

Apéndice A

Formulación de las curvas de vida S-N

Las curvas de vida S-N son regresiones de los valores experimentales, que en general siempre presentan bastante dispersión estadística. Existen infinidad de funciones de regresión que pueden ser utilizadas para interpolar estos resultados.

En este anexo se presentan algunas de las formulaciones que han sido implementadas en el modelo presentado en este trabajo: *a)* curva lineal en representación semi-logarítmica [$S-\log(N)$], *b)* curva bi-lineal en representación semi-logarítmica [$S-\log(N)$], *c)* curva lineal en representación logarítmica [$\log(S)-\log(N)$], *d)* curva exponencial, y *e)* curva exponencial formulada por Oller-Salomon (Oller et al. 2001).

A.1. Curva lineal en representación semi-logarítmica

En esta formulación se considera que el límite de discontinuidad S decrece linealmente en función de $\log_{10}N$ hasta llegar al valor límite de fatiga. Es una relación que se utiliza mucho cuando se tiene materiales con pocos datos experimentales de su comportamiento a fatiga, o bien si existe mucha dispersión en estos datos. Matemáticamente la evolución lineal en el plano semi-logarítmico [$S-\log(N)$] se expresa como

$$\begin{aligned} S &= S_u + \Gamma \cdot \log N && \text{si } N < N_e \\ S &= S_e && \text{si } N > N_e \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

Donde Γ es la pendiente de la recta que viene definida por el límite de fatiga. Así la expresión (A-1) en función del límite inicial de discontinuidad y el límite de fatiga resulta

$$\begin{aligned} S &= S_u - (S_u - S_e) \frac{\log N}{\log N_e} && \text{si } N < N_e \\ S &= S_e && \text{si } N > N_e \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

La función A-2 en su forma normalizada queda de la forma

$$s = 1 - (1 - s_e) \frac{\log N}{\log N_e} \quad \text{si } N < N_e \quad (\text{A-3})$$

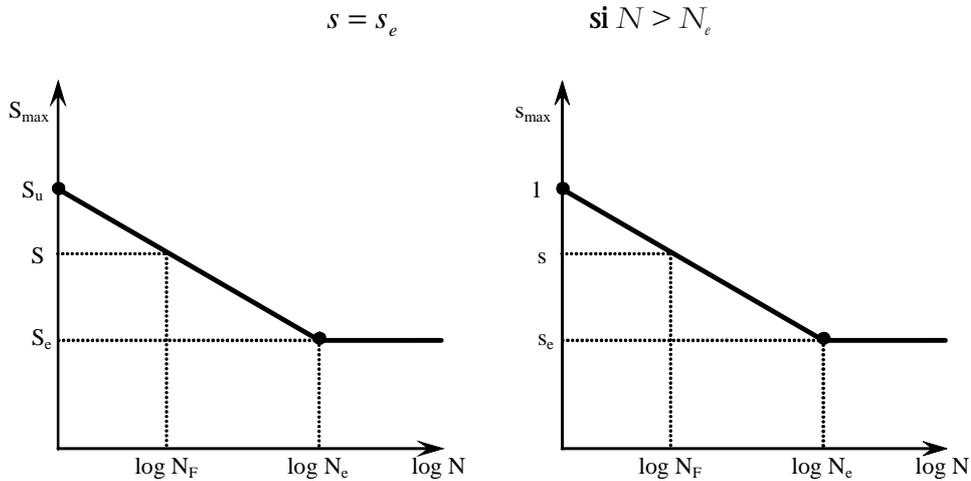


Figura A-1. Representación de la evolución lineal semi-logarítmica de la curva S-N en el plano semi-logarítmico $[S-\log(N)]$

A.2. Curva bi-lineal en representación semi-logarítmica

En este caso se considera la curva S-N como una evolución bi-lineal del límite de discontinuidad S en función del $\log_{10}N$. Este tipo de interpolación es muy adecuado para ciertos materiales que tienen un comportamiento muy distinto para bajo número de ciclos y para alto número de ciclos, como por ejemplo algunos metales. La evolución bi-lineal en el plano semi-logarítmico $[S-\log(N)]$ se puede expresar como

$$S = S_u + \Gamma_1 \cdot \log N \quad \text{si } N < N^* \quad (\text{A-4})$$

$$S = A + \Gamma_2 \cdot \log N \quad \text{si } N^* > N > N_e$$

$$S = S_e \quad \text{si } N > N_e$$

Donde el parámetro A y las pendientes de las rectas Γ_1 y Γ_2 están definidas por el límite de fatiga (S_e, N_e) y el punto de inflexión entre las dos rectas (S^*, N^*), de este modo se obtienen,

$$S = S_u - (S_u - S^*) \frac{\log N}{\log N^*} \quad \text{si } N < N^* \quad (\text{A-5})$$

$$S = S^* - (S^* - S_e) \frac{\log\left(\frac{N}{N^*}\right)}{\log\left(\frac{N_e}{N^*}\right)} \quad \text{si } N^* > N > N_e$$

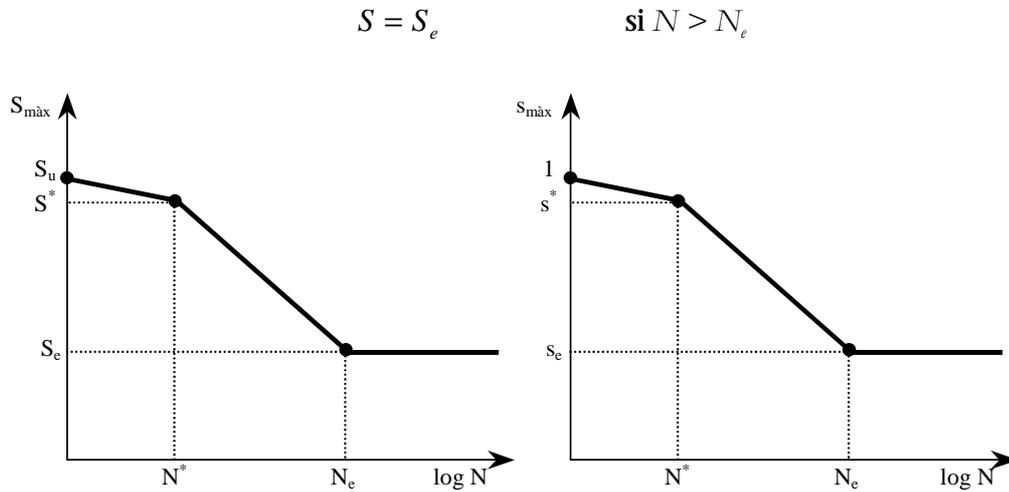


Figura A-2. Representación de la evolución bi-lineal semi-logarítmica de la curva S-N en el plano semi-logarítmico $[S-\log(N)]$

La función normalizada queda de la forma

$$s = 1 - (1 - s^*) \frac{\log N}{\log N^*} \quad \text{si } N < N^* \quad (\text{A-6})$$

$$s = s^* - (s^* - s_e) \frac{\log N / N^*}{\log N_e / N^*} \quad \text{si } N^* > N > N_e$$

$$s = s_e \quad \text{si } N > N_e$$

A.3. Curva lineal en representación logarítmica

El $\log_{10} S$ es una función lineal del $\log_{10} N$. Para valores de N inferiores al límite de fatiga se puede expresar como

$$S = S_u \cdot N^\Gamma \quad (\text{A-7})$$

o bien

$$\log S = \log S_u - \Gamma \cdot \log N \quad (\text{A-8})$$

donde Γ es la pendiente de la curva que viene definida por el límite de resistencia estática para $N=1$ y el límite de fatiga para $N=N_e$. Sustituyendo en la anterior expresión se obtiene

$$S = S_u \cdot [S_e] \frac{\log N}{\log N_e} \quad \text{si } N < N_e \quad (\text{A-9})$$

$$S = S_e \quad \text{si } N > N_e$$

o bien

$$\log S = \log S_u - \log S_e \frac{\log N}{\log N_e} \quad \text{si } N < N_e \quad (\text{A-10})$$

$$\log S = \log S_e \quad \text{si } N > N_e$$

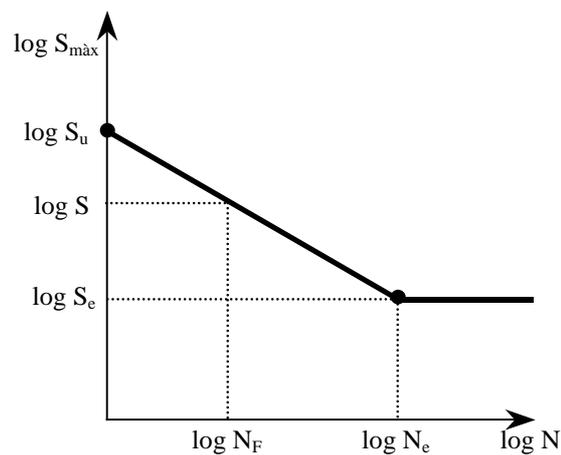


Figura A-3. Representación de la evolución lineal logarítmica de la curva S-N en el plano logarítmico $[\log(S)-\log(N)]$

La función exponencial en forma normalizada queda como

$$s = [s_e] \frac{\log N}{\log N_e} \quad \text{si } N < N_e \quad (\text{A-11})$$

$$s = s_e \quad \text{si } N > N_e$$

A.4. Curva exponencial

Se puede obtener una ley modificada de la anterior aplicando un exponente β definido estrictamente positivo al cociente de los logaritmos del número de ciclos. De esta forma para N inferiores al límite de fatiga se obtiene la expresión

$$S = S_u \cdot [S_e] \left(\frac{\log N}{\log N_e} \right)^\beta \quad (\text{A-12})$$

o bien

$$\log S = \log S_u - \log S_e \left(\frac{\log N}{\log N_e} \right)^\beta \quad (\text{A-13})$$

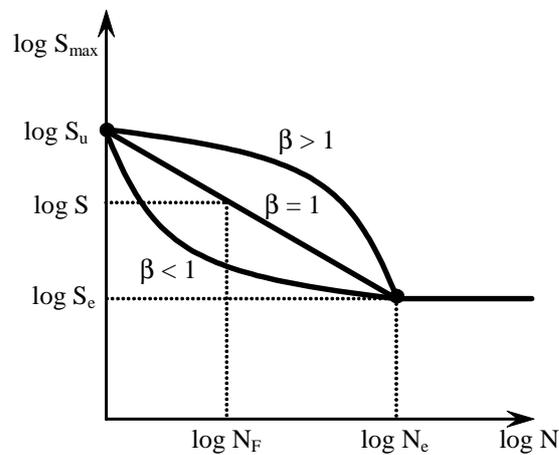


Figura A-4. Representación gráfica de la evolución logarítmica exponencial de la curva S-N donde se muestran las formas que toman en función del valor del exponente β

La función normalizada queda de la forma

$$s = [s_e] \left(\frac{\log N}{\log N_e} \right)^\beta \quad \text{si } N > N_e \quad (\text{A-14})$$

$$s = s_e \quad \text{si } N > N_e$$

A.5. Curva exponencial formulada por Oller-Salomon

Se trata de una interpolación para los valores experimentales que permite un ajuste asintótico al valor de tensión del límite de fatiga. Cumple la expresión

$$S = S_e + (S_u - S_e)e^{-\alpha \cdot (\log N)^\beta} \quad (\text{A-15})$$

o bien la expresión

$$S = S_e + (S_u - S_e) \cdot F (\log N)^\beta \quad (\text{A-16})$$

donde

$$F = e^{-\alpha} \quad (\text{A-17})$$

donde α y β son parámetros que definen la forma de la evolución exponencial.

También puede formularse esta curva mediante la expresión

$$S = S_e + (S_u - S_e) \cdot A \left(\frac{\log N}{\log N^*} \right)^\beta \quad (\text{A-18})$$

donde es necesario un solo parámetro de forma β , y donde

$$A = \frac{S^* - S_e}{S_u - S_e} \quad (\text{A-19})$$

siendo el par de valores S^* , N^* son un punto cualquiera conocido de la curva S-N.

Como puede observarse en la figura A-5 con esta función no queda propiamente definido un límite de vida a fatiga (N) ya que la función mostrada es asintótica al límite de tensión de fatiga (S). Sin embargo con esta formulación se puede encontrar una función donde prácticamente exista un valor S_e , N_e , a partir del cual la función describa una recta de vida infinita. Esto se consigue forzando el punto S^* , N^* , que define la expresión de la curva, muy tan cercano al valor S_e , N_e como se quiera.

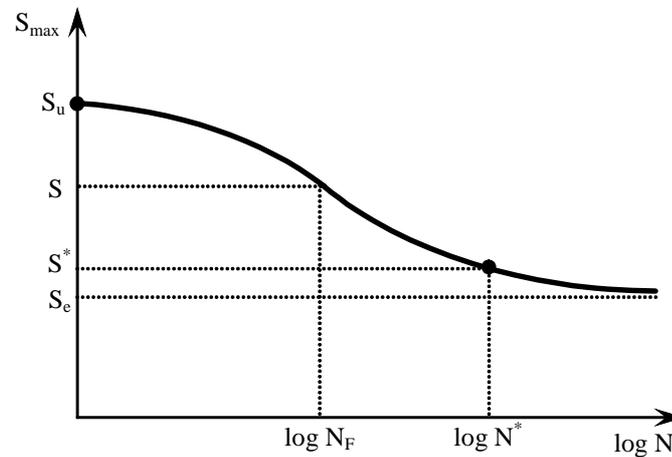


Figura A-5. Representación gráfica de la evolución logarítmica exponencial de Oller-Salomon

En su forma normalizada la curva se puede expresar como

$$s = s_e + (1 - s_e) \cdot A \left(\frac{\log N}{\log N^*} \right)^\beta \quad (\text{A-20})$$

donde

$$A = \frac{s^* - s_e}{1 - s_e} \quad (\text{A-21})$$

A.6. Referencias

Oller, S., O. Salomon y E. Oñate. (2001). Thermo-mechanical fatigue analysis using generalized continuum damage mechanics and finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (Aceptado para ser publicado), .

Reifsnider, K.L. y Case, S.W. (2002). *Damage tolerance and durability of material systems*. New York: Wiley Interscience.

Wöhler, A. (1871). Test to determine the forces acting on railway carriage axles and capacity of resistance of the axle. *Engineering* **11**, 199.

Apéndice B

Curvas de reducción de la resistencia residual formuladas

Al igual que con la formulación de las curvas S-N, la formulación de las curvas de resistencia residual se puede realizar de diferentes maneras dependiendo del tipo de interpolación que se realice entre los valores experimentales. Se han implementado en el modelo diferentes formas que se presentan a continuación

- a) Lineal. Palmgren-Miner (Palmgren, 1924) y (Miner, 1945)
- b) Miner modificada
- c) Exponencial formulada por Oller-Salomon (Oller *et al.*, 2001).

B.1. Lineal. Palmgren-Miner

Se considera una evolución lineal del índice de degradación de la resistencia residual. Fue inicialmente planteada por Palmgren (1924) y expresada matemáticamente por primera vez por Miner (1945). El índice de degradación se define como el cociente del número de ciclos con el número de ciclos límite a la tensión aplicada actual

$$D = \frac{N}{N_F} \quad (\text{B-1})$$

De este modo la expresión del factor de reducción de la resistencia queda como

$$f_{red} = 1 - \frac{N}{N_F} (1 - s) \quad (\text{B-2})$$

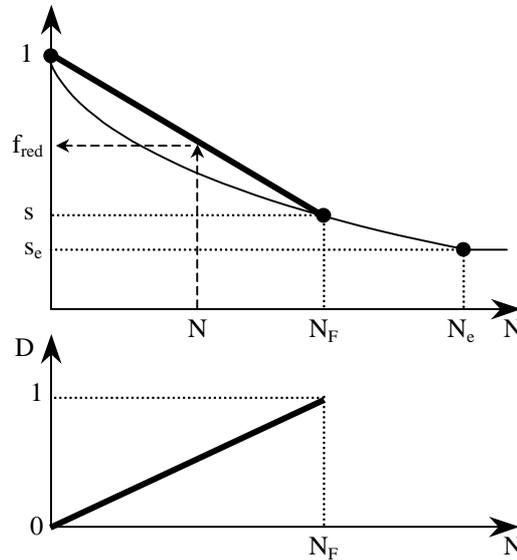


Figura B-1. Evolución lineal de f_{red} y del índice de degradación D

B.2. Miner modificada

Se considera que el índice de degradación de la resistencia residual es el cociente del nombre actual de ciclos con el nombre de ciclos límite a la tensión actual elevando el cociente a un exponente de ajuste experimental β .

$$D = \left(\frac{N}{N_F} \right)^\beta \quad (\text{B-3})$$

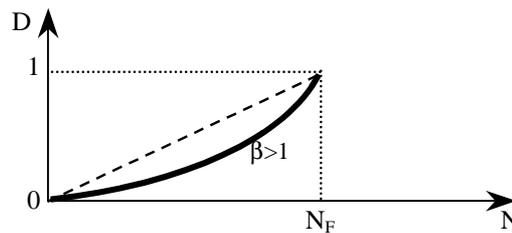


Figura B-2. Evolución del índice de degradación D con un $\beta > 1$.

Con este índice de degradación la expresión del factor de reducción de la resistencia queda como,

$$f_{red} = 1 - \left(\frac{N}{N_F} \right)^\beta (1 - s) \quad (\text{B-4})$$

Estudios realizados por Marco y Starkey (1954) sobre el valor del exponente en metales revelan que este siempre tiene valores superiores a 1, que depende del nivel de tensión y que aumenta si el índice de reversibilidad (R o \mathcal{Q}) disminuye. Hasin y Rottem (1978) también realizaron trabajos de acumulación de degradación en fatiga en materiales compuestos usando este exponente para ajustarse mejor a los datos experimentales

B.3. Expresión exponencial formulada por Oller-Salomon

Oller *et al.* (2001) formulan una regla de evolución de la resistencia residual que sigue la expresión exponencial

$$f_{red} = S \left(\frac{\log N}{\log N_F} \right)^\beta \quad (\text{B-5})$$

donde β es un parámetro de ajuste experimental. Esta expresión es muy apropiada para composites ya que permite formular perfectamente las evoluciones de su resistencia residual.

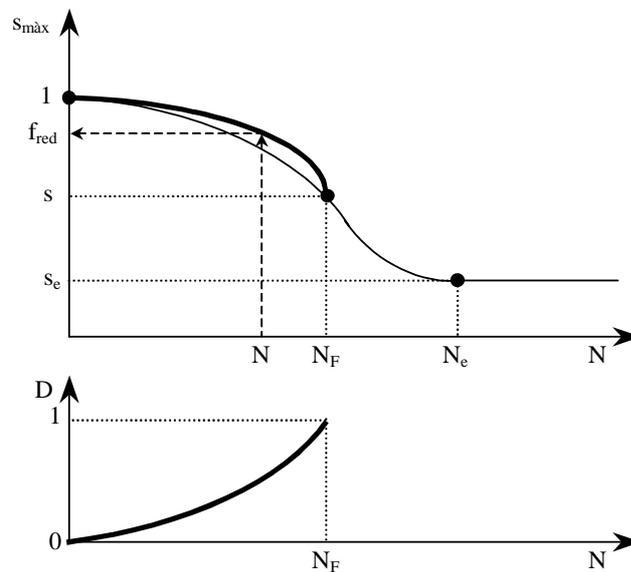


Figura B-3. Evolución exponencial de f_{red} y del índice de degradación D para una evolución exponencial según Oller-Salomon (Oller *et al.* 2001)

B.4. Referencias

- Marco, S.M. y W.L. Starkey. (1954). A concept of fatigue damage. *ASME Transactions* **76**, 627.
- Miner, M.A. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics* **67**, A159-A164.
- Oller, S., O. Salomon y E. Oñate. (2001). Thermo-mechanical fatigue analysis using generalized continuum damage mechanics and finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (Aceptado para ser publicado), .
- Palmgren, A. (1924). Die Lebensdauer von Kugellagern. *Verfahrenstechnik* **68**, 339-341.

Apéndice C

Principios de micromecánica

C.1. Introducción

La micromecánica es el estudio del material compuesto teniendo en cuenta la iteración de los materiales constituyentes en detalle. Permite representar al material compuesto heterogéneo según unas propiedades equivalentes como si fuera un material homogéneo usualmente anisótropo.

El estudio de la disposición y de la geometría del refuerzo permite relacionar las propiedades de los constituyentes con las propiedades resultantes del compuesto según la fracción volumétrica de uno y otro. Con ello es posible determinar aproximadamente la rigidez y la resistencia de los compuestos. Resulta un procedimiento altamente útil para predecir las propiedades de los composites durante su fase de diseño.

C.2. Conceptos básicos. Propiedades elásticas de las láminas unidireccionales

Las propiedades elásticas de una lámina unidireccional (UD) se pueden considerar como las de un material transversalmente isótropo. Los materiales transversalmente isótropos tienen un eje de simetría, que en el caso de las láminas UD coincide con la dirección de la fase refuerzo.

Usualmente se define unos ejes de referencia asociados a la dirección del refuerzo donde X_1 es la dirección de la fibra y X_2 , X_3 son las direcciones perpendiculares al refuerzo (ver figura C-1).

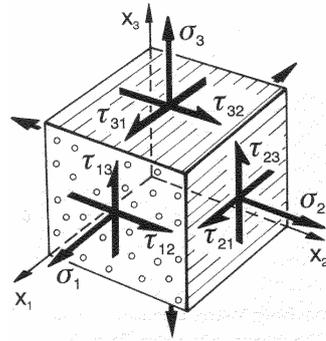


Figura C-1. Tensiones normales y cortantes para una lámina UD

Por lo tanto se distinguen dos conjuntos de propiedades para los ejes principales, uno para las propiedades en la dirección paralela a la fibra (dirección X_1) y otro para la dirección perpendicular al refuerzo (direcciones X_2 y X_3).

Un material ortótropo se define mediante nueve constantes elásticas: tres módulos elásticos (E_{11} , E_{22} , E_{33}), tres módulos de rigidez a cortante (G_{12} , G_{13} , G_{23}) y tres coeficientes de Poisson (ν_{12} , ν_{13} , ν_{23})

La simetría transversalmente isótropa del material conlleva que $E_{22} = E_{33}$; $G_{12} = G_{13}$; $\nu_{12} = \nu_{13}$ y $\nu_{23} = \nu_{32}$. En cambio, los coeficientes de Poisson ν_{12} y ν_{21} siguen siendo distintos y quedan relacionados por la siguiente relación elástica teórica

$$\nu_{21} = \nu_{12} (E_{22}/E_{11}) \quad (C-1)$$

Dado que la lámina es isótropa en el plano 23, puede aplicarse también la siguiente relación elástica teórica para un sólido bidimensional

$$G_{23} = \frac{E_{22}}{2 \cdot (1 + \nu_{23})} \quad (C-2)$$

En consecuencia con solo cinco constantes independientes se puede caracterizar un material transversalmente isótropo: E_{11} , E_{22} , ν_{12} , G_{12} y G_{23} (ó ν_{23})

C.3. Modelos micromecánicos de determinación de las propiedades elásticas

Para el caso de láminas unidireccionales esta cuestión ha estado muy estudiada desde mediados de los años sesenta. Existe una gran variedad de métodos que permiten predecir las propiedades efectivas de los compuestos para así poder estudiarlos macro mecánicamente. La más fundamental es la teoría de mezclas. Aún de este modo esta regla

básica necesita de modificaciones para adaptarse al comportamiento real de los compuestos.

Es conocido que sólo algunas de las propiedades elásticas de un compuesto reforzado con fibras orientadas siguen adecuadamente la teoría de mezclas clásica. Por ejemplo, el módulo de Young en la dirección longitudinal (E_{11}) o el coeficiente de Poisson (ν_{12}). Así mismo es necesaria la utilización de modelos más elaborados, como el de Halpin-Tsai (1973), que parte de datos empíricos para deducir el módulo transversal (E_{22}) o el módulo de rigidez a cortante (G_{12}).

Los trabajos más destacados en los cuales se ha intentado ajustar estas propiedades efectivas son los de Hill (1964), Hashin y Rosen (1964), y las monografías de Hashin (1972). Más recientemente se ha publicado un texto de Aboudi (1991) donde se presentan los métodos disponibles para determinar las propiedades elásticas efectivas y la discusión de la aplicación de métodos micromecánicos más sofisticados para respuestas tanto elásticas como inelásticas como el ensamble de cilindros de compuesto (CCA), métodos de celda unitaria, etc.

En el caso que la interfase entre refuerzo y la matriz tenga un papel muy importante en las propiedades mecánicas puede también ser necesario introducirla en el modelo como nueva fase con propiedades particulares.

C.4. Ejemplos de algunas aproximaciones micromecánicas

Las propiedades mecánicas de una lámina UD pueden ser deducidas a partir de las propiedades de sus constituyentes y la fracción de fibra. Utilizando aproximaciones micromecánicas o fenomenológicas.

Si se considera a los constituyentes como materiales isótropos las propiedades elásticas independientes son: el módulo elástico de la fibra (E_f) y de la matriz (E_m), sus respectivos coeficientes de Poisson (ν_f, ν_m) y la fracción de volumen del refuerzo (V_f).

A continuación se presentan algunas de las expresiones que se pueden utilizar para estimar las propiedades de una lámina UD. En algunos de los parámetros se propone directamente el uso de la regla de mezclas clásica, en cambio en otros debe emplearse alguna modificación ya que los distintos constituyentes no colaboran en paralelo.

(a) *Módulo de Young en la dirección de la fibra (E_{11}).*

Este parámetro elástico puede ser determinado directamente mediante la regla de mezclas clásica:

$$E_{11} = E_f \cdot V_f + E_m \cdot (1 - V_f) \quad (\text{C-3})$$

(b) *Módulo de Young en la dirección perpendicular a la fibra (E_{22})*

En este caso es necesario modificar la regla de mezclas. Una posible modificación es la que proporciona Halpin-Tsai (1973) según la ecuación

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{1}{V_f + \frac{1}{2}(1 - V_f)} \left[V_f \frac{1}{E_f} + \frac{1}{2}(1 - V_f) \frac{1}{E_m} \right] \quad (\text{C-4})$$

(c) *Coefficiente de Poisson's en el plano 12 (ν_{12})*

Como en el caso del módulo en la dirección longitudinal de la fibra este parámetro sigue adecuadamente la regla de mezclas clásica

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad (\text{C-5})$$

(d) *Módulo de rigidez en el plano 12 (G_{12})*

En este caso, de acuerdo con la modificación propuesta por Halpin-Tsai (1973) sigue la siguiente expresión

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{V_f + \frac{1}{2}(1 - V_f)} \left[V_f \frac{1}{G_f} + \frac{1}{2}(1 - V_f) \frac{1}{G_m} \right] \quad (\text{C-6})$$

(e) *Módulo de rigidez en la dirección transversal 23 (G_{23})*

Aquí se presenta la relación obtenida mediante el modelo de *Stress Partitioning Parameter* (SPP), dando la expresión

$$G_{23} = G_m \frac{V_f + \eta_{23}(1 - V_f)}{\eta_{23}(1 - V_f) + V_f G_m / G_f} \quad (\text{C-7})$$

donde

$$\eta_{23} = \frac{3 - 4\nu_m + G_m / G_f}{4(1 - \nu_m)} \quad (\text{C-8})$$

C.5. Referencias

Aboudi, Jacob. (1991). *Mechanics of composite materials : a unified micromechanical approach*. Vol. 29. Amsterdam ; New York: Elsevier.

Halpin, J.C., Jerina, K.L. y Johnson, T.S. (1973). Characterisation of composites for the purpose of reliability evaluation. En *Analysis of Test Methods for High Modulus Fibers and Composites*, ASTM STP 521ASTM.

Hashin, Z. y B.W. Rosen. (1964). The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *J. Applied Mechanics* June, 223-230.

Tsai, Stephen W. y Hahn, H.T. (1980). *Introduction to composite materials*. Westport, Conn.: Technomic Pub.

Apéndice D

Fallo y daño cuasi-estático

D.1. Introducción

El siguiente anexo se centra en el análisis de los criterios de fallo aplicados a los materiales compuestos avanzados. Especialmente aquí se trata a los laminados de matriz polimérica reforzada con fibras largas orientadas. Tan solo se presentan los criterios de fallo relativos al fallo estático o cuasi-estático, mientras que los fallos a fatiga quedan sujetos a otros análisis y estudios.

Para los compuestos existen, al igual que para los materiales homogéneos, unos criterios de tensión límite. A estos criterios en compuestos se los llama criterios de fallo. Se utilizan para determinar el estado límite de tensión a partir del cual el compuesto sufre daño o fallo. Por lo tanto, se puede considerar que un criterio de fallo es un concepto matemático que permite estimar cuando un material rompe dado un cierto estado de tensiones. Existen distintos criterios, algunos de estos están formulados específicamente para una determinada topología de compuesto (unidireccional, laminado, etc.) Esta disparidad de soluciones es indicativa de que todos los criterios tienen alguna carencia que hace imposible generalizarlos para todos los materiales compuestos, en todas sus aplicaciones o para cualquier estado de carga. Para otros criterios de fallo o obtener información adicional se puede consultar las publicaciones realizadas por París (2000), Nahas (1986), Reifsnider (1998) y Sleight (1999).

D.2. Criterios de fallo macro-mecánicos. Criterios polinomiales

Estos criterios no distinguen el tipo de fallo ni cual es la fase dominante en la fractura. En consecuencia no pueden tener en cuenta fenómenos que puedan pasar en la interfase entre la matriz y la fibra. En esta categoría de criterios se pueden clasificar las distintas propuestas distinguiendo si el criterio de fallo permite o no predecir el fallo de la lámina pero no el modo de fallo o la fase que rompe.

Para todos los criterios de fallo es necesario determinar parámetros mediante la experimentación en el laboratorio. Normalmente son necesarias pruebas de tracción y

compresión uniaxial, en dos direcciones perpendiculares y pruebas de cortante puro. Algunos de estos criterios también necesitan de pruebas de tensión bi-axial y otras. En muchos de estos casos estos parámetros son términos que permiten formular una expresión cuadrática polinomial que define los estados de tensiones o deformaciones máximos que permite el material.

Los criterios de fallo agrupados en este tipo de aproximación utilizan algunas expresiones matemáticas para describir la superficie de fluencia para un material de comportamiento anisótropo. Generalmente, estas expresiones están basadas en ajustes de curvas obtenidas experimentalmente. Un camino alternativo (Betten, 1981, 1988) Oller et al. (2000, 2002) es definir, tal y como se trata en el capítulo 5, una transformación lineal entre un *sólido real anisótropo* y un *sólido ficticio isótropo* donde se puede utilizar un criterio para un material isótropo, por ejemplo el criterio de Von Mises, para retornar al *sólido real anisótropo* mediante una transformación inversa.

El criterio de fallo polinomial más general es el criterio del tensor polinomial (*Tensor Polynomial Criterion*) propuesto por Tsai y Wu (1971). Este criterio se puede expresar según la siguiente notación:

$$F_i \cdot \sigma_i + F_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j + F_{ijk} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \sigma_k \geq 1 \quad (\text{D-1})$$

donde $i, j, k = 1, \dots, 6$ acuerdo a la notación científica ($1 \equiv 1, 2 \equiv 2, 3 \equiv 3, 4 \equiv 23, 5 \equiv 13, 6 \equiv 12$) para el caso tridimensional. Los parámetros F_p, F_{ij} y F_{ijk} son relativos a la resistencia del laminado en las direcciones principales. Sin embargo, el tensor de tercer orden F_{ijk} es usualmente ignorado desde un punto de vista práctico debido al gran número de constantes materiales requeridas para su determinación., [5]. Por lo tanto, en general el criterio polinomial se reduce a una expresión cuadrática

$$F_i \cdot \sigma_i + F_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \geq 1 \quad (\text{D-2})$$

donde $i, j = 1, \dots, 6$. Considerando que la resistencia cortante no es dependiente del signo todos los términos referentes a tensiones cortantes de primer orden pueden despreciarse: $F_4 = F_5 = F_6 = 0$. De este modo la forma explícita para la expresión general resulta:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{33} \sigma_3^2 + F_{44} \sigma_4^2 + F_{55} \sigma_5^2 + F_{66} \sigma_6^2 \geq 1 \quad (\text{D-3})$$

| | Tsai-Wu | Tsai-Hill (*) | Azzi-Tsai (*) | Hoffman | Chasis*(†) |
|-----------------|--|--|-------------------------------|---|---|
| F ₁ | $\frac{1}{\sigma_{1T}^u} - \frac{1}{\sigma_{1C}^u}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{\sigma_{1T}^u} - \frac{1}{\sigma_{1C}^u}$ | 0 |
| F ₂ | $\frac{1}{\sigma_{2T}^u} - \frac{1}{\sigma_{2C}^u}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{\sigma_{2T}^u} - \frac{1}{\sigma_{2C}^u}$ | 0 |
| F ₃ | $\frac{1}{\sigma_{3T}^u} - \frac{1}{\sigma_{3C}^u}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{\sigma_{3T}^u} - \frac{1}{\sigma_{3C}^u}$ | 0 |
| F ₁₂ | $\frac{-1}{2\sqrt{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u \sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u}}$ | $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^{u^2}} + \frac{1}{\sigma_2^{u^2}} - \frac{1}{\sigma_3^{u^2}} \right)$ | $\frac{-1}{\sigma_1^{u^2}}$ | $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u} + \frac{1}{\sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u} - \frac{1}{\sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u} \right)$ | $\frac{-K_{12}}{\sigma_1^u \sigma_2^u}$ |
| F ₁₃ | $\frac{-1}{2\sqrt{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u \sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u}}$ | $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_3^{u^2}} + \frac{1}{\sigma_1^{u^2}} - \frac{1}{\sigma_2^{u^2}} \right)$ | 0 | $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u} + \frac{1}{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u} - \frac{1}{\sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u} \right)$ | $\frac{-K_{13}}{\sigma_1^u \sigma_3^u}$ |
| F ₂₃ | $\frac{-1}{2\sqrt{\sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u \sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u}}$ | $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_2^{u^2}} + \frac{1}{\sigma_3^{u^2}} - \frac{1}{\sigma_1^{u^2}} \right)$ | 0 | $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u} + \frac{1}{\sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u} - \frac{1}{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u} \right)$ | $\frac{-K_{23}}{\sigma_2^u \sigma_3^u}$ |
| F ₁₁ | $\frac{1}{\sigma_{1T}^u \cdot \sigma_{1C}^u}$ | $\frac{1}{\sigma_1^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_1^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{1T}^u \cdot \sigma_{1C}^u}$ | $\frac{1}{\sigma_1^{u^2}}$ |
| F ₂₂ | $\frac{1}{\sigma_{2T}^u \cdot \sigma_{2C}^u}$ | $\frac{1}{\sigma_2^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_2^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{2T}^u \cdot \sigma_{2C}^u}$ | $\frac{1}{\sigma_2^{u^2}}$ |
| F ₃₃ | $\frac{1}{\sigma_{3T}^u \cdot \sigma_{3C}^u}$ | $\frac{1}{\sigma_3^{u^2}}$ | 0 | $\frac{1}{\sigma_{3T}^u \cdot \sigma_{3C}^u}$ | $\frac{1}{\sigma_3^{u^2}}$ |
| F ₄₄ | $\frac{1}{\sigma_{23}^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{23}^{u^2}}$ | 0 | $\frac{1}{\sigma_{23}^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{23}^{u^2}}$ |
| F ₅₅ | $\frac{1}{\sigma_{13}^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{13}^{u^2}}$ | 0 | $\frac{1}{\sigma_{13}^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{13}^{u^2}}$ |
| F ₆₆ | $\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$ | $\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$ |

Tabla D-1. Criterio de fallo polinomial. Donde σ_1^u , σ_2^u y σ_3^u son las resistencia normales el las direcciones 1, 2 y 3; y σ_{23}^u , σ_{13}^u y σ_{12}^u son las resistencias a cortante en los planos 23, 31 y 12 . (*) σ_1^u , σ_2^u y σ_3^u representan σ_{1C}^u , σ_{2C}^u y σ_{3C}^u , o bien a σ_{1T}^u , σ_{2T}^u y σ_{3T}^u dependiendo del signo de σ_1 , σ_2 y σ_3 respectivamente. (†) K_{12} , K_{13} y K_{23} son coeficientes que dependen del material.

Existen otros criterios de fallo cuadráticos como los propuestos por Tsai-Hill (1965, 1948), Azzi-Tsai (1965), Hoffman (1967) y Chamis (1969). Todos estos pueden ser representados mediante los términos del criterio general de Tsai-Wu variando los parámetros F_i y F_{ij} para obtener un mejor ajuste de los resultados experimentales. En la tabla D-1 se resumen los parámetros característicos de algunos de estos criterios polinomiales.

D.3. Criterios asociados a modos de fallo. Criterios de fallo combinados

De acuerdo con Sun *et al.* (1996), aproximadamente el 17% de los diseñadores de elementos en composite utilizan el criterio de fallo de Tsai-Hill mientras el 11 % utiliza el criterio de Tsai-Wu (ver figura D-3). Esto es debido que los criterios polinomiales son fáciles de usar y la determinación de los parámetros es relativamente sencilla, obteniéndose de ellos unos resultados bastante aceptables. Aunque, ciertamente tienen ciertas carencias. Una de ellas es que son capaces de predecir como será el fallo de lámina pero no identifican el modo de fallo o el componente que falla. Como es sabido existen dos claras diferencias entre los materiales metálicos y los compuestos: la no homogeneidad y la falta de isotropía de los composites. La anisotropía puede ser tenida en cuenta mediante variables macroestructurales a través de las ecuaciones constitutivas. En cambio la no homogeneidad no tiene un efecto directo a nivel macroscópico. Por esto muchas de las formulaciones de los criterios de fallo, que si tienen en cuenta la falta de isotropía, no tienen en cuenta el carácter heterogéneo de los composites y su influencia en el fallo. Este es el caso de los criterios polinomiales.

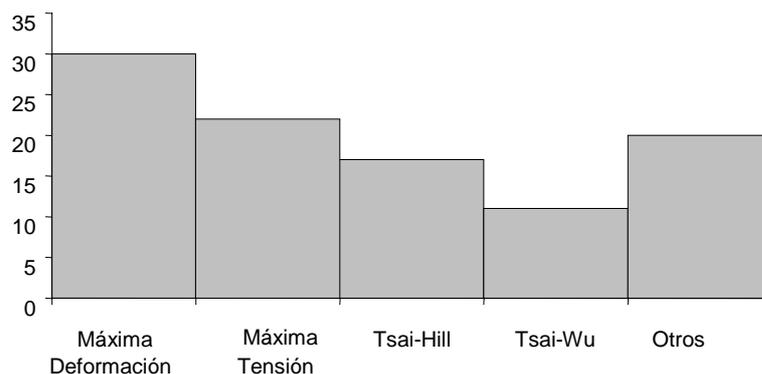


Figura D-3. Uso de los distintos criterios de fallo en el diseño de elementos de material compuesto laminado (Sun *et al.*, [11])

Para solucionar esto se han desarrollado diversos criterios asociados a los distintos modos de fallo o los llamados criterios de fallo combinado. Éstos tienen en cuenta el tipo de fallo. En ellos se trata separadamente el fallo de la fibra y el de la matriz y se tiene en cuenta como sucede.

Los criterios de este tipo más sencillos y fáciles de aplicar son el de máxima tensión y el de máxima deformación. Tal como se observa en la figura D-3 son, junto a los polinomiales, son los criterios más usados en el proceso de diseño en compuestos. Presentan la limitación de que no permiten una relación entre la tensión normal y cortante. No suele dar resultados precisos si se aplica a estados de carga distintos al uniaxial. Por ello es necesario definir criterios más complejos. Sin embargo, los criterios más complicados son justamente los más interesantes desde un punto de vista de la investigación científica en el área de compuestos.

Dado que los materiales compuestos están basados en mezclas *mecánicas* de diferentes componentes, donde la geometría y la disposición del refuerzo están concebidas para obtener determinadas características, el resultado es un material no homogéneo a menudo anisótropo y quebradizo. Esto determina los diferentes modos de fallo del material, algunos relacionados con el fallo de los constituyentes y otros relacionados con el fallo de la interfase.

En el caso de la fibra, pueden ser considerados dos modos diferentes de fallo; uno relacionado con una carga a tracción y otro relacionado con una carga de compresión. Una característica de la fibra es que no suele mostrar deformación plástica, estando su fallo relacionado con un fenómeno de redistribución de esfuerzos a las fibras vecinas. Esta redistribución puede causar una nueva ruptura de fibra. En el caso de una carga a compresión, el micropandeo progresivo de las fibras tiene lugar hasta que las fibras se rompen. Como muchos materiales compuestos pueden ser considerados como dominados por la fibra, dependiendo de las propiedades de ésta. Por lo tanto, estos dos modos de fallo son de gran importancia.

Para la matriz, la microfisuración es el principal modo de fallo. Esto equivale a grietas de la matriz paralelas a la dirección de la fibra sobre el grosor completo de la lámina y especialmente para aquellas láminas en las que el refuerzo no está en la misma dirección de la carga aplicada, láminas *off-axis*. Estas grietas tendrían que aparecer debido a los esfuerzos en ambos sentidos, tracción o compresión, y esfuerzo a cortante. Por la presencia de estas grietas, por lo general se considera que una lámina pierde su propiedad mecánica en la dirección transversal y para los esfuerzos cortantes.

Para la interfase fibra-matriz, el modo de fallo común considerado es el llamado *debonding*. Esto equivale a una pérdida de adhesión y un deslizamiento relativo entre la fibra y la matriz debido a las diferencias en los esfuerzos a cortante de deformación en la interfase fibra-matriz. Esto produce una pérdida de adhesión y un deslizamiento con una gran pérdida de energía de fricción. Este modo de fallo es también de gran importancia, porque si las propiedades de la interfase ente fibra-matriz se pierden, la transmisión de carga desde la matriz a las fibras no se efectúa correctamente con una pérdida de características del composite.

En el caso de la interfase lamina-a-lamina, el modo de fallo que puede aparecer es la deslaminación. Esto equivale a una pérdida de adhesión entre las láminas, por lo tanto de una pérdida de la correcta distribución de cargas entre ellas. Como este modo equivale al laminado completo, más que para una única lámina, este modo de fallo no es tenido en cuenta en la mayoría de los criterios de fallo para compuesto reforzados unidireccionalmente.

De este modo, prestando atención a la inclusión de estos diferentes modos de fallo, los siguientes criterios de fallo pueden ser incluidos en esta categoría.

a) Criterio de Máxima Deformación

Considera que el material falla cuando el material supera una cierta deformación límite en una zona determinada. Es un criterio simple y directo para predecir el fallo de los compuestos. No se considera la interacción entre las deformaciones combinadas sobre la lámina analizada

El criterio de fallo por deformación se puede considerar en tres condiciones de fallo correspondientes con la deformación máxima en la dirección de la fibra, en la dirección transversal o de la matriz y para deformación a cortante. En la dirección de la fibra como

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{1T}'' \quad \text{ó} \quad |\varepsilon_1| \geq \varepsilon_{1C}'' \quad (\text{D-4})$$

En la dirección de la matriz como

$$\varepsilon_2 \geq \varepsilon_{2T}'' \quad \text{ó} \quad |\varepsilon_2| \geq \varepsilon_{2C}'' \quad (\text{D-5})$$

Y en la dirección de cortante máximo como

$$|\varepsilon_{12}| \geq \varepsilon_{12}'' \quad (\text{D-6})$$

b) Criterio de Máxima Tensión

Considera que el material falla cuando el material supera una cierta tensión límite en una zona determinada. Como en el anterior caso es un método simple y directo pero que no permite observar la interacción entre las tensiones en distintas direcciones.

En este criterio también se consideran tres condiciones de fallo. En la dirección de la fibra como

$$\sigma_1 \geq \sigma_{1T}'' \quad \text{ó} \quad |\sigma_1| \geq \sigma_{1C}'' \quad (\text{D-7})$$

En la dirección de la matriz como

$$\sigma_2 \geq \sigma_{2T}'' \quad \text{ó} \quad |\sigma_2| \geq \sigma_{2C}'' \quad (\text{D-8})$$

Y en la dirección de cortante máximo como

$$|\sigma_{12}| \geq \sigma_{12}'' \quad (\text{D-9})$$

c) Criterio de Hashin-Rotem

Hashin y Rotem (1973) proponen un criterio de fallo para laminados unidireccionales en tensión plana. Este criterio formulado en primer lugar para fallos a fatiga es extensivo a fallos estáticos o cuasi-estáticos.

Se consideren dos tipos de mecanismos de fallo: el de la fase refuerzo y el de la matriz. Se usan dos expresiones para identificar cada fallo considerando separadamente la tracción y la compresión.

Fallo de la fibra en tensión: ($\sigma_1 > 0$)

$$\sigma_1 = \sigma_{1T}'' \quad (\text{D-10})$$

Fallo de la fibra en compresión: ($\sigma_1 < 0$)

$$-\sigma_1 = \sigma_{1C}'' \quad (\text{D-11})$$

Fallo de la matriz en tensión: ($\sigma_2 > 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2T}''} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}''} \right)^2 = 1 \quad (\text{D-12})$$

Fallo de la matriz en compresión: ($\sigma_2 < 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2C}''}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}''}\right)^2 = 1 \quad (\text{D-13})$$

Dado que el criterio solo trata láminas unidireccionales no considera la interacción entre láminas ni el efecto de la deslaminación.

d) *Criterio de fallo de Hashin*

Hashin (1980) considera un nuevo criterio considerando tensiones tridimensionales. Igual que el anterior considera dos mecanismos de fallo (fibra y matriz) y distingue la tensión de la compresión. El criterio para tensiones espaciales puede ser particularizado para tensiones planas.

La formulación del criterio para tensiones en el espacio es la que se muestra a continuación. Para el fallo de la fibra a tensión: ($\sigma_1 > 0$)

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1T}''}\right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{(\sigma_{12}'')^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \sigma_1 = \sigma_{1T}'' \quad (\text{D-14})$$

Fallo de la fibra en compresión: ($\sigma_1 < 0$)

$$-\sigma_1 = \sigma_{1C}'' \quad (\text{D-15})$$

Fallo de la matriz a tensión: ($(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_{2T}''}\right)^2 + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_2\sigma_3}{(\sigma_{23}'')^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{(\sigma_{12}'')^2} = 1 \quad (\text{D-16})$$

Fallo de la matriz a compresión: ($(\sigma_2 + \sigma_3) < 0$)

$$\left[\left(\frac{\sigma_{2C}''}{2\sigma_{23}''}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_{2C}''} + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2\sigma_{23}''}\right)^2 + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_2\sigma_3}{(\sigma_{23}'')^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{(\sigma_{12}'')^2} = 1 \quad (\text{D-17})$$

La formulación simplificada del criterio para tensiones planas es la que se muestra a continuación. Para el fallo de la fibra a tracción: ($\sigma_1 > 0$)

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1T}''}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}''}\right)^2 = 1 \quad (\text{D-18})$$

Fallo de la fibra en compresión: ($\sigma_1 < 0$)

$$-\sigma_1 = \sigma_{1C}^u \quad (\text{D-19})$$

Fallo de la matriz a tensión: ($\sigma_2 > 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2T}^u}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^u}\right)^2 = 1 \quad (\text{D-20})$$

Fallo de la matriz a compresión: ($\sigma_2 < 0$)

$$\left[\left(\frac{\sigma_{2C}^u}{2\sigma_{23}^u}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_2}{\sigma_{2C}^u} + \left(\frac{\sigma_2}{2\sigma_{23}^u}\right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2}{(\sigma_{12}^u)^2} = 1 \quad (\text{D-21})$$

La principal diferencia de este criterio respecto el anterior de Hashin-Rotem consiste en la inclusión del efecto de la tensión cortante σ_{12} en la rotura a tensión de la fibra.

e) Puck failure criterion

Puck (1995, 1998) propuso para el estudio del fallo de los materiales compuestos cuatro criterios, uno para el modo de fallo considerado, para ser aplicado sobre láminas unidireccionales, considerando un estado de esfuerzos plano en una lámina plana. A pesar de la definición de más de un criterio de fallo, la superficie de fallo resultante sobre el espacio 3-D ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$) es cerrado y continuo, así como su derivada está en el espacio 2-D (σ_2, σ_{12}). De hecho, esto equivale a una aproximación cuadrática en el espacio de esfuerzos.

Se consideran dos tipos diferentes de fallo o fractura: *i)* Fractura de Inter.-Fibra (IFF), relacionado con la fractura de la matriz, y la Fractura de Fibra (FF), relacionado con la fractura de la fibra.

(i) Fractura Inter-Fibra (IFF)

Según Puck, el fallo de fibra (FF) causando el esfuerzo σ_1 no debería tener influencia sobre el modo de fractura IFF, porque este modo de fractura ocurre en un plano paralelo a la fibra. Asume que el fallo de IFF puede sólo ser conseguido por un estado de esfuerzo plano implicando un esfuerzo normal, σ_2 , en la dirección transversal de las fibras, y un esfuerzo a cortante, σ_{12} , actuando en el plano de la lámina. Según esto, tres modos diferentes de fallo de la matriz son considerados dependiendo de la combinación de esos esfuerzos. Estos tres modos difieren entre si en el ángulo entre el plano y la lámina de

rotura así como en el tipo de carga que causa la fractura, como puede verse en la siguiente figura.

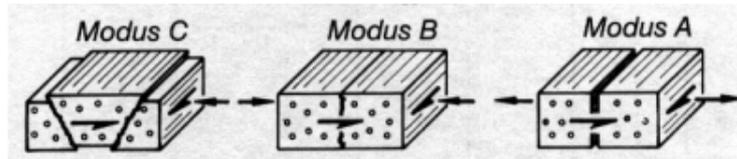


Figura D-4. Fractura Inter-Fibra modos A, B y C (de Puck , 1995)

Para el esfuerzo directo transversal de tracción, el modo A de fallo es el que aparece. Este modo de fractura es causado por esfuerzo directo de tracción, principalmente, y también, por esfuerzo cortante. Las fracturas se producen en la dirección del grosor y deberían abrirse o crecer a la vez de que la tensión transversal directa aumenta y por lo tanto, el módulo de Young efectivo disminuye. La expresión para éste modo es:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{12}^u}\right)^2 + \left(1 - p_{12}^{(+)} \frac{\sigma_{2T}^u}{\sigma_{12}^u}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2T}^u}\right)^2} + p_{12}^{(+)} \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}^u} = 1 \quad (\text{D-22})$$

donde $p_{12}^{(+)}$ es un parámetro para el ajuste de la curva con el fin de asegurar la continuidad de la curva de fallo en el espacio de esfuerzo biaxial (σ_2, σ_{12}) , así como su primera derivada.

Para esfuerzo directo transversal de compresión, los modos B y C de fallo Inter-fibra son los que tienen mayor posibilidad de ocurrir dependiendo de la relación entre el *ratio* esfuerzo directo transverso, σ_2 , sobre el esfuerzo cortante, σ_{12} , actuando sobre la lámina, y el *ratio* entre los parámetros σ_{23}^A y σ_{12}^c . La resistencia a la fractura del plano de fractura respecto a su fractura debido a la tensión cortante transversal-transversal, σ_{23}^A , puede ser calculado como:

$$\sigma_{23}^A = \frac{\sigma_{12}^u}{2p_{12}^{(-)}} \left(\sqrt{1 + 2p_{12}^{(-)} \frac{\sigma_{2C}^u}{\sigma_{12}^u}} - 1 \right) \quad (\text{D-23})$$

donde $p_{12}^{(-)}$ es un parámetro para la curva de ajuste. El parámetro σ_{12}^c equivale al esfuerzo cortante en el *punto de cambio*, entre el modo B y el modo C de la curva de fractura (σ_2, σ_{12}) y puede ser calculado como:

$$\sigma_{12}^c = \sigma_{12}^u \sqrt{1 + 2p_{23}^{(-)}} \quad (\text{D-24})$$

donde:

$$p_{23}^{(-)} = p_{12}^{(-)} \frac{\sigma_{23}^A}{\sigma_{12}^u} \quad (\text{D-25})$$

Como se mencionó anteriormente, el modo B de fallo es causado por un esfuerzo transversal de compresión y por un esfuerzo cortante. Las fracturas son en la dirección del grueso pero ellas no se abren o crecen así como el valor absoluto del esfuerzo directo transversal aumenta. Este tipo de fallo ocurre si la siguiente expresión se satisface:

$$0 \leq \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}} \right| \leq \frac{\sigma_{23}^A}{|\sigma_{12}^c|} \quad \frac{1}{\sigma_{12}^u} \left(\sqrt{\sigma_{12}^2 + (p_{12}^{(-)} \sigma_2)^2} + p_{12}^{(-)} \sigma_2 \right) = 1 \quad (\text{D-26})$$

Como el modo anterior, un esfuerzo directo transversal de compresión y un esfuerzo cortante causan el fallo de modo C, pero en este caso, un ángulo θ_{fp} entre el plano de fractura y el plano efectivo del esfuerzo aparece. Este tipo de fallo ocurre si las siguientes expresiones se satisfacen:

$$0 \leq \left| \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} \right| \leq \frac{|\sigma_{12}^c|}{\sigma_{23}^A} \quad \left[\left(\frac{\sigma_{12}}{2(1 + p_{23}^{(-)})\sigma_{12}^u} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2c}^u} \right)^2 \right] \frac{\sigma_{2c}^u}{(-\sigma_2)} = 1 \quad (\text{D-27})$$

y el ángulo de fractura θ_{fp} puede ser calculado como:

$$\cos(\theta_{fp}) = \sqrt{\frac{\sigma_{23}^A}{-\sigma_2}} \quad (\text{D-28})$$

Debido al efecto cuña del ángulo de fractura θ_{fp} , un aumento del esfuerzo directo transversal de compresión es asumido como la causa que aparezcan esfuerzos de desprendimiento entre las láminas rotas y las vecinas.

Como se mencionó anteriormente, la curva de fallo resultante sobre el espacio (σ_2, σ_{12}) 2-D está cerrada y es continua así como su derivada está entre los tres esfuerzos últimos determinados experimentalmente por σ_{2T}^u , σ_{2c}^u y σ_{12}^u .

En la siguiente figura se representa la superficie de fallo que define el criterio de fallo de Puck para esfuerzo plano. Los puntos **a**, **b**, **c** y **d** en la figura equivalen respectivamente a σ_{2T}^u , σ_{12}^u , σ_{12}^c y σ_{2c}^u .

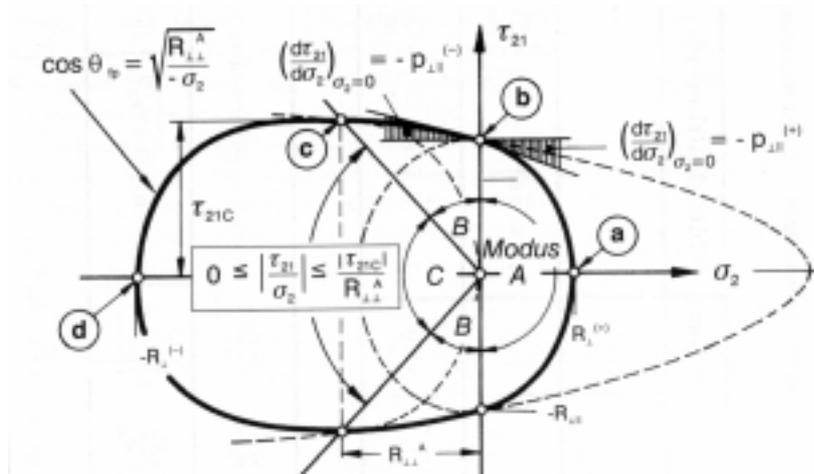


Figura D-5. Representación de la curva IFF de Puck en el (σ_2, τ_{21}) plano de esfuerzo (de Puck , 1995)

(ii) Fractura de Fibra (FF)

Para la fractura de fibra de una lámina unidireccional bajo carga combinada, Puck establece que la fractura de la fibra ocurre bajo la condición de esfuerzos uniaxiales. De este modo, el esfuerzo directo transversal, σ_2 , no afecta a la resistencia de la lámina en la dirección de las fibras, similar al criterio de esfuerzo máximo, y llevando a:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{1T/C}^u} = 1 \quad (D-29)$$

donde $\sigma_{1T/C}^u$ equivale al valor de la resistencia de la lámina en la fibra, (T) para carga de tracción y (C) de compresión. Como la deformación que lleva a la fractura bajo la condición de esfuerzo uniaxial puede ser también tomada como límite, una combinación de estos dos criterios se proponen como una buena aproximación:

$$\frac{1}{2} \left(\left| \frac{\sigma_1}{\sigma_{1T/C}^u} \right| + \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1T/C}^u} \right| \right) = 1 \quad (D-30)$$

donde $\varepsilon_{1T/C}^u$ es la resistencia de la lamina contra la deformación paralela de la fibra, (T) para deformación de tracción y (C) de compresión.

Entonces, considerando los cuatro criterios de fallo diferentes la superficie de fallo resultante propuesto por Puck es la mostrada en la figura D-6.

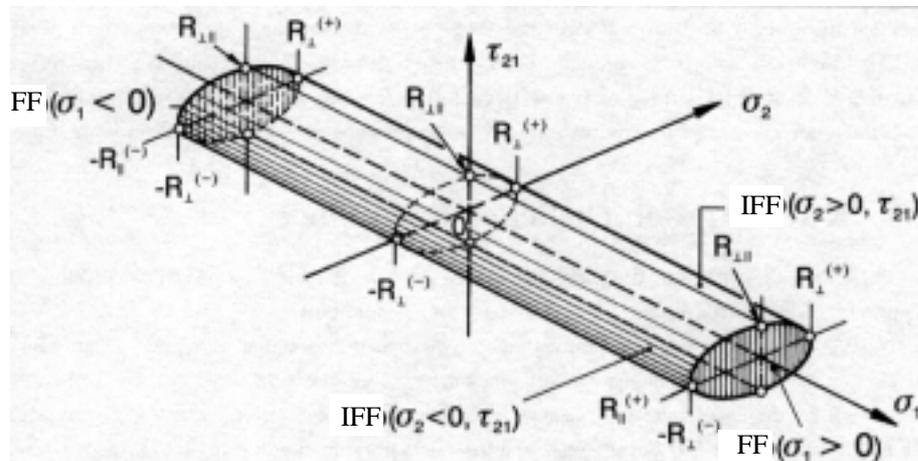


Figura D-6. Representación de la superficie de fallo de Puck (de Puck , 1995)

Para usar estos criterios de fallo sobre compuestos laminados algunas características experimentales del material tienen que determinarse previamente. Esto significa una cantidad considerable de trabajo experimental. El conjunto de experimentos del material tiene que ser llevados sobre especímenes de compuestos laminados unidireccionales sobre esfuerzos principales o resistencias del material. El valor de los parámetros $p_{12}^{(+)}$ y $p_{12}^{(-)}$ para la curva de ajuste deberían ser determinados por medio de experimentos biaxiales. Sin embargo, Puck sugiere el valor de 0,3 para $p_{12}^{(+)}$ y el valor de 0,2 para $p_{12}^{(-)}$ con el fin de evitar realizar estos experimentos biaxiales.

f) Criterio de Yamada-Sun

Los autores, Yamada y Sun (1978) proponen un criterio de fallo para láminas de compuesto en un laminado mediante la expresión:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{IT/C}^u} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{is}^u} \right)^2 = 1 \tag{D-31}$$

donde el término σ_{is}^u equivale a la resistencia a cortante in-situ de la lámina en el laminado. Los autores hicieron dos suposiciones básicas durante la formulación del criterio. La primera considera que el laminado falla cuando todas las láminas fallan con grietas a lo largo de la dirección de la fibra. Por lo tanto, de acuerdo con esta condición, la rigidez transversal de cada lámina, E_2 , así como el módulo de Poisson tiene que ser considerados nulos. En otras palabras, sólo el esfuerzo longitudinal, σ_1 , y el esfuerzo a cortante, σ_{12} , son considerados efectivos en mantener la carga aplicada. La segunda suposición considera que

la resistencia a cortante del laminado de capas cruzadas simétricas que tiene el mismo número de capas así como el compuesto laminado considerado es supuesto para representar la resistencia cortante substancialmente más alta de una lámina cuando está en un laminado. Los autores consideran que de esta manera el efecto de la laminación sería tenido en cuenta y se consigue representación más precisa de la resistencia de una lámina en un laminado. Se considera un laminado de capas cruzadas simétrico porque en la Teoría de Laminados Clásica un estado de cortante puro puede producirse fácilmente.

El punto más interesante de este criterio es el hecho de que los autores asumen comportamientos diferentes de la lámina en términos de resistencia de una lámina aislada o en un laminado. De hecho, consideran que la resistencia a cortante de un laminado es sobre dos o tres veces mayor que la resistencia a cortante de la lámina.

Como los mismos autores reconocen que este criterio no es aplicable en fallos transversales dominados por fibras. Sin embargo, consideran que en las aplicaciones prácticas la mayoría de los casos de fallo son dominados por los esfuerzos longitudinales y cortantes.

En un estudio separado, Sun *et al.* (1996) proponen una modificación del criterio muy similar a la propuesta por Kroll y Hufenbach (1997). Basado sobre resultados experimentales y en referencia a la fractura de la matriz en el caso 2-D, los autores proponen:

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2T/C}^u}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^u - \mu \cdot \sigma_2}\right)^2 = 1 \quad \mu \begin{cases} \mu_0 & \sigma_2 < 0 \\ 0 & \sigma_2 > 0 \end{cases} \quad (\text{D-32})$$

donde μ juega un rol similar al coeficiente de fricción.

g) Otros criterios de fallo combinado

Existen innumerables autores que han desarrollado sus propios criterios de fallo combinando las propiedades de la fase de refuerzo y de la matriz con los distintos estados tensionales que aparecen en un laminado. Entre ellos cabe destacar los criterios desarrollados por Christensen (1988 y 1997) basados en tensión plana considerando dos modos de fallo, los trabajos de Kopp y Michaeli (1996) que es similar al propuesto por Puck (1995), el criterio de Kroll y Hufenbach (1997) que combina el criterio de Hashin (1980) y de Puck (1995), la propuesta de Hart-Smith (1989), el trabajo de Feng (1991) que formulo un criterio general a través de los invariantes de un tensor de tensiones, el criterio de Yeh y Kim (1994) y el criterio formulado por Chandler, Campbell y Stone (1995).

D.4. Otras aproximaciones

Dado que la formulación de los criterios de fallo basados en variables macroestructurales no es una tarea sencilla y muchas veces no lleva a buenas predicciones se han desarrollado otro tipo de aproximaciones. Estas aproximaciones no son propiamente un criterio de fallo pero son una serie de reglas o métodos que pueden ser usados para el proceso de diseño en composites. A continuación se mencionan algunas de ellas.

(f) Aproximación Echabi-Trochu

Echabi y Trochu (1997) proponen crear una superficie de fallo para los compuestos usando la técnica del *kriging*. *Kriging* es una técnica estadística propuesta por Krige en 1951 para estimar el valor de una función a partir de un conjunto de medidas en ciertas localizaciones y una posterior derivación a través de ciertas direcciones.

El *kriging* permite generar superficies de fallo permitiendo la orientación de la forma de la superficie de fallo forzadas por las condiciones locales derivadas de la observación del comportamiento del compuesto bajo determinada combinación de cargas. Las formas de los términos son escogidas para encajar los resultados experimentales y los coeficientes se determinan a partir del conocimiento sobre el fallo del compuesto para el cual la superficie de fallo esté siendo considerada.

Este procedimiento puede ser visto más como un criterio de fallo basado en fenomenología que un criterio que tiene en cuenta los mecanismos de fallo en la generación de la superficie de fallo.

(g) Aproximaciones de Chang

Las aproximaciones de Chang incluyen tres propuestas de métodos distintos para tener en cuenta el fallo de los materiales compuestos.

Primer método

Chang y Chang (1987) definen una aproximación a través de un modelo de elementos finitos que incluye un criterio de fallo y un modelo de degradación. El criterio de fallo incluye la posibilidad de fisuración de la matriz, deslizamiento fibra-matriz y rotura de fibras. Estas dos últimas gobernados por el criterio de Yamada-Sun [16]. La posibilidad de tener un comportamiento no lineal es tenido en cuenta por medios de términos cúbicos en la relación esfuerzo-deformación que implica el parámetro experimental.

En referencia al modelo de degradación de propiedad, en el modo matriz todas las propiedades son reducidas a cero exceptuando E_1 cuyo valor es mantenido. Para la fibra

y/o la matriz-fibra comparten E_1 y G_{12} degenerándolos de acuerdo a una distribución de Weibull, mientras los otros dos parámetros son reducidos a cero.

El modelo implica varios parámetros cuya determinación no está completamente clara. Además, ninguna información relacionada con la evolución del daño con la carga es incluida. La simulación o modelización con elementos finitos para un problema de concentración de esfuerzos no esta tan completa como debería ser. Esto no debería afectar a la resistencia a tracción final pero afecta a la aparición del daño, muy importante en la concentración de esfuerzos.

Segundo método

Chang, Scott y Springer (1984) usan el criterio de fallo de Yamada-Sun (1978) para los modos de fallo de tracción o compresión. El comportamiento no lineal es tenido en cuenta por medios del criterio de fallo de energía de deformación de Sandhu (1974), el cual es incorporado al criterio de Yamada-Sun en el término de cortante.

Aunque el criterio de Yamada-Sun [16] fue formulado para laminados de capas cruzadas y los autores especificaron claramente el valor in-situ de la resistencia a cortante, Chang-Scott-Springer usan este criterio para cualquier tipo de secuencia de apilamiento y la resistencia cortante del criterio ha sido referenciada como la resistencia a cortante del laminado.

Tercer Método

Shahid y Chang (1993 y 1995) formulan un modelo constitutivo y una predicción acumulativa de daño para laminados bajo cargas biaxiales. El modelado constitutivo incluye el fallo de agrietamiento de la matriz, el fallo de cortante de la fibra-matriz y la rotura de las fibras. Los valores de las propiedades del material a un determinado valor de la carga aplicada son asumidos para ser una función de una función de densidad de grietas, cuyo valor de saturación es definido como el único en el cual el rango de la resistencia efectiva con respecto a la densidad de grietas se vuelve pequeño. El modelo de degradación propuesto, implica varios parámetros de materiales de difícil determinación experimental.

El criterio de fallo empleado esta basado en el criterio de Hashin (1980) pero considerando tres mecanismo de fallo; el fallo de agrietamiento de a matriz, el fallo por cortante fuera del plano matriz-fibra y la rotura de fibras. Exceptuando la resistencia en la dirección de la fibra, el resto de las propiedades implicadas son asumidas para ser dependientes de la función de densidad de las grietas.

Este modelo está implementado en un código de elementos finitos y las predicciones numéricas son comparadas con otros resultados experimentales de autores con un buen ajuste. Esto representa un enfoque completo en el cual los únicos aspectos no incluidos son que ningún criterio es propuesto para el estado de esfuerzo a compresión y no se hace

ninguna mención de los efectos de los esfuerzos interlaminares. Los autores mencionan que los efectos de arista no incluidos llevan a una posible sobreestimación de las resistencias de los laminados, dependiendo de si la secuencia de apilamiento afecta o no a estos efectos de arista.

D.5. Criterio de fallo por energía de deformación

Algunos criterios de fallo han sido formulados basándose en la energía de deformación total de la lámina bajo carga cuando esta lámina falla. Sandhu (1974) desarrolló un criterio de energía de deformación total no lineal. Este criterio está basado en el concepto de que la lámina falla cuando la suma de los ratios de niveles de energía debido a la carga longitudinal, transversal y a cortante correspondientes a las energías máximas es igual a la unidad. Un criterio de fallo similar lo introdujeron Abu-Farsakh y Abdel-Jawad (1994) basándose en un concepto de energía. Sin embargo, los modos de fallo pueden ser identificados por cada criterio lo que los hace no muy apropiados para ser usados en el modelado de degradación del material y en el enfoque de propagación del fallo.

D.6. Criterio de fallo asociado al fallo del laminado

El estudio del fallo de un laminado completo es difícil. Sin embargo, es necesario recordar algunos hechos o ideas con el fin de comprender el comportamiento completo de los composites. Según París (2000), es cuestionable si es razonable considerar el diseño del laminado sin tener aclarado las condiciones bajo las cuales la lámina falla. Por otro lado algo tiene que decirse sobre el comportamiento y la predicción de fallo de un laminado.

Se necesita un conocimiento correcto del estado de esfuerzos en la lámina situada en el laminado cuando aparece algún fallo. Como la lámina está sujeta a un nuevo estado de esfuerzo tiene que ser clarificado si son aplicables los mismos mecanismos de fallo laminar o pueden aparecer de nuevos. La inclusión de la deslaminación en los mecanismos de fallo es obvia pero no está claro como hacerlo, si hacerlo en términos de esfuerzos, lo que sería lo más fácil, o considerando parámetros relacionados con la Teoría de la Mecánica de la Fractura, lo que estaría conforme con las evidencias físicas. También tiene que ser considerado si el enfoque basado en mecanismos de daño progresivo con reducción del valor de las propiedades del material es adecuado o no. Sin embargo, la naturaleza del material justifica que si el procedimiento de degradación debe ser parcial o total.

La otra posibilidad es considerar un criterio de fallo de laminado directamente, lo que es realizado por medio del conocimiento de los mecanismos de fallo de cada lámina. La idea es extrapolar el rol de la micromecánica para estimar el fallo de la lámina hacia el siguiente

paso, de este modo estimar valores deducibles de laminado desde valores deducibles de la lámina.

D.7. Uniones atornilladas mecánicas en materiales compuestos

En el análisis del fallo de uniones mecánicas atornilladas en materiales compuestos existen aproximaciones o métodos específicos que son utilizados para su diseño. En una unión atornillada aparecen nuevos modos de rotura. Los más importantes que pueden aparecer en son la rotura por tensión, la rotura por cortante fuera del plano de la lamina y por aplastamiento.

Un número enorme de publicaciones técnicas y científicas ilustran la importancia del cálculo de este tipo de uniones. Una buena revisión de los métodos de cálculo de fallo de uniones es la realizada por Camanho y Matthews (1997).

Un primer método usado es el estudio de la distribución de tensiones alrededor de los agujeros de las juntas. Este método permite conocer la tensión local máxima que se utiliza para prever la resistencia del laminado. Estos métodos suelen ofrecer resultados conservadores ya que no tienen en cuenta la redistribución de esfuerzos que aparecen debido a fenómenos de daño locales alrededor del agujero.

Una forma alternativa más acorde con el comportamiento real es el método de los dos parámetros. Estos métodos consideran la resistencia a tracción admisible y una dimensión característica como los dos parámetros. Esta dimensión determina la son de relajación de tensiones que aparece alrededor de la discontinuidad que produce la junta. Se han propuesto dos tipos de métodos, el de la tensión puntual (*point stress method*) y el de la tensión media (*average stress method*). El método del *point stress* asume que el fallo aparece cuando la tensión máxima en la dirección de la fibra a cierta distancia crítica del agujero supera la resistencia del material sin discontinuidad. En el método del *average stress* el fallo se considera cuando la tensión media a lo largo de una distancia crítica supera a la resistencia del material sin discontinuidad. Estas distancias críticas son consideradas una propiedad más del material, que al igual que la resistencia, es una propiedad dependiente de la distribución de refuerzo, del tipo de discontinuidad y del estado de carga.

Existen muchos otros métodos y combinaciones de ellos. Por ejemplo, el uso de métodos basados en mecánica de fractura, métodos de daño progresivo y otros que son simples adaptaciones o modificaciones para un caso especial de los criterios de fallo comentados con anterioridad.

D.8. Referencias

París, F., "On Failure Criteria of Fibrous Composite Materials", NASA Report (to appear).

- Nahas, M.N., "Survey of Failure and Post-Failure Theories of Laminated Fiber-Reinforced Composites", *J. Composites Technology & Research*, v. 8, 1986, pp. 138-153.
- Reifsneider, K.L., "Durability and Damage Tolerance of Fibrous Composite Systems", in *Handbook of Composites 2nd ed.*, by S.T. Peters, Chapman & Hall, 1998.
- Sleight, D.W., "Progressive Failure Analysis Methodology for Laminated Composite Structures", NASA/TP-1999-209107, 1999.
- Tsai, S.W. & Wu, E.M., "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials", *J. Composite Materials*, v. 5, 1971, pp. 58-80.
- Tsai, S.W., "Strength Characteristics of Composite Materials", NASA CR-224, 1965.
- Hill, R., "A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals", *Proc. Royal Society of London, Series A*, v. 193, 1948, pp. 281-297.
- Azzi, V.D. & Tsai, S.W., "Anisotropic Strength of Composites", *Experimental Mechanics*, September 1965, pp. 283-288.
- Hoffman, O., "The Brittle Strength of Orthotropic Materials", *J. Composite Materials*, v. 1, 1967, pp. 200-206.
- Chamis, C.C., "Failure Criteria for Filamentary Composites", *Composite Materials: Testing and Design*, STP 460, ASTM, Philadelphia, 1969, pp. 336-351.
- Sun, C.T., Quinn, B.J., Tao, J. and Oplinger, D.W., "Comparative Evaluation of Failure Analysis Methods for Composite Laminates", NASA, DOT/FAA/AR-95/109, 1996.
- Hashin, Z. & Rotem, A., "A Fatigue Failure Criterion for Fibre Reinforced Materials", *J. Composite Materials*, v. 7, 1973, pp. 448-464.
- Hashin, Z., "Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites", *J. Applied Mechanics*, v. 47, 1980, pp. 329-334.
- Puck, A., "Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten, Modelle für die Praxis", Hanser, 1995.
- Puck, A., Schürmann, H., "Failure Analysis of FRP Laminates by Means of Physically Based Phenomenological Models", *Composites Science & Technology*, v. 58, 1998, pp. 1045-1067.
- Yamada, S.E., Sun, C.T., "Analysis of Laminate Strength and its Distribution", *J. Composite Materials*, v. 12, 1978, pp. 275-284.
- Christensen, R.M., "Tensor Transformation and Failure Criteria for the Analysis of Fiber Composite Materials", *J. Composite Materials*, v. 22, 1988, pp. 874-897.
- Christensen, R.M., "Stress Based Yield/Failure Criteria for Fiber Composites", *Int. J. Solids & Structures*, v. 34, n. 5, 1997, pp. 529-543.
- Kopp, J. & Michaeli, W., "Dimensioning of Thick Laminates using New IFF Strength Criteria and some Experiments for their Verification", *Proc. ESA ESTEC Conf.*, 1996, pp. 305-312.
- Kroll, L. & Hufenbach, W., "Physically Based Failure Criterion for Dimensioning of Thick-Walled Laminates", *Applied Composite Materials*, v. 4, 1997, pp. 321-332.
- Hart-Smith, L.J., "A New Approach to Fibrous Composite Laminate Strength Prediction", NASA-CP3087, part 2, 1989, pp. 663-693.

- Feng, W.W., "A Failure Criterion for Composite Materials", *J. Composite Materials*, v. 25, 1991, pp. 88-100.
- Yeh, H. & Kim, C.H., "The Yeh-Stratton Criterion for Composite Materials", *J. Composite Materials*, v. 28, 1994, pp. 926-939.
- Chandler, H.D., Campbell, I.M. and Stone, A., "An Assessment of Failure Criteria for Fibre Reinforced Composite Materials", *Int. J. Fatigue*, v. 17, n. 7, 1995, pp. 513-518.
- Echabi, J. & Trochu, F., "Failure Mode Dependent Strength Criteria for Composite Laminates", *J. Reinforced Plastics & Composites*, v. 16, n. 10, 1997, pp. 926-945.
- Chang, F.K. & Chang, K.Y., "A Progressive Damage Model for Laminated Composites Containing Stress Concentrations", *J. Composite Materials*, v. 21, 1987, pp. 834-855.
- Chang, F.K., Scott, R.A. and Springer, G.S., "Failure of Composite Laminates Containing Pin Loaded Holes - Method of Solution", *J. Composite Materials*, v. 18, 1984, pp. 255-278.
- Chang, F.K., Scott, R.A. and Springer, G.S., "Failure Strength of Non-Linearly Elastic Composite Laminates Containing a Pin Loaded Hole", *J. Composite Materials*, v. 18, 1984, pp. 464-477.
- Shahid, I. & Chang, F.K., "Failure and Strength of Laminated Composite Plates under Multiple In-Plane Loads", *Proc. 38 Int. SAMPE Conf.*, n. 1, 1993, pp. 967-977.
- Shahid, I. & Chang, F.K., "An Accumulative Damage Model for Tensile and Shear Failures of Laminated Composite Plates", *J. Composite Materials*, v. 29, n. 7, 1995, pp. 926-981.
- Sandhu, R.S., "Non-Linear Behaviour of Unidirectional and Angle Ply Laminates", *AIAA J. Aircraft*, v. 13, 1974, pp. 104-111.
- Abu-Farsakh, G.A. & Abdel-Jawad, Y.A., "A New Failure Criterion for Non-Linear Composite Materials", *J. Composites Technology & Research*, v. 16, n. 2, 1994, pp. 138-145.
- Camanho, P.P. & Matthews, F.L., "Stress Analysis and Strength Prediction of Mechanically Fastened Joints in FRP: a Review", *Composites Part A*, v. 28 A, 1997, pp. 529-547.