $0,60 \times 0,20\text{ m}$. Las condiciones de contorno también son las mis-

mas; es decir, se prescriben nulos los desplazamientos verticales en la base y en la superficie superior se prescriben nulos los desplazamientos horizontales. En este caso, el desplazamiento con el que se comprime la zona central superior es de $0,08\text{ m}$.

El modelo constitutivo utilizado es el modelo de elasticidad en direcciones principales propuesto en (Simo, 1991). Los parámetros del material son el módulo de elasticidad $E = 1,96 \times 10^5\text{ MPa}$, el coeficiente de Poisson $\nu = 0,4999$ y el límite de fluencia $\sigma_Y = 150\text{ MPa}$.

En la figura 6.25 se muestran las mallas deformadas de cuadriláteros $Q1P0$, de 341 nodos y 300 elementos, y de triángulos $T1P1$, de 357 nodos y 632 elementos, respectivamente. Las distribuciones de presión y de tensión de Von Mises se muestran en las figuras 6.26 y 6.27, respectivamente.

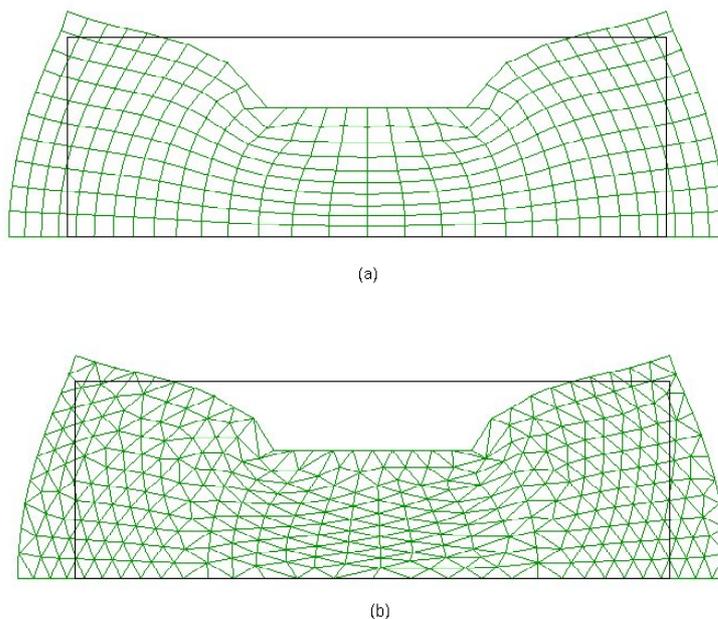


Figura 6.25: Ensayo de compresión no-homogénea. Mallas de a) elementos $Q1P0$ b) elementos $T1P1$

Se observa la similitud entre los resultados ofrecidos por el elemento $Q1P0$ y el elemento propuesto $T1P1$. También se puede apreciar como el elemento $T1P1$ capta mejor que el elemento $Q1P0$ las zonas de concentración de tensiones. Por otro lado, en la malla deformada del elemento $Q1P0$ se percibe una tendencia leve a desarrollar el efecto de *hourglassing* en la superficie superior.

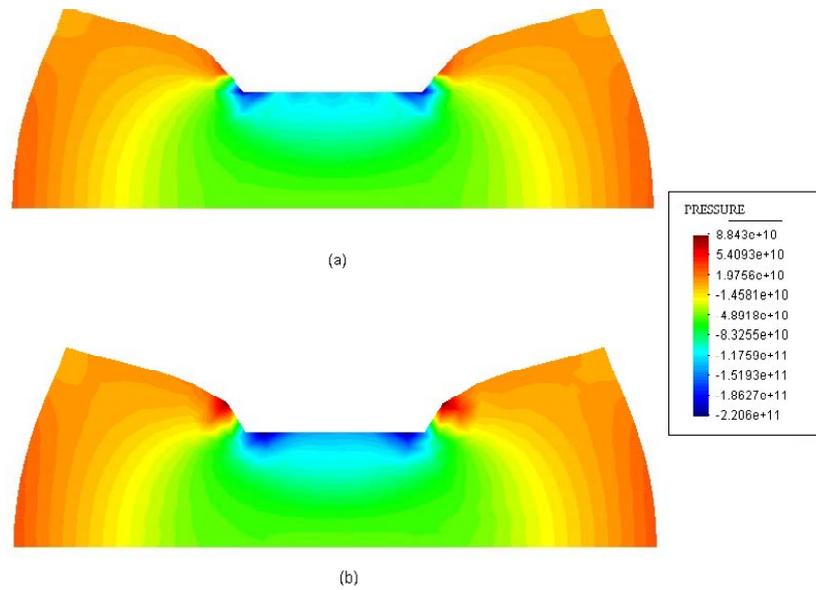


Figura 6.26: Ensayo de compresión no-homogénea. Distribuciones de presión correspondientes a malla de elementos a) $Q1P0$ b) $T1P1$

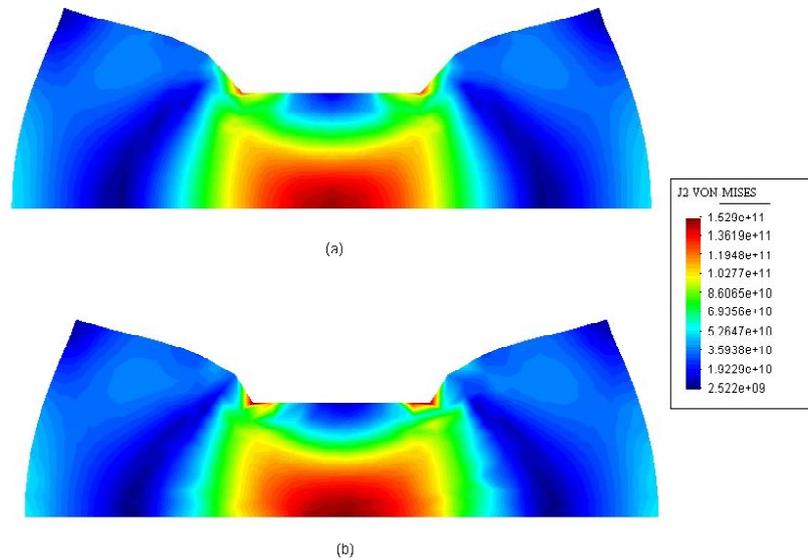


Figura 6.27: Ensayo de compresión no-homogénea. Distribuciones de tensión de Von Mises correspondientes a malla de elementos a) $Q1P0$ b) $T1P1$

Bloque sometido a compresión 3D

Se presentan ahora un ensayo de compresión con la finalidad de mostrar el comportamiento del elemento de la formulación propuesta en el caso tridimensional. Un bloque de acero de dimensiones $0,85 \times 0,85 \times 0,6$ m se comprime por su parte superior. Se impone un desplazamiento del 15% con respecto a su altura original. La figura 6.28 (a) muestra la vista exterior de la cuarta parte del dominio discretizada con una malla de tetraedros. Las condiciones de contorno se han prescrito en las bases superior e inferior de manera que los movimientos en el plano horizontal están completamente restringidos. Las condiciones en las caras interiores se han prescrito en función de las condiciones de simetría. Se emplea el modelo constitutivo elástico en direcciones principales de (Simo, 1991), tanto en condición compresible como incompresible.

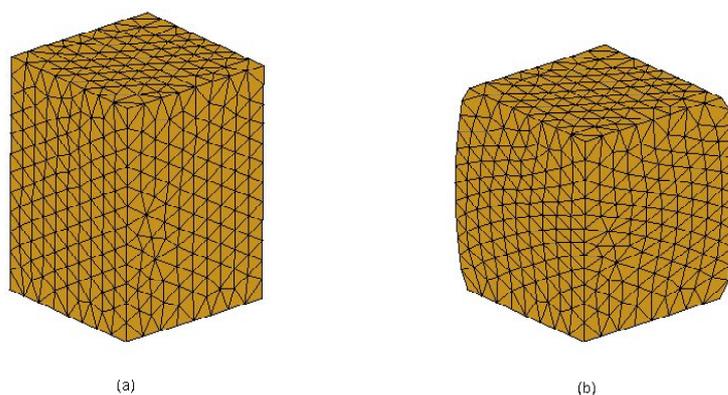


Figura 6.28: Ensayo 3D de compresión. a) Malla sobre la configuración de referencia y b) malla deformada.

Material elástico compresible Se realiza un primer ensayo con un material elástico compresible, cuyo módulo de elasticidad es $E = 1,96 \times 10^5$ MPa y coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$. En la figura 6.29 se muestran las distribuciones de la presión, sobre la cuarta parte del dominio con las mallas de elementos triangulares estándar, cuadriláteros $Q1P0$ y de dos mallas de elementos $T1P1$ de la formulación propuesta con coeficientes $c = 1$ y $c = 10$, respectivamente. Para cada una de las mallas de elementos se presenta una vista de la zona interior y otra de la zona exterior del bloque en la configuración de referencia. Como se puede apreciar, existe similitud entre todos los resultados. En este caso, incluso el elemento estándar ofrece buen

resultado, pues el material es compresible y, por lo tanto, no hay efecto de bloqueo. En comparación con el elemento tridimensional de la formulación $Q1P0$, el elemento estándar es más sensible a la concentración de tensiones que se produce en los bordes superior e inferior de las bases horizontales. El elemento tetraédrico $T1P1$ con $c = 1$ presenta el efecto de los bordes de las bases de manera más localizada que con el valor de $c = 10$. Los resultados en este último caso son muy similares a los ofrecidos por el $Q1P0$.

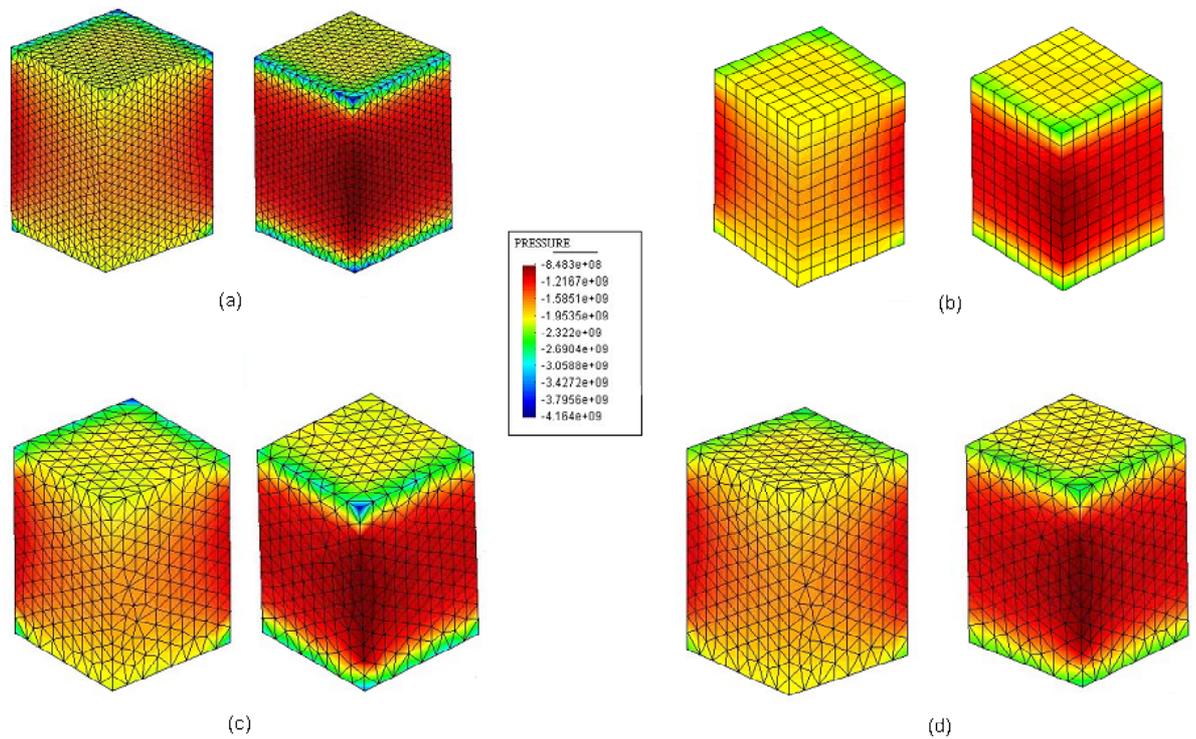


Figura 6.29: Test de compresión con modelo elástico compresible. Distribución de presión. Vistas de la zona interior e exterior respectivamente del cubo con mallas de a) elemento triangular estándar b) elemento $Q1P0$ c) elemento $T1P1$ con constante $c = 1$ d) elemento $T1P1$ $c = 10$

Material elástico incompresible Se realiza el mismo ensayo anterior con un material elástico incompresible, cuyo módulo de elasticidad es $E = 1,96 \times 10^5 \text{ MPa}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,4999$. En la figura 6.30 se muestran las distribuciones de la presión para las mallas de referencia de elementos triangulares estándar, cuadriláteros $Q1P0$ y de dos mallas de elementos $T1P1$ de la formulación propuesta con coeficientes $c = 1$ y $c = 10$, respectivamente. Como se puede apreciar, en este caso el elemento estándar no ofrece buen resultado, pues el material es incompresible y presenta el efecto de bloqueo. El elemento tridimensional de la formulación $Q1P0$ y el elemento tetraédrico $T1P1$ no presentan este efecto y ofrecen resultados similares, aunque nuevamente se observa que el elemento $T1P1$ con $c = 1$ presenta el efecto de los bordes de las bases de manera más localizada que con el valor de $c = 10$; los resultados en este último caso son más similares a los ofrecidos por el elemento $Q1P0$.

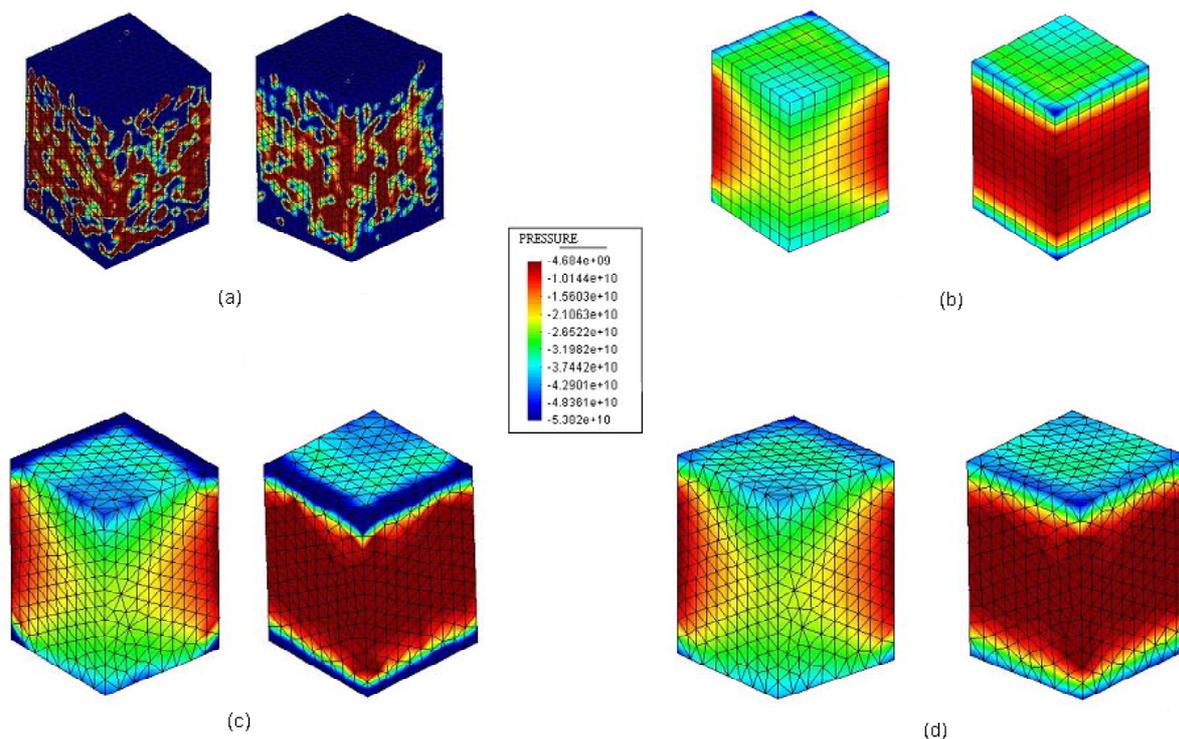


Figura 6.30: Test de compresión con modelo elastico incompresible . Distribución de presión. Vistas de la zona interior e exterior respectivamente del cubo con mallas de a) elemento triangular estándar b) elemento $Q1P0$ c) elemento $T1P1$ con constante $c = 1$ d) elemento $T1P1$ $c = 10$

6.2.2 Modelo de elasto-plasticidad J2

Compresión en deformación plana

Se realiza un ensayo de compresión con carga de presión aplicada sobre un espécimen. Las características geométricas son las mostradas en la figura 6.31. La presión sobre la zona central de 10 mm de su parte superior es de 200 N/mm^2 (se considera aplicada sobre un espesor de 1 mm). Las condiciones de contorno se prescriben de manera que en la base los desplazamientos verticales son nulos y los horizontales son libres, mientras que en la zona central superior de aplicación de la carga los desplazamientos horizontales son nulos. La carga prescrita total se aplica en 40 pasos. Se presentan a continuación dos ensayos empleando el modelo elasto-plástico en direcciones principales de (Simo, 1992), uno con comportamiento en régimen elástico incompresible y el otro con régimen elástico compresible, con la finalidad de mostrar el buen comportamiento del elemento en ambas situaciones.

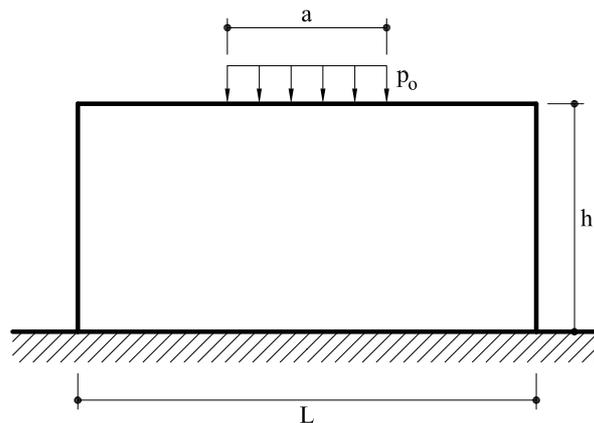


Figura 6.31: Ensayo de compresión profunda no-homogénea 2D. Datos geométricos $L = 20\text{ mm}$, $a = h = 10\text{ mm}$.

Elasto-plasticidad con régimen elástico incompresible Se realiza un ensayo empleando el modelo elasto-plástico J2 en direcciones principales, presentado en (Simo, 1992). Los parámetros del modelo en este caso son: el módulo de elasticidad $E = 2,65 \times 10^5\text{ Pa}$, el coeficiente de Poisson $0,4999$, el límite de fluencia $\sigma_Y = 1,45 \times 10^5\text{ Pa}$ y el coeficiente de endurecimiento lineal $H = 2,55 \times 10^5\text{ Pa}$.

El resultado del ensayo sobre el material elasto-plástico incompresible utilizando una malla estructurada de elementos triangulares estándar *P1* se muestra en la figura 6.32. La deformación poco realista de la malla es debida al efecto de bloqueo de estos

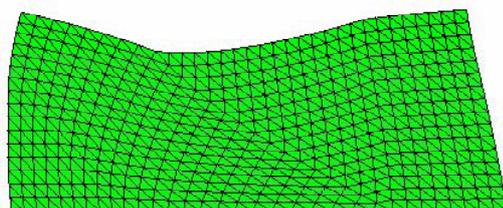


Figura 6.32: Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico $J2$ con régimen elástico incompresible. Malla estructurada de elementos $P1$ estándar.

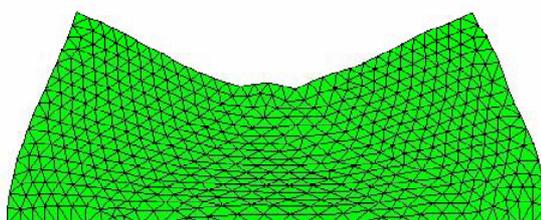


Figura 6.33: Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico $J2$ con régimen elástico incompresible. Malla no-estructurada de elementos $P1$ estándar.

elementos en situación incompresible. También se puede observar en la geometría deformada la influencia de la orientación de los elementos en la malla. Efectivamente, el problema planteado tiene un eje de simetría vertical, tanto geométrico como de cargas; sin embargo, la malla estructurada empleada para discretizar todo el dominio es asimétrica con respecto a este eje. La deformación obtenida está claramente influenciada por este factor. En la figura 6.33 se muestra la geometría deformada que se obtiene empleando los mismos elementos $P1$ con una malla no estructurada. En este caso se puede apreciar gráficamente que el efecto de bloqueo se alivia en cierta medida al utilizar mallas no estructuradas, pero no se elimina. En comparación con el resultado obtenido con la malla estructurada, es claro que no existe en la deformación una orientación preferente debida a la orientación de los elementos.

La figura 6.34 muestra la distribución de presión obtenida con la malla no-estructurada de elementos estándar $P1$. El patrón de distribución de presiones muestra también el efecto de bloqueo de la formulación.

La formulación mixta con interpolación independiente del campo de presión ado-

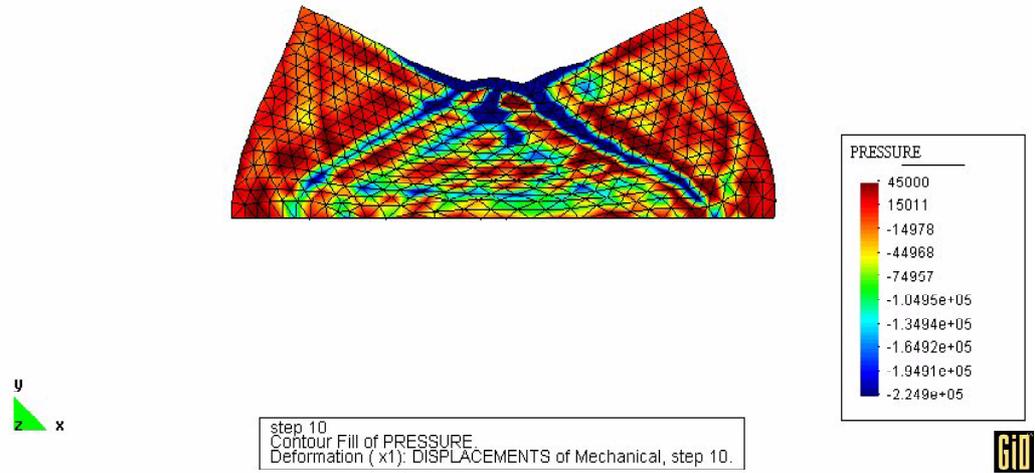


Figura 6.34: Test de compresión profunda no-homogénea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Distribución de la presión. Resultado obtenido empleando malla no-estructurada de elementos $P1$ estándar.

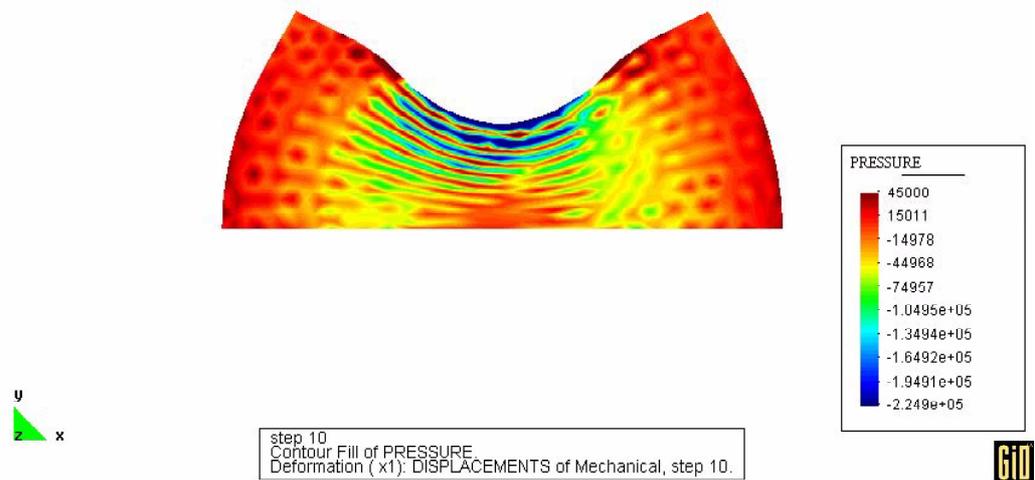


Figura 6.35: Test de compresión profunda no-homogénea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Distribución de la presión. Resultado obtenido con malla no-estructurada de elementos mixtos u/p no estabilizados.

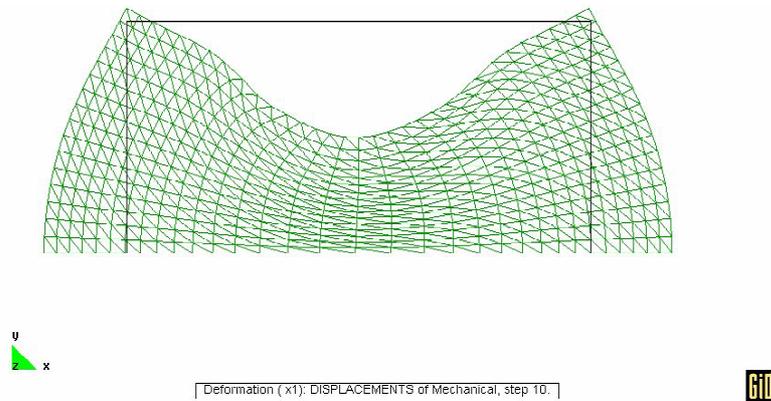


Figura 6.36: Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Malla estructurada de elementos triangulares $T1P1$ deformada.

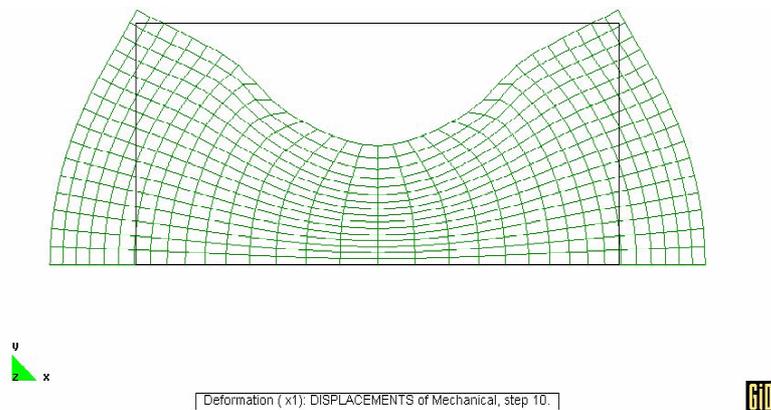


Figura 6.37: Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico incompresible. Malla estructurada de elementos cuadriláteros $Q1P0$ deformada.

lece del efecto de inestabilidad de la presión al utilizar interpolaciones de igual orden de desplazamiento y presión, por ejemplo lineales y continuas. Se muestra en la figura 6.35 la distribución de la presión obtenida por un elemento triangular \mathbf{u}/p de este tipo con estas interpolaciones y sin estabilizar. Como se puede apreciar, la distribución tiene un patrón no-realista; por ejemplo, a lo largo del eje vertical se alternan valores extremos máximos y mínimos, que pueden interpretarse como picos de presión positivos y negativos en zonas muy próximas. Este efecto se asocia a la presencia en esa zona de gradientes de presión sumamente altos. Este fenómeno pone de manifiesto la necesidad de un método de estabilización para obtener una respuesta estable de presión a partir de un elemento mixto \mathbf{u}/p con interpolaciones lineales.

La figura 6.36 muestra la malla estructurada deformada de elementos propuestos $T1P1$ estabilizados. La estructura de esta malla tiene 16 elementos sobre la altura del bloque y el doble sobre la base. Éste y los resultados que se muestran a continuación corresponden al parámetro de estabilización $\tau = ch^2/2\mu'$, calculado con $c = 0,5$. Se puede apreciar un patrón de deformación natural, que prácticamente no está influenciado por el efecto de orientación de la malla respecto al eje de simetría, a diferencia de lo que ocurriría al utilizar elementos estándar. Más adelante se mostrará la sensibilidad de los resultados respecto al coeficiente c y la influencia de la estructuración de la malla. La malla estructurada de cuadriláteros $Q1P0$ deformada se muestra en la figura 6.37. Esta malla tiene 16 elementos sobre la altura del bloque y la misma estructura de nodos que la anterior.

Las figuras 6.38, 6.39 y 6.40 muestran distribuciones de presión, tensión de Von Mises e índice de plasticidad (relación entre la tensión de Von Mises y la tensión de fluencia), respectivamente. En cada una de ellas se muestran los resultados obtenidos con elementos $T1P1$ y con elementos $Q1P0$, empleando mallas de 16 y 32 elementos sobre la altura del bloque en cada caso. Como se puede observar, los resultados obtenidos con estos elementos son similares; incluso, se puede apreciar en la respuesta en presión obtenida con la malla basta con el elemento $T1P1$ superioridad con respecto al $Q1P0$. Las distribuciones obtenidas mediante la malla basta de triángulos permiten advertir una leve influencia del efecto de la estructura asimétrica de la malla.

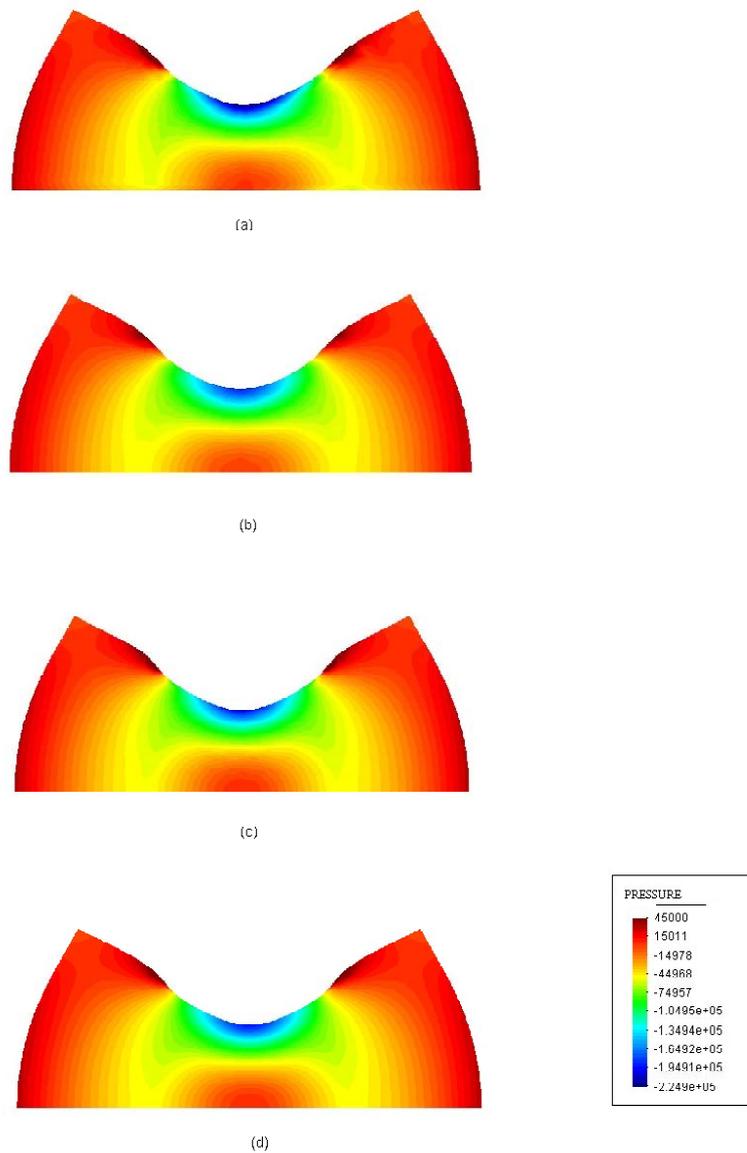


Figura 6.38: Test de compresión profunda no-homogénea con material elasto-plástico J_2 con régimen elástico incompresible. Distribución de la presión. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por el número de elementos sobre la altura: a) 16 elementos $T1P1$. b) 16 elementos $Q1P0$. c) 32 elementos $T1P1$. d) 32 elementos $Q1P0$

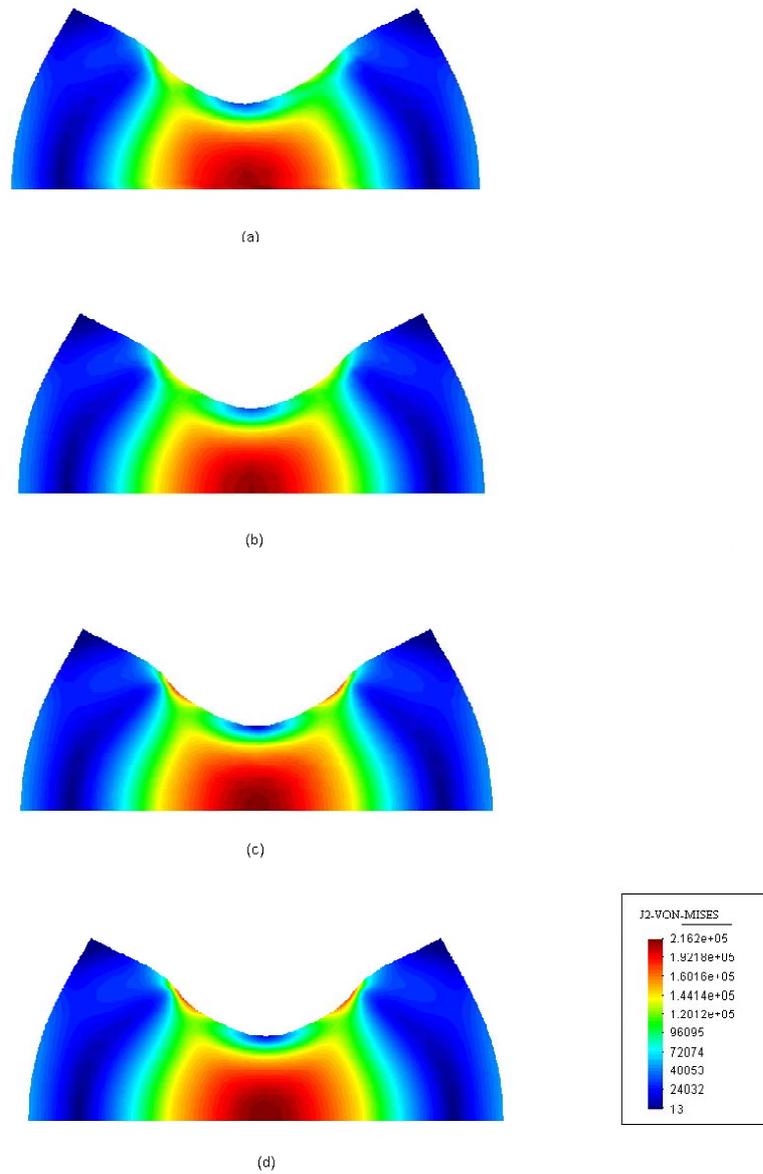


Figura 6.39: Test de compresión profunda no-homogénea con material elasto-plástico J_2 con régimen elástico incompresible. Distribución de la tensión de Von Mises. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por el número de elementos sobre la altura: a) 16 elementos $T1P1$. b) 16 elementos $Q1P0$. c) 32 elementos $T1P1$. d) 32 elementos $Q1P0$.

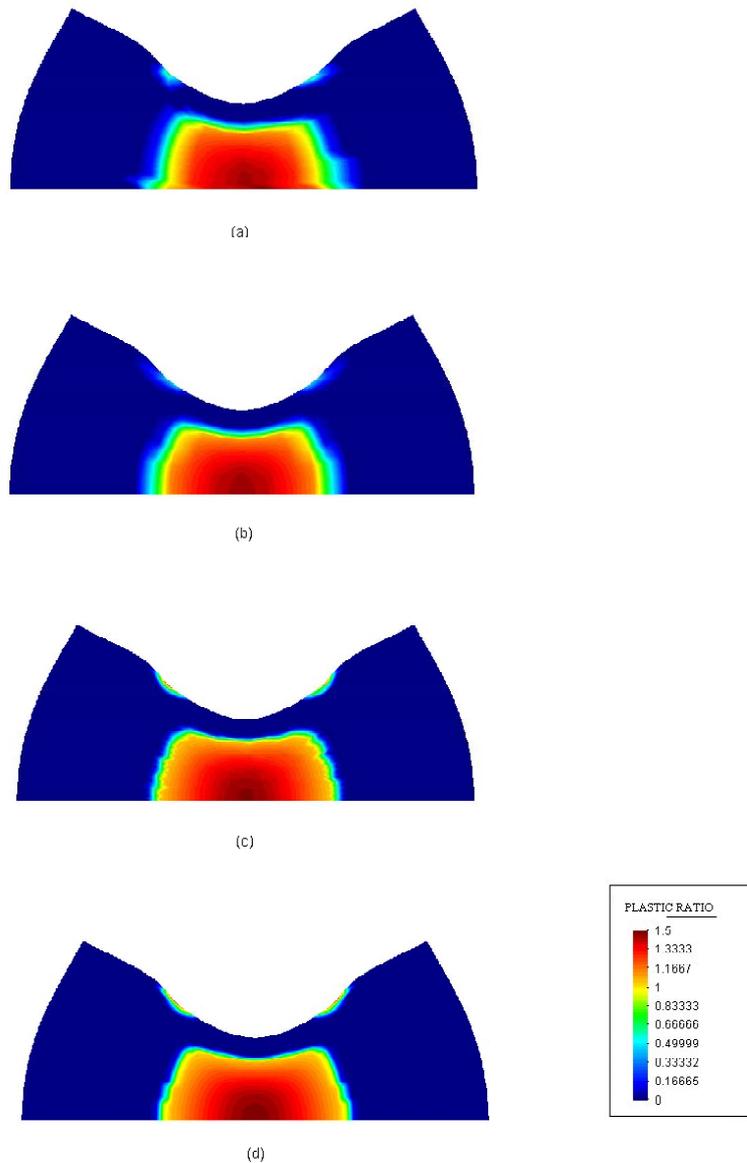


Figura 6.40: Test de compresión profunda no-homogénea con material elasto-plástico J_2 con régimen elástico incompresible. Distribución del índice de plasticidad (relación entre la tensión de Von Mises y la tensión de fluencia). Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por el número de elementos sobre la altura: a) 16 elementos $T1P1$. b) 16 elementos $Q1P0$. c) 32 elementos $T1P1$. d) 32 elementos $Q1P0$.

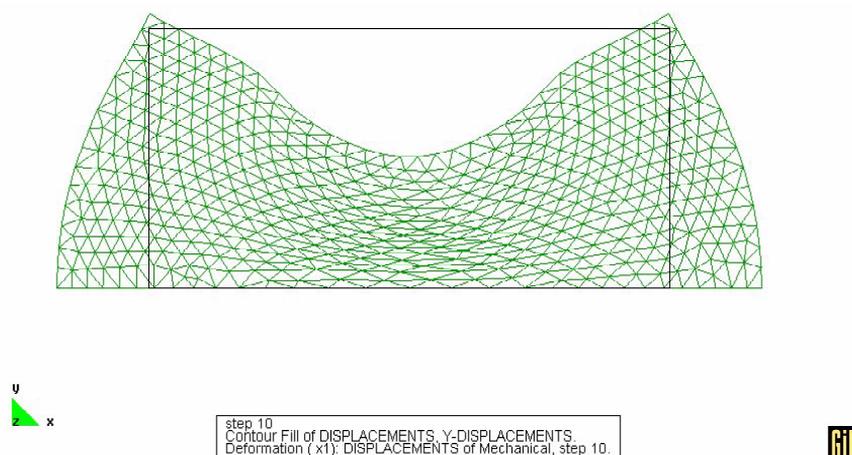


Figura 6.41: Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico $J2$ con régimen elástico incompresible. Malla no-estructurada de elementos triangulares $T1P1$ deformada.

En la formulación del elemento $T1P1$ la condición de incompresibilidad se satisface en forma débil. En este ensayo en grandes deformaciones se realizó al respecto una verificación de la conservación del volumen. Ésta se puede llevar a cabo observando los valores de deformación volumétrica y verificando el área de una parcela de elementos deformados y comparándola con el área original. Los errores que se verificaron sobre un patch de 4 elementos no superaron el 1%.

Una malla no estructurada de triángulos comparable, en número de nodos y elementos a la malla estructurada de 16 elementos sobre la altura del bloque se muestra en la figura 6.41. El mismo ensayo empleando esta malla no-estructurada. Las distribuciones obtenidas con esta malla resultan similares a las correspondientes a la malla estructurada.

Se realizó una comparación de la sensibilidad del elemento a la variación de la constante c del parámetro de estabilización empleando mallas estructuradas y no-estructuradas. En las figuras 6.42 y 6.43, correspondientes respectivamente a la malla estructurada y a la no-estructurada, se muestran las distribuciones de presión para diferentes valores de la constante c del parámetro de estabilización de 0, 1, 0, 25, 0, 5, 1. Aunque en principio se observa similitud entre las respuestas, se aprecia sin embargo un leve deterioro de la solución en el caso de la malla estructurada para el valor de 0, 1. El efecto de este deterioro en la malla estructurada va asociado a la pérdida de la simetría del patrón de las deformaciones de los elementos en la malla estructurada. En el caso de la malla no-estructurada la respuesta prácticamente no se deteriora en ninguno de los casos mostrados.

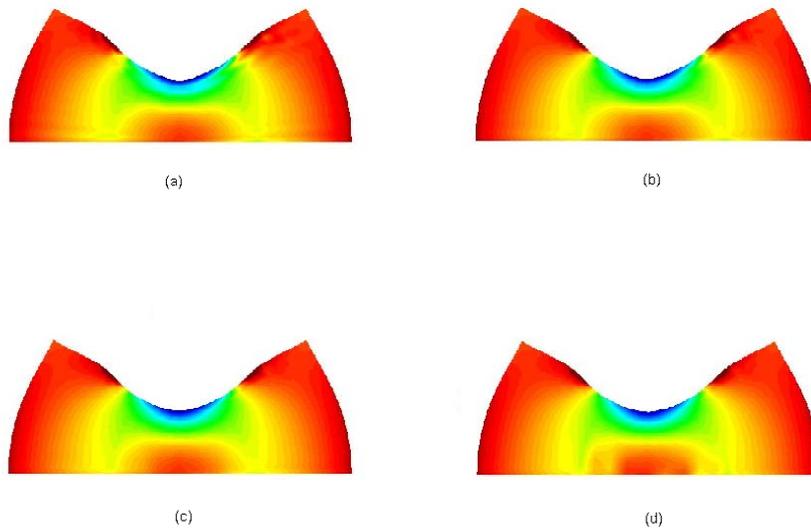


Figura 6.42: Sensibilidad de la presión con respecto a la variación de la constante c del parámetro de estabilización. Resultados obtenidos con mallas estructuradas de 16 elementos $T1P1$ sobre la altura, para valores c de a) 0,1 b) 0,25 c) 0,5 d) 1.

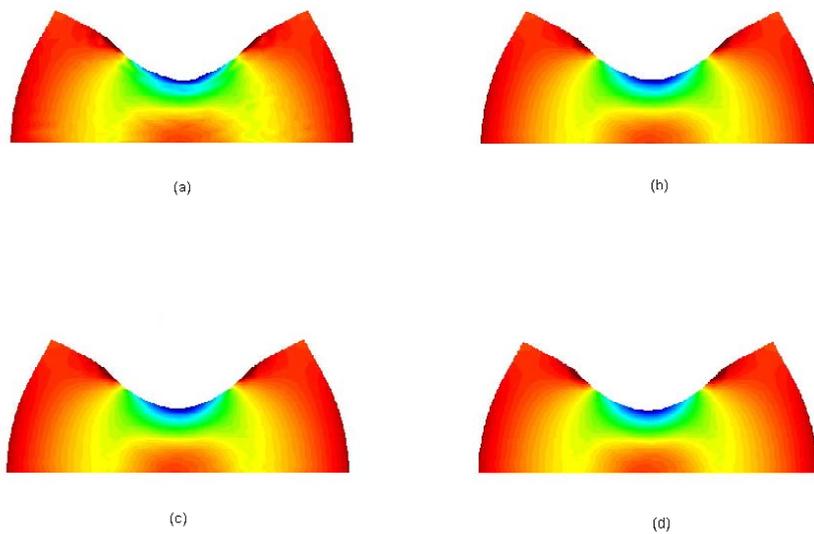


Figura 6.43: Sensibilidad de la presión con respecto a la variación de la constante c del parámetro de estabilización. Resultados obtenidos con mallas no-estructuradas de 16 elementos $T1P1$ sobre la altura, para valores c de a) 0,1 b) 0,25 c) 0,5 d) 1.

	<i>T1P1</i>	<i>Q1P0</i>
Resolución de ecuaciones	19,06	7,58
Matriz tangente	43,79	43,47
Fuerzas residuales	21,27	32,67
Otras operaciones	15,88	16,28

Tabla 6.2: Porcentajes de tiempo por operación de los elementos *T1P1* y *Q1P0* (para el problema 2D presentado los tiempos totales son similares)

Elasto-plasticidad con régimen elástico compresible Los parámetros del modelo en este caso son los mismos que en el caso anterior, salvo el coeficiente de Poisson, $\nu = 0,35$. En las figuras 6.44, 6.45, 6.46 y 6.47 se muestran las distribuciones de desplazamientos, presión, tensión de Von Mises e índice de plasticidad (la relación entre la tensión de Von Mises y la tensión de fluencia), respectivamente, obtenidas con elementos *T1P1* y *Q1P0*. Se aprecia, también en este caso, la similitud de las distribuciones obtenidas por ambos elementos.

Finalmente, en la serie de ensayos 2D se compararon los tiempos totales de CPU, empleados por cada elemento en las operaciones de ensamblaje de matriz tangente, resolución de ecuaciones, cálculo de fuerzas residuales, y demás operaciones. Dada la similitud de resultados la comparación de costo computacional entre estos dos elementos será indicio de cuál es más eficaz en este caso. Por ejemplo, en el caso del problema elasto-plástico incompresible con la carga aplicada en 40 pasos los tiempos de CPU fueron similares, con la malla de 16 elementos sobre la altura: 10 segundos y 11 segundos para el *T1P1* y el *Q1P0*, respectivamente. Se observó también similitud en los tiempos cuando se modificó el número de pasos de carga; por ejemplo, al realizar el ensayo con material elasto-plástico o al realizar el ensayo con el modelo hiperelástico Neo-Hooke con 20 pasos de carga. Se debe indicar que se empleó un algoritmo de solución de sistemas de ecuaciones directo y que el código computacional del elemento implementado tiene algunas operaciones optimizadas específicamente para elementos triangulares y tetraédricos, basándose, por ejemplo, en el hecho de que las derivadas de las funciones de forma de este elemento son constantes. En la tabla 6.2 se muestra la comparación de porcentajes de tiempo por operación entre los elementos *T1P1* y *Q1P0*. El mayor número de variables que involucra el elemento *T1P1* se ve reflejado en el mayor tiempo requerido para la resolución de ecuaciones. Por el contrario, el tiempo de cálculo de las fuerzas residuales resulta menor para el *T1P1*, mientras que el tiempo de cálculo y ensamblaje de la matriz tangente es similar en ambos casos.

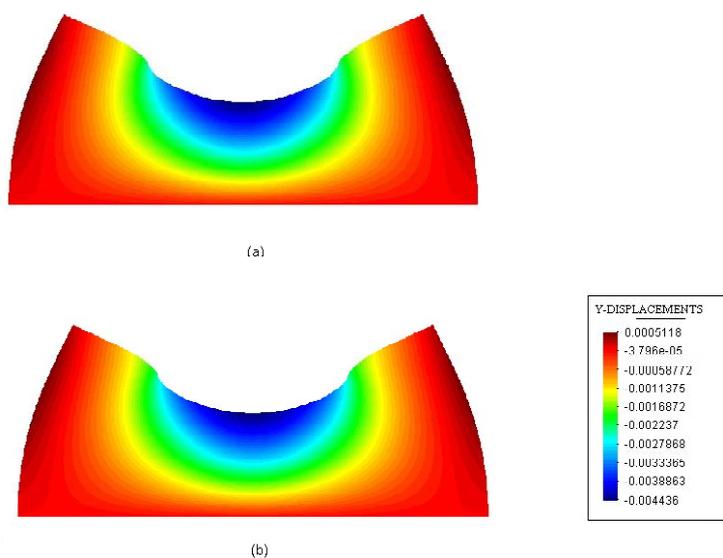


Figura 6.44: Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico compresible. Distribución de los desplazamientos verticales. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por 16 elementos sobre la altura: a) elementos *T1P1*. b) elementos *Q1P0*.

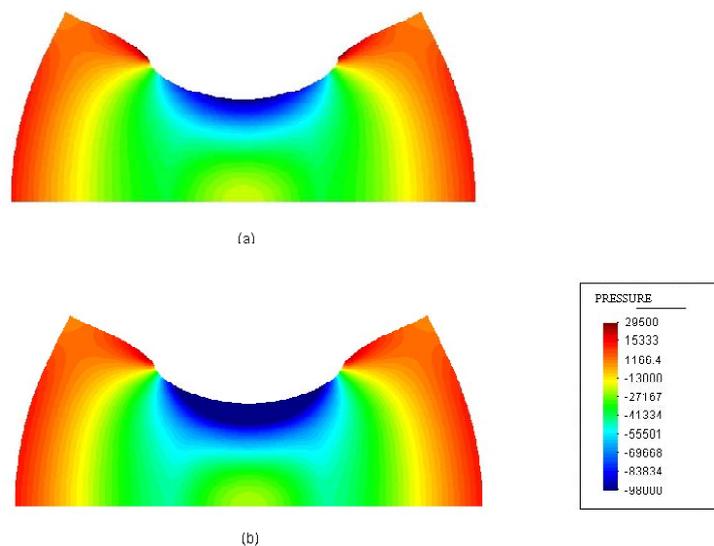


Figura 6.45: Test de compresión profunda no-homogenea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico compresible. Distribución de la presión. Resultados con mallas estructuradas de 16 elementos sobre la altura: a) *T1P1*. b) *Q1P0*.

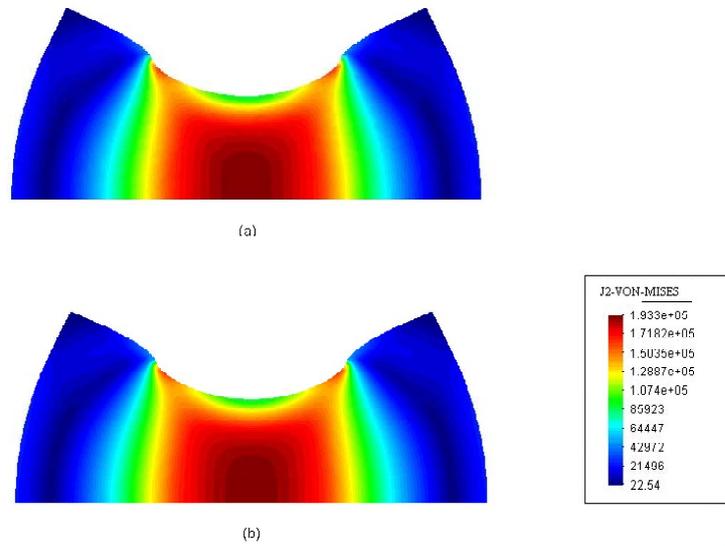


Figura 6.46: Test de compresión profunda no-homogénea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico compresible. Distribución de la tensión de Von Mises. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por 16 elementos sobre la altura: a) elementos $T1P1$. b) elementos $Q1P0$.

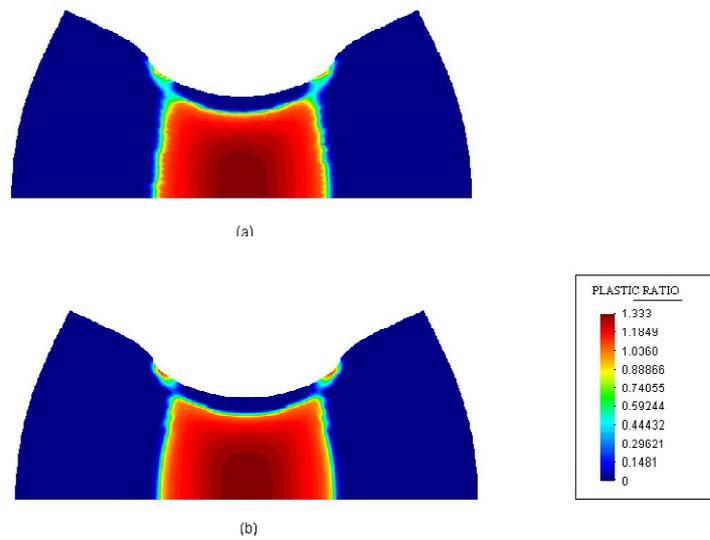


Figura 6.47: Test de compresión profunda no-homogénea con material elasto-plástico J2 con régimen elástico compresible. Distribución del índice de plasticidad. Resultados obtenidos empleando mallas estructuradas caracterizadas por 16 elementos sobre la altura: a) elementos $T1P1$. b) elementos $Q1P0$.

Bloque 3D sometido a compresión

Se realiza el mismo ensayo sobre un bloque 3D sometido a compresión presentado antes con material elástico. Se considera un material elasto-plástico con régimen de elasticidad compresible, cuyo módulo de elasticidad es $E = 1,96 \times 10^5 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$, límite elástico $\sigma_y = 150 \text{ MPa}$ y endurecimiento con saturación exponencial cuyos parámetros son: tensión límite de saturación $\sigma_\infty = 180 \text{ MPa}$ y exponente 0,7. Se debe observar que la condición prescrita en las bases, movimientos horizontales nulos en ambas, es sumamente restrictiva, particularmente en situación cuasi-incompresible para elementos tetraédricos, pues en ese caso cada elemento que tiene una cara en las bases tiene un sólo nodo con posibilidad de movimiento que está restringido a tomar posiciones que preserven el volumen.

En la figura 6.48 se muestran, sobre la cuarta parte del dominio, las distribuciones de la presión para las mallas de elementos triangulares estándar, cuadriláteros $Q1P0$ y de cuatro mallas de elementos $T1P1$ de la formulación propuesta con coeficientes $c = 1$ y $c = 10$, respectivamente y, en cada uno de estos casos, dos resultados que permitan observar el efecto de la variación del módulo de cizallamiento en grandes deformaciones plásticas en el cálculo del parámetro de estabilización. Las figuras (c) y (d) presentan los resultados obtenidos sin tener en cuenta este efecto, mientras que las figuras (e) y (f) muestran los resultados considerándolo de acuerdo con la aproximación del módulo secante propuesta en este trabajo. Se puede apreciar en la figura (a) que el elemento estándar no ofrece un buen resultado en este caso, pues si bien el material es compresible en rango elástico el desarrollo de grandes deformaciones plásticas origina el bloqueo de este elemento. El elemento tridimensional de la formulación $Q1P0$ ofrece un resultado libre de bloqueo también en esta situación. El elemento tetraédrico $T1P1$, en la figura (c), con $c = 1$ sin considerar el efecto del módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización presenta un comportamiento muy pobre; el efecto de inestabilidad de la presión se aprecia en el patrón de distribución, con presencia de altas y bajas presiones en zonas muy próximas, asociadas a grandes gradientes de deformación. Esto ocurre de manera similar, aunque menos severa, con el valor de $c = 10$, como se aprecia en la figura (d). Si se acepta como razonable una incertidumbre respecto al valor de la constante c de un orden de magnitud, en función a factores como el tipo de problema, la dimensión del problema, etc., claramente, el empobrecimiento del efecto estabilizador no es atribuible a una elección incorrecta del valor de la constante c del parámetro de estabilización. El efecto estabilizador mostrado en estos casos no es el correcto debido a que no se ha considerado el efecto de disminución del módulo de cizallamiento en régimen plástico. Esta reducción puede alcanzar varios órdenes de magnitud, por lo que es necesario establecer el parámetro de estabilización en función del desarrollo del flujo plástico. En las figuras (e) y (f) se muestran las distribuciones obtenidas

	<i>T1P1</i>	<i>Q1P0</i>
Resolución de ecuaciones	83,86	86,45
Matriz tangente	11,39	9,41
Fuerzas residuales	3,40	2,93
Otras operaciones	1,35	1,26

Tabla 6.3: Porcentajes de tiempo por operación de los elementos *T1P1* y *Q1P0* (para el problema 3D presentado el tiempo de CPU es 40 % mayor con elementos *T1P1* que con *Q1P0*)

utilizando la aproximación propuesta para estimar el efecto del desarrollo del flujo plástico en el módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización. Estas distribuciones presentan un comportamiento estabilizado de la presión, y son similares a la correspondiente al elemento *Q1P0*; en particular, la distribución obtenida para $c = 10$, aunque el resultado que ofrece el elemento *T1P1* con $c = 1$ capta mejor las zonas de concentración de tensiones. La comparación con las figuras (e) y (f) revela la importancia de considerar el efecto del módulo de cizallamiento en el régimen plástico al estimar el parámetro de estabilización.

Para la solución del sistema de ecuaciones de los problemas se utilizó un algoritmo directo. En los problemas en 3D presentados, en los que se ha empleado mallas de 1050 nodos, el tiempo total de CPU es del orden de 40% mayor para el elemento *T1P1* que para el elemento *Q1P0*. La distribución de tiempos entre las operaciones se muestra en la tabla 6.3. El tiempo invertido en la resolución de ecuaciones es cercano al 85% en ambos casos. El mayor tiempo de CPU empleado por el elemento *T1P1* corresponde al mayor número de grados de libertad por nodo que tiene en comparación con el elemento *Q1P0*.

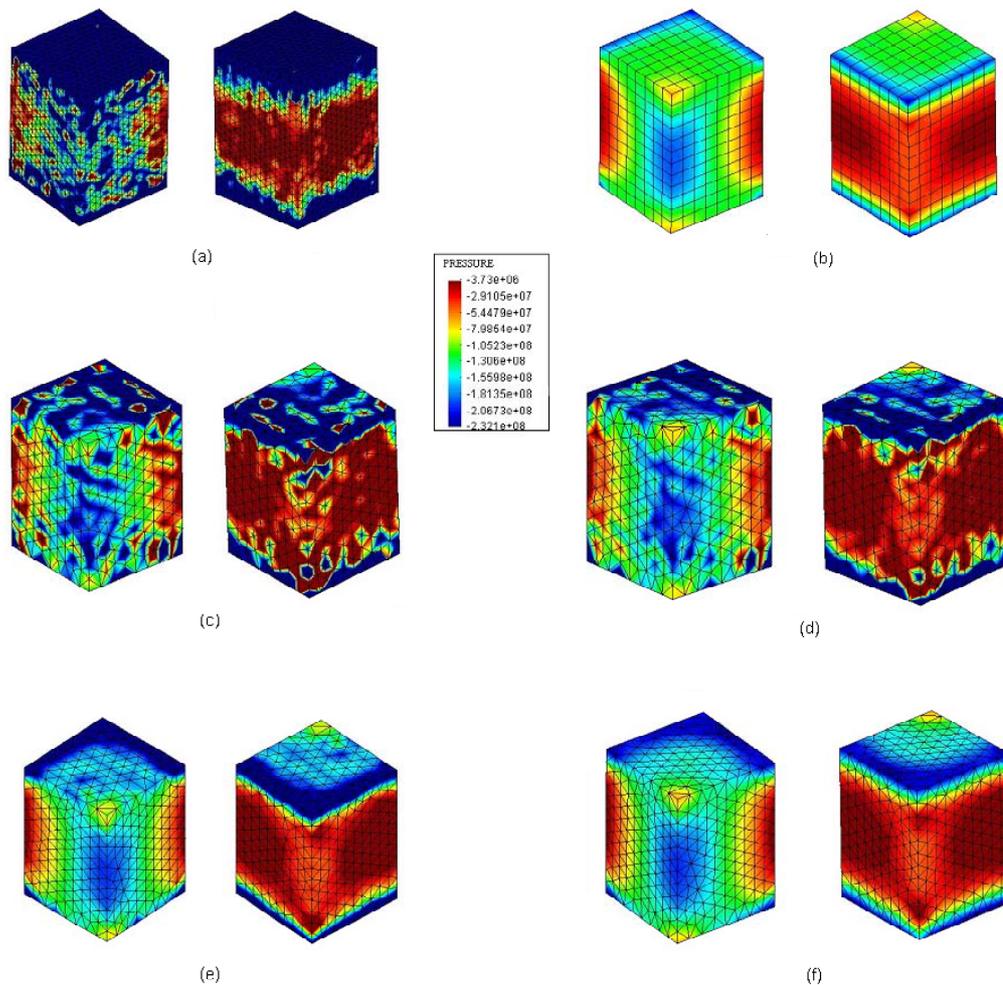


Figura 6.48: Test de compresión con modelo elasto-plástico compresible. Distribución de presión. Vistas de la zona interior e exterior respectivamente del cubo con mallas de a) elemento triangular estándar b) elemento $Q1P0$ c) elemento $T1P1$ con constante $c = 1$ d) elemento $T1P1$ $c = 10$ e) elemento $T1P1$ con constante $c = 1$ con aproximación al módulo de cizallamiento f) elemento $T1P1$ con $c = 10$ con aproximación al módulo de cizallamiento.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1 Síntesis

El objetivo planteado en este trabajo es el desarrollo de una formulación eficiente de elementos de bajo orden, capaz de abordar el problema de incompresibilidad en mecánica sólidos. Los elementos estándar de bajo orden reúnen varios de los requisitos para la utilización en aplicaciones prácticas, pero presentan bloqueo en situaciones incompresibles; la alternativa ante esta dificultad es la formulación mixta del problema. La estabilidad de los elementos mixtos depende de la compatibilidad entre los campos de interpolación involucrados. La condición matemática que expresa esta restricción es conocida como la condición de estabilidad de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* o *LBB*. Los elementos mixtos de desplazamientos y presión, \mathbf{u}/p , de igual orden de interpolación no satisfacen esta condición y, por lo tanto, presentan problemas de estabilidad, que se manifiestan en la falta de control sobre la presión. La viabilidad de estos elementos mixtos requiere la aplicación de un método de estabilización. El método de estabilización que sirve de marco para el diseño de los elementos propuestos en este trabajo se basa en el concepto de las sub-escalas, particularmente en las sub-escalas ortogonales (*OSGS*). Desde el punto de vista del método, las inestabilidades numéricas de ciertas formulaciones tienen origen en el hecho de no tener en cuenta en las ecuaciones de balance los efectos de las componentes de la solución no resueltas, denominadas sub-escalas. El concepto de las sub-escalas ortogonales propone que el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos es el espacio natural para la búsqueda de las sub-escalas de la solución. El método de estabilización elude la condición *LBB* y permite obtener elementos con interpolaciones de igual orden en los campos de desplazamientos y presión (o componente media de las tensiones).

7.2 Conclusiones

Las principales conclusiones del trabajo se pueden resumir brevemente en los siguientes puntos:

- Se ha desarrollado, implementado y validado una formulación de elementos finitos adecuada para abordar el problema de incompresibilidad tanto en el rango de pequeñas deformaciones como en el rango de grandes deformaciones en mecánica de sólidos, apta para aplicaciones con modelos constitutivos de elasticidad y plasticidad J2.
- Los elementos desarrollados son elementos mixtos estabilizados, mediante el método de las sub-escalas ortogonales *OSGS*, tienen interpolaciones de los campos de desplazamientos y presión \mathbf{u}/p lineales y continuas entre elementos. Estos elementos tienen bajo costo computacional, presentan muy buen comportamiento en situaciones generales y son robustos; por lo tanto, resultan competitivos con otras formulaciones conocidas, tales como la del elemento *Q1P0* y la de deformaciones mejoradas, *EAS*.
- La formulación desarrollada se puede aplicar tanto a elementos hexaédricos como a elementos tetraédricos (cuadriláteros y triángulos en problemas en 2 dimensiones). Los elementos tetraédricos lineales desarrollados son de interés práctico para su utilización en aplicaciones industriales, debido a que la forma geométrica tetraédrica posibilita la generación de mallas sobre configuraciones geométricas complejas, como las que se encuentran frecuentemente en estas aplicaciones. Esta es una ventaja de los elementos propuestos con respecto a otras formulaciones aplicables específicamente a formas hexaédricas (o cuadriláteras), tales como la formulación de deformaciones de mejora (*EAS*), y al elemento *Q1P0*.
- Los elementos desarrollados presentan ventajas en comparación con otras formulaciones estabilizadas desarrolladas en mecánica de sólidos basadas en el método *GLS*. Efectivamente, los elementos propuestos se desarrollan en el marco del método de las sub-escalas ortogonales; como resultado de ello son más precisos, robustos y exhiben menor sensibilidad al parámetro de estabilización.
- Desde un punto de vista conceptual, los elementos propuestos presentan una ventaja sobre los elementos basados en el método *GLS*. Efectivamente, en virtud de la presencia del término de proyección del gradiente de presión, la solución exacta de la ecuación diferencial del problema es solución de las ecuaciones que resuelven los elementos lineales estabilizados por el método de

las sub-escalas ortogonales. Los elementos lineales de la formulación *GLS* no cumplen esta condición, que es más estricta que la definición de consistencia.

- Se ha verificado que los elementos propuestos cumplen satisfactoriamente la condición de conservación del volumen en situación incompresible. En esta formulación la condición de incompresibilidad se impone en forma global (débil). Por contra, en el elemento *Q1P0* esta condición se impone en cada elemento, lo que en situaciones extremas puede originar en este elemento patrones de deformación conocidos como *hourglassing*.
- La matriz asociada a este sistema es simétrica, pero no es definida positiva. Por esta razón, al abordar la solución por métodos de solución iterativos no es aplicable el método de los gradientes conjugados, por ejemplo, y debe considerarse el uso de un método más general, tal como el *GMRES* o una versión específica para matrices simétricas, como el *MINRES* (*minimal residual method*).
- El parámetro de estabilización calculado con el módulo de cizallamiento correspondiente al régimen elástico no es aplicable en régimen plástico.
- La aproximación propuesta para estimar la influencia del flujo plástico en el parámetro de estabilización, en función del módulo de cizallamiento efectivo ha mostrado ser eficaz, tanto en el rango de deformaciones infinitesimales como en el rango de grandes deformaciones.

7.3 Aportaciones

Las principales aportaciones realizadas en esta tesis se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Se desarrollan las primeras aplicaciones del método de las *sub-escalas ortogonales* a problemas de mecánica de sólidos. Efectivamente, este método es novedoso incluso en su ámbito de origen, la mecánica de fluidos; de manera general, la primera contribución de este trabajo es incorporar una formulación con una base conceptual sólida al ámbito de la mecánica de sólidos y demostrar la eficacia de los elementos diseñados en este marco.
- Se han propuesto nuevos elementos finitos para la solución del problema de la no-linealidad material en mecánica de sólidos. Efectivamente, a partir de la motivación dada por la similitud de las ecuaciones entre el problema de Stokes y el problema elástico incompresible en mecánica de sólidos se ha extendido la

aplicación del método de las *sub-escalas ortogonales* a la solución de problemas con modelos constitutivos de elasto-plasticidad J2.

- Se han propuesto nuevos elementos finitos para la solución del problema de la no-linealidad geométrica en mecánica de sólidos. Efectivamente, se ha extendido la aplicación del método de las *sub-escalas ortogonales* al rango de grandes deformaciones en mecánica de sólidos, tanto con modelos constitutivos elásticos como con modelos elasto-plásticos J2.
- Se ha propuesto una aproximación para estimar el valor del parámetro de estabilización en función del desarrollo de flujo plástico. Efectivamente, cuando se desarrolla el flujo plástico el módulo de cizallamiento efectivo del material decrece, incluso en órdenes de magnitud. La aproximación secante al módulo de cizallamiento, propuesta originalmente en este trabajo, considera este efecto en el cálculo del parámetro de estabilización y ha mostrado su eficacia.
- Se han introducido una serie de hipótesis y simplificaciones originales con la finalidad de obtener una formulación estabilizada y de bajo costo computacional. Por ejemplo, para realizar la descomposición de las tensiones directamente en componentes asociadas respectivamente a la escala de elementos finitos y a las sub-escalas; esto permite obtener una formulación en función de los valores totales de las sub-escalas directamente, sin involucrar los valores incrementales. Por otro lado, en virtud de una simplificación en los gradientes espaciales de las funciones de forma en el término de estabilización, la matriz tangente del sistema correspondiente a la formulación propuesta resulta simétrica.

7.4 Líneas futuras de investigación

Las siguientes líneas futuras de investigación pueden tener como punto de partida el presente trabajo:

- Introducir la sub-escala de presión en la formulación. La potencialidad del método de las sub-escalas ortogonales ha sido aprovechada en principio en forma parcial, pues se han diseñado sólo sub-escalas de desplazamientos. Efectivamente, como se ha demostrado, esto ha sido suficiente para obtener elementos estables y con buen comportamiento. Sin embargo, con la incorporación de las sub-escalas de presión cabe esperar una mejora de la precisión de los elementos.
- Estudiar la influencia de la compresibilidad en el parámetro de estabilización.

- Profundizar las aplicaciones abordadas, particularmente en deformaciones finitas con modelos de elasticidad no-lineal y elasto-plasticidad.
- Estudio exhaustivo de alternativas para la aproximación al parámetro de estabilización para modelos constitutivos elasto-plásticos en pequeñas y grandes deformaciones. Por ejemplo, estudiar la posibilidad de realizar una aproximación tangente o incremental al valor del módulo de cizallamiento efectivo para el cálculo del parámetro de estabilización.
- Estudiar la formulación material del problema en grandes deformaciones, como alternativa a la formulación espacial propuesta aquí. Si bien estas formulaciones son equivalentes, es posible que desde el punto de vista numérico exista algún aspecto de interés en esta formulación. Por ejemplo, se puede evaluar en esta formulación otras alternativas para la aproximación a las sub-escalas.
- Estudiar el seguimiento explícito de las sub-escalas en el problema no-lineal; es decir, evaluar la posibilidad de actualizar su valor explícitamente y sumarlo al valor de la escala de elementos finitos para el cálculo de las variables.
- Estudio del problema dinámico y del efecto de las sub-escalas en dichos problemas.
- Desarrollar otras aplicaciones del método de estabilización en mecánica de sólidos, tales como problemas termo-mecánicos acoplados, problemas de contacto, problemas de placas, problemas con modelos de daño, problemas de localización y de discontinuidades fuertes.

()

Bibliografía

- Agelet de Saracibar, C., Aleman, F., Cervera, M., and Chiumenti, M. (1998). Comet (coupled mechanical and thermal analysis), flow chart. Technical Report IT-276, CIMNE.
- Argyris, J. (1965a). Matrix analysis of three-dimensional elastic media - small and large displacements. *Journal of AIAA*, 3:45–51.
- Argyris, J. (1965b). Three-dimensional anisotropic and inhomogeneous media-matrix analysis for small and large displacements. *Ingenieur Archiv.*, pages 34:33–35.
- Argyris, J., Dunne, P., Angelopoulos, T., and Bichat, B. (1974). Large natural strains and some special difficulties due to nonlinearity and incompressibility in finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4:219–278.
- Armero, F. (1999a). On the locking of standard finite elements. Barcelona, España. Universitat Politecnica de Catalunya. Seminario de Investigacion. Julio, 1999.
- Armero, F. (1999b). On the method of incompatible modes and the enhanced strain formulation. Barcelona, España. Universitat Politecnica de Catalunya. Seminario de Investigacion. Julio, 1999.
- Arnold, D., Brezzi, F., and Fortin, M. (1984). A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21:337–344.
- Arunakirinathar, K. and Reddy, B. (1995a). Further results for enhanced strain methods with isoparametric elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:127–143.
- Arunakirinathar, K. and Reddy, B. (1995b). Some geometrical results and estimates for quadrilateral finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122:307–314.

- Atluri, S. (1975). On hybrid finite element models in solid mechanics. *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, pages 346–356.
- Babuska, I. (1971). Error bounds for finite element methods. *Numerical Mathematics*, 16:322–333.
- Bai, W. (1997). The quadrilateral ‘Mini’ finite element for the Stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143:41–47.
- Baiocchi, C., Brezzi, F., and Franca, L. (1993). Virtual bubbles and Galerkin-least-squares type methods (Ga.L.S.). *Computer Methods in Applied Mechanics*, 105:125–141.
- Belytschko, T. and Bindeman, L. (1993). Assumed strain stabilization of the eight-node hexahedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 105:225–260.
- Belytschko, T., Ong, J., Liu, W., and Kennedy, J. (1984). Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 43:251–276.
- Bischoff, M., Ramm, E., and Braess, D. (1999a). A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite element method. *Computational Mechanics*, 22:443–449.
- Bischoff, M., Wall, W. A., and Ramm, E. (1999b). Stabilized enhanced assumed strain elements for large strain analysis without artificial kinematic modes. In *European Conference on Computational Mechanics. Munich, Germany*. European Council of Computational Mechanics.
- Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers. *RAIRO*, 8-R2:129–151.
- Brezzi, F. and Bathe, K. (1990). A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 82:27–57.
- Brezzi, F., M.Bristeau, Franca, Mallet, M., and Roge, G. (1992). A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 96:117–129.
- Brunig, M. (1999). Formulation and numerical treatment of incompressibility constraints in large strain elastic-plastic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:1047–1068.

- Cesar De Sa, J. and Natal Jorge, R. (1999). New enhanced strain elements for incompressible problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:229–248.
- Chiumenti, M., Valverde, Q., Agelet de Saracibar, C., and Cervera, M. (2002a). A stabilized formulation for incompressible elasticity using linear displacement and pressure interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:5263–5264.
- Chiumenti, M., Valverde, Q., Agelet de Saracibar, C., and Cervera, M. (2002b). A stabilized formulation for incompressible plasticity using linear triangles and tetrahedra. *International Journal of Plasticity*.
- Chorin, A. J. (1967). A numerical method for solving incompressible viscous problems. *Journal of Computational Physics*, 2:12–26.
- Codina, R. (1992). *A finite element model for incompressible flow problems*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Codina, R. (1997). Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 156:185–210.
- Codina, R. (2000a). Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 190:1579–1599.
- Codina, R. (2000b). Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal sub-scales. volume 191, pages 4295–4321.
- Codina, R. and Blasco, J. (2000). Stabilized finite element method for transient Navier-Stokes equations based on pressure gradient projection. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 182:287–300.
- Codina, R., Blasco, J., Buscaglia, G., and Huerta, A. (2001). Implementation of a stabilized finite element formulation for the incompressible Navier-Stokes equations based on pressure gradient projection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37:419–444.
- Codina, R., Vázquez, M., and Zienkiewicz, O. (1998). A general algorithm for compressible and incompressible flow- part iii. the semi-implicit form. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 27:13–32.

- Coleman, B. D. and Gurtin, M. (1967). Thermodynamics with internal variables. *Journal of Chemistry and Physics*, 47:597–613.
- Cook, R., Malkus, D., and Plesha, M. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & sons, London, 3th edition.
- Courant, R. (1943). Variational methods for solution of problems of equilibrium and vibration. *Bulletin of the American Math Society*, 49:1–61.
- Criesfield, M., Moita, G., Jelenic, G., and Lyons, L. (1995). Enhanced lower order element formulations for large strains. In Owen, D. J., Oñate, E., and Hinton, E., editors, *Computational Plasticity-Fundamentals and Applications, Part I*. Pineridge Press, Swansea.
- Crisfield, M. (1995). Incompatible modes, enhanced strain and substitute strains for continuum elements. *Advances in Finite Element Technology*, pages 47–61.
- Crisfield, M. A. (1997). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 2. Advanced topics. John Wiley & sons, London.
- De Souza, E., Peric, D., Huang, G., and Owen, D. (1995). Remarks on the stability of enhanced strain elements in finite elasticity and elastoplasticity. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11:951–961.
- Donea, J. (1999). Finite element method in fluid mechanics. an introduction. Technical report, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Felippa, C. (2000). Advanced finite element methods. University of Colorado at Boulder. Notes of the PhD course.
- Fraeijs de Veubeke, B. (1965). *Displacement and equilibrium models in the finite element method*. John Wiley, London.
- Freischlager, C. and Schwiezerhof, K. (1996). On a systematic development of tri-linear three-dimensional solid elements based on Simo's enhanced strain formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 33:2993–3017.
- Fried, I. (1974). Finite element analysis of incompressible material by residual energy balancing. *International Journal of Solids and Structures*, pages 993–1002.
- Gallagher, R. (1975). Finite element analysis: Fundamentals. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.*
- Gallagher, R., Padlog, J., and Bijlaard, P. (1962). Stress analysis of heated complex shapes. *ARS Journal*, 29:700–707.

- Garikipaty, K. and Hughes, T. (1998). A study of strain localization in a multiple scale framework - th one dimensional problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159:193–222.
- Garikipaty, K. and Hughes, T. (2000). A variational multiscale approach to strain localization formulation for multidimensional problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:39–60.
- Glaser, S. and Armero, F. (1995). Recent developments in the formulation of assumed enhanced strain finite elements for finite deformation problems. Technical report, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, California.
- Glaser, S. and Armero, F. (1997). On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformation. *Engineering Computations*, 14(7):759–791.
- Groen, A. and Borst, R. D. (1997). The necessity of mixed formulation for the eight-noded brick element in dilatant plastic flow. *Computational Plasticity*, pages 571–580.
- Gurtin, M. E. (1981). *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, Orlando, Florida.
- Hansbo, P. (1998). A new approach to quadrature for finite elements incorporating hourglass control as a special case. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 158:301–309.
- Heeres, O. and De Borst, R. (1999). Performance of low order triangular elements during plastic flow. *Engineering Computations*, 16(1):70–87.
- Hermann, L. (1965). Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. *AIAA*, 3:1896–1900.
- Huerta, A. and Fernandez-Mendez, S. (2001). Locking in the incompressible limit for the element-free galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(9):1361–1383.
- Hughes, T. (1980). Generalization of selective integration procedures to anisotropic and non-linear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(9):1413–1418.
- Hughes, T. (1995). Multiscale phenomena: Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scales methods, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:387–401.

- Hughes, T. and Brooks, A.Ñ. (1979). A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. *Finite Elements Methods for Convection Dominated Flows*, 1:19–35.
- Hughes, T. and Brooks, A.Ñ. (1982). Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32:199–259.
- Hughes, T., Feijoo, G., Mazzei, L., and Quincy, J. (1998). The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166:3–24.
- Hughes, T., Franca, L., and Balestra, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 59:85–99.
- Hughes, T., Franca, L., and Balestra, M. (1987). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulation that converge for all velocity/pressure spaces. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 65:85–96.
- Hughes, T., Franca, L., and Hulbert, G. M. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 73:173–189.
- Hughes, T. and Malkus, D. (1983). A general penalty/mixed equivalence theorem for anysotropic, incompressible finite elements. In Atluri, S., Gallagher, R., and Zienkiewicz, O., editors, *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, pages 487–496. John Wiley, London.
- Hughes, T. J. (1987). *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall.
- Hutter, R., Hora, P., and Niederer, P. (2000). Total hourglass control for hyperelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 189:991–1010.
- Irons, B. and Razzaque, A. (1972). *Expirience with the patch test for convergence of finite element method*.
- Johnson, C. (1987). *Numerical solution of differential equations by tje finite element method*.

- Kasper, E. and Taylor, R. (1997). A mixed-enhanced strain method: linear problems. Technical Report UCB/SEMM-97/02, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley.
- Key, S., Heinstejn, M., Stone, C., Mello, F., Blandford, M., and Budge, K. (1999). A suitable low-order, tetrahedral finite element for solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:1785–1805.
- Klaas, O., Maniatty, A., and Shephard, M. S. (1999). A stabilized mixed finite element method for finite elasticity formulation for linear displacement and pressure ineterpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 180:65–79.
- Kolmogorov, A. and Forman, S. (1984). *Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional*. BIBBFISMAT.
- Korelc, J. and Wriggers, P. (1996a). Consistent gradient formulation for a stable enhanced method for large deformations. *Engineering Computations*, 13(1):103–123.
- Korelc, J. and Wriggers, P. (1996b). An efficient 3D enhanced strain element with Taylor expansion of the shape functions. *Computational Mechanics*, 19:30–40.
- Korelc, J. and Wriggers, P. (1997). Improved enhanced strain four node element with Taylor expansion of the shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:407–421.
- Kussner, M. and Reddy, B. D. (1998). The equivalent parallelogram and its application in 2d and 3d finite element analysis. In *Proceedings of SACAM 98*, Cape Town, South Africa.
- Lautersztajn, N. and Samuelsson, A. (2000). Further discussion on four-node isoparametric quadrilateral elements in plane bending. *International Journal on Numerical Methods in Engineering*, 47:129–140.
- Malkus, D. (1976). A finite element displacement model valid for any value of the incompressibility. *International Journal of Solids and Structures*, 12:731–738.
- Malkus, D. and Hughes, T. (1978). Mixed finite element methods - reduced and selective integration methods: a unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 15:68–81.
- Malvern, L. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

- Maniatty, A., Liu, Y., Klaas, O., and Shephard, M. S. (2001). Stabilized finite element method for viscoplastic flow: formulation and a simple progressive solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:4609–4625.
- Maniatty, A., Liu, Y., Klaas, O., and Shephard, M. S. (2002). Higher order stabilized finite element method for hyperelastic finite deformation. volume 191, pages 1491–1503.
- Mase, G. E. (1977). *Mecánica del Medio Continuo*. McGraw Hill, México, D.F.
- McNeal, R. (1987). A theorem regarding the locking of tapered four noded membrane elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 24:1793–1799.
- Melosh, R. (1963). Structural analysis of solids. *ASCE Structural Journal*, pages 4:205–223.
- Miehe, C. (1994). Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 37:1981–2001.
- Nagtegaal, J. and Fox, D. (1996). Using assumed enhanced strain elements for large compressive deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 33 (20-22):3151–3159.
- Nagtegaal, J., Park, D., and Rice, J. (1974). On numerical accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 4:153–177.
- Naylor, D. (1974). Stresses in nearly incompressible materials by finite elements with application to the calculation of excess pore pressures,. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8:443–460.
- Oñate, E. (1992). *Calculo de Estructuras por el Metodo de Elementos Finitos*. CIMNE, Barcelona, España.
- Oñate, E., Rojek, J., Taylor, R., and Zienkiewicz, O. (2001). Linear triangles and tetrahedra for incompressible problems using a finite calculus formulation. In *European Conference on Computational Mechanics 2001*, Cracow, Poland. ECCM.
- Oñate, E., Rojek, J., Taylor, R., and Zienkiewicz, O. (2002). Finite calculus formulation for incompressible solids using linear triangles and tetrahedra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Submitted.

- O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J. T. (1971). Reduced integration technique in general analysis of plates and shells,. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3:275–290.
- Oliver, X. and Agelet de Saracibar, C. (2000). *Mecanica de Medios Continuos para Ingenieros*. Edicions UPC.
- Perez, R. W. (2000). *Simulacion numerica de procesos de compactacion y extrusion de materiales pulverulentos*. PhD thesis, Universitat Politecnica de Catalunya.
- Pian, T. (1964). Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution. *AIAA Journal*, 2:1333–1336.
- Pian, T. and Sumihara, K. (1984). Rational approach for assumed stress finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 20:1685–1695.
- Reddy, B. and Simo, J. (1995). Stability and convergence of a class of enhanced strain methods. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 32(6):1705–1728.
- Reese, S., Kussner, M., and Reddy, B. (1999). A new stabilization technique for finite elements in non-linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:1617–1652.
- Reese, S. and Wriggers, P. (1999). An automatic control technique to avoid hourglass instabilities in unstructured meshes. In *European Conference on Computational Mechanics, Munich, Germany*. European Council of Computational Mechanics.
- Reese, S. and Wriggers, P. (2000). A stabilization technique to avoid hourglassing in finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:79–109.
- Reese, S., Wriggers, P., and Reddy, B. (1998). A new locking-free brick element formulation for continuous large deformation problems. In Idelsohn, S., Oñate, E., and Dvorkin, E., editors, *New Trends and Applications*, Barcelona, Spain. CIMNE. Proceedings of the WCCM IV, Buenos Aires, Argentina.
- Rojc, T. (1998). On a mixed approach to the finite element solution of large strain elastoplastic problems. *Engineering Computations*, 15(1):150–161.
- Salomon, O. (1999). *Modelo numerico de elastomeros multi-fase y su aplicacion al analisis de estructuras con aislamiento sismico*. PhD thesis, Universitat Politecnica de Catalunya.

- Schneider, G., Raithby, G., and Yovanovich, M. (1978). Finite element analysis of incompressible flow incorporating equal order pressure and velocity interpolation. In et. al., C. T., editor, *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*. Pentech Press, Plymouth.
- Simo, J. (1988a). A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part i. continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:199–219.
- Simo, J. (1988b). A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part ii. computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68:1–31.
- Simo, J. (1991). Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 85:273–310.
- Simo, J. (1992). Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99:61–112.
- Simo, J. and Armero, F. (1992). Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1413–1449.
- Simo, J., Armero, F., and Taylor, R. (1993). Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:359–386.
- Simo, J. and Hughes, T. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer and Verlag.
- Simo, J. and Hughes, T. (1986). On the variational foundations of assumed strain methods. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 53:51–54.
- Simo, J. and Rifai, M. (1990). A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638.
- Simo, J., Taylor, R., and Pister, K. (1985). Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:177–208.

- Soto, O., Lohner, R., Cebral, J., and Codina, R. (2001). A time-accurate implicit-monolithic finite element scheme for incompressible flow problems. Computational Fluid Dynamics Conference 2001; Swansea, Wales, UK.
- Spencer, J. M. (1980). *Continuum Mechanics*. Longman Scientific Technical.
- Steinmann, P. (2001). Geometrically nonlinear continuum mechanics -an introduction-. Universitat Kaiserslautern. Notes of the PhD course.
- Sussman, T. and Bathe, K. (1987). A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *Computers and Structures*, 29:357–409.
- Taig, I. (1961). Structural analysis by the matrix displacement method. *Engl. Electric Aviation Report*, (5070).
- Taylor, R. L. (1999). A mixed formulation for triangular and tetrahedral finite elements. In Abascal, R., Dominguez, J., and Bugada, G., editors, *Metodos Numericos En Ingenieria*. SEMNI, España.
- Turner, M.J. and Clouth, R., Martin, H., and Topp, L. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23:805–823.
- Valverde, Q. (1995). Desarrollo del elemento B-Bar cuadrilatero bilineal de deformacion plana en el marco de una formulacion variacional mixta. Master's thesis, Universitat Politecnica de Catalunya.
- Washizu, K. (1982). *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, New York, 3th edition.
- Wells, G., Sluys, L., and de Borst, R. (2002). A p-adaptive scheme for overcoming volumetric locking during plastic flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. in press.
- Wilson, E., Taylor, R., Doherty, W., and Ghaboussi, J. (1973). Incompatible displacement modes. *Numerical and Computer Models in Structural Mechanics*, pages 43–75. Academic Press, New York.
- W.P. Doherty, E.L. Wilson, R. T. (1969). *Stress analysis of axisymmetric solids utilizing higher order quadrilateral finite elements*. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.

- Wriggers, P. and Hueck, U. (1996). A formulation of the QS6 element for large elastic deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:1437–1454.
- Wriggers, P. and Korelc, J. (1996). On enhanced strain methods for small and finite deformations of solids. *Computational Mechanics*, 18:413–428.
- Wriggers, P. and Reese, S. (1996). A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 135:201–209.
- Y.R. Rashid, W. (1968). Pressure vessel analysis by finite element techniques. *In Proceedings of Conference on Prestressed Concrete Pressure Vessels, Institute of Civil Engineering*.
- Zalamea, F., Miquel Canet, J., and Oller, S. (1999). Un metodo en doble escala para la simulacion de materiales compuestos. Enviado al Congreso MATCOMP 99; Malaga, España.
- Zienkiewicz, O. and Godbole, P. (1975). *Viscous incompressible flow with special reference to non-newtonian(plastic) fluids*, volume 1. John Wiley, London.
- Zienkiewicz, O., Rojek, J., Taylor, R., and Pastor, M. (1998). Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:565–583.
- Zienkiewicz, O. and Taylor, R. (1994a). *El Metodo de los Elementos Finitos*, volume 1. Formulacion Basica y Problemas Lineales. CIMNE, Barcelona, España, 4ta edition.
- Zienkiewicz, O. and Taylor, R. (1994b). *El Metodo de los Elementos Finitos*, volume 2. Mecanica de Solidos y Fluidos, Dinamica y No Linealidad. CIMNE, Barcelona, España, 4ta edition.