

2 ANÁLISIS DE CIRCUITOS NO LINEALES DISTRIBUIDOS MEDIANTE TÉCNICAS DE TIEMPO DISCRETO

Una vez expuestas las distintas alternativas para analizar circuitos no lineales, nos centraremos en la determinación directa del régimen permanente (RP) trabajando exclusivamente en el dominio temporal. A causa de la utilización de técnicas de tiempo discreto, y a que las discretizaciones forman parte de la familia de Gear, al método de análisis descrito en este capítulo lo denominaremos DTA–Gear¹.

El objetivo final es, partiendo de un sistema de ecuaciones diferencial con diferencias no lineal, obtener un sistema de ecuaciones algebraico no lineal, preferible al primero al ser más sencillo determinar su solución. Las variables de este sistema de ecuaciones son las muestras de las variables de control que aparecen en el circuito, más el periodo de oscilación en el caso de circuitos autónomos.

La resolución de un sistema de ecuaciones no lineal pasa por la utilización de algoritmos iterativos que converjan hacia una solución. Así, la validez de un método de análisis va ligada a su fácil implementación usando algoritmos iterativos. Modificaciones globalmente convergentes del método de Newton son ampliamente utilizadas por su buen rendimiento². En este sentido, el conocimiento del Jacobiano del sistema de ecuaciones aumenta la

¹ Acrónimo del anglicismo *Discrete Time Approach*.

² Prueba de ello es su implementación en las librerías de *software* comercial

eficacia del método de resolución. La formulación obtenida por el método propuesto en este capítulo permite calcular, de forma analítica, el cálculo de las sensibilidades del sistema de ecuaciones respecto a las variables que intervienen en él, cumpliendo con ello uno de los requerimientos que elevan la bondad de un método.

La descripción del método DTA–Gear sigue el siguiente orden. Como paso previo se realiza la extracción de todas las fuentes independientes y de las alinealidades que aparecen en el circuito. A continuación se describe la posible transformación de cada una de las alinealidades en la combinación de un elemento lineal y una fuente controlada no lineal. Los elementos lineales se reincorporan al circuito, obteniéndose un multipuerto en el cual actúan como excitaciones las fuentes independientes y las fuentes controladas no lineales obtenidas anteriormente. Tras estas transformaciones, se está en condiciones de escribir un sistema de ecuaciones que, únicamente por comodidad, se plantea en el dominio transformado de Laplace, en el cual cada variable de control de las alinealidades puede ser vista como una combinación lineal de las excitaciones del multipuerto. La descomposición de las funciones de red que intervienen en este sistema de ecuaciones permite obtener un nuevo sistema de ecuaciones en el cual las excitaciones, las fuentes controladas no lineales y sus variables de control están multiplicadas por un polinomio bivariado en s y $e^{-s\tau}$, siendo τ el retardo en una línea de transmisión³.

Alcanzado este punto del desarrollo, la aplicación de la transformada inversa de Laplace permite obtener un sistema de ecuaciones en el dominio temporal. Cabe remarcar que ésta es la única transformación entre dominios que se realiza en todo el proceso de cálculo. La discretización de cada una de las ecuaciones que forman este sistema permite obtener un sistema de ecuaciones algebraico en el que intervienen las muestras de las excitaciones (conocidas), las variables de control (desconocidas) y las fuentes controladas (que se obtienen a partir de las variables de control). El modo en que se realiza esta discretización para el operador derivada (método de Gear) y el operador retardo (interpolación) se describe con detalle, pues en ella está la clave para el posterior cálculo del Jacobiano del

³ En circuitos en los que existan K retardos distintos, incommensurables entre ellos, aparece un polinomio multivariado en s y $e^{-s\tau_k}$ con $k=\{1 \dots K\}$

sistema de ecuaciones. Una vez realizada la discretización se considera la periodicidad de la solución. Así, se transforma lo que hasta este momento podría derivar en un método de integración en un método directo de cálculo del RP. Como resultado global de la discretización y la consideración de periodicidad se obtiene un sistema de ecuaciones algebraico no lineal en el cual intervienen unas pocas matrices: una para cada uno de los posibles retardos que aparecen en el circuito y otra para el operador derivada.

La formulación matricial del problema es de fácil lectura, permitiendo el cálculo de la sensibilidad del sistema de ecuaciones respecto a las muestras de las variables de control, el periodo de oscilación (para circuitos autónomos) y los elementos del circuito (para la resolución de problemas de optimización).

El método es extendido para contemplar circuitos con alinealidades dinámicas y estáticas con dos variables de control. Esta extensión permite realizar un estudio comparativo sobre el oscilador de Van der Pol, al tiempo que se contrastan los resultados de simulación con los resultados teóricos referentes al error introducido en la discretización del sistema de ecuaciones.

Finalmente, el método se utiliza para determinar el RP del circuito de Chua retardado (TDCC). Este circuito, ejemplo paradigmático del tipo de circuito al que se refiere el método propuesto DTA–Gear, servirá como hilo conductor a lo largo de toda la tesis para ilustrar los desarrollos realizados.

2.1 Modelación circuital de las alinealidades

Como se ha expuesto anteriormente, la obtención del sistema de ecuaciones que caracteriza el circuito a analizar requiere de: *a)* una previa extracción de las excitaciones y las alinealidades presentes en el circuito y *b)* la modelación de cada una de las alinealidades usando un elemento lineal y una fuente controlada no lineal.

2.1.1 Extracción de las fuentes independientes y las alinealidades

Con el propósito de aplicar posteriormente el principio de superposición, se realiza la extracción de todas las fuentes independientes que aparecen en el circuito y de todos los bipolos no lineales. Con ello se obtiene un multipuerto lineal (de parámetros distribuidos). En la Fig. 2. 1 se ilustra el resultado de la extracción aplicada a un circuito con una fuente independiente, una alinealidad y una línea de transmisión, apareciendo como resultado de la extracción un bipuerto lineal. Con el único fin de enfatizar el hecho que el método engloba los circuitos con líneas de transmisión, se realiza la extracción de la línea de transmisión del bipuerto lineal, apareciendo un multipuerto lineal de parámetros concentrados.

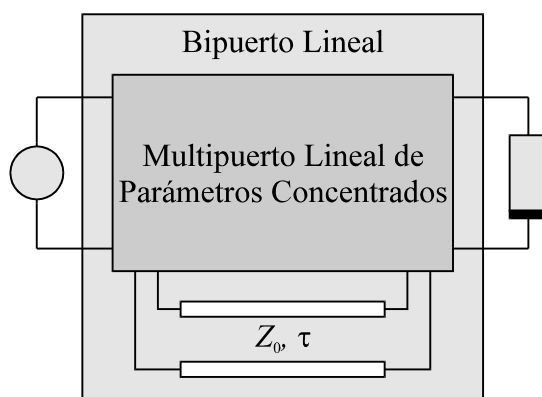


Fig. 2. 1. Extracción de las excitaciones y las alinealidades.

Nótese que ninguna de estas extracciones ha modificado el sistema de ecuaciones que caracteriza el circuito. Tan sólo se ha hecho una redistribución de los elementos que lo configuran para facilitar la obtención del sistema de ecuaciones que se realizará en el capítulo 2.2.

2.1.2 Representación circuital de las alinealidades

Una vez extraídos los bipolos no lineales, cabe proceder a su representación mediante la combinación de un elemento lineal y una fuente controlada no lineal. Con el fin de generalizar esta representación, se realiza el estudio de los distintos tipos de bipolo no lineal.

Conductancia no lineal controlada por tensión

Este elemento viene caracterizado por la relación no lineal

$$i = g(v), \quad (2.1)$$

que puede ser expresada de la forma

$$i = G_0 v + f(v), \quad (2.2)$$

previa definición de

$$f(v) = g(v) - G_0 v. \quad (2.3)$$

Esta expresión admite el modelo circuital ilustrado en la Fig. 2. 2 en el que interviene una conductancia lineal en paralelo con una fuente de corriente controlada por tensión. La variable que controla esta fuente de corriente se denomina variable de control (VC).

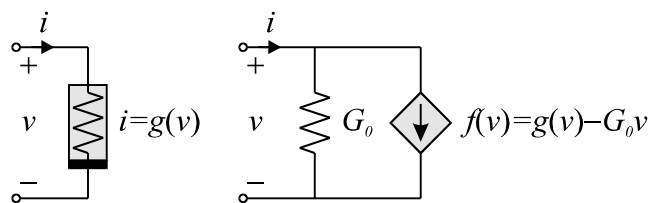


Fig. 2. 2. Modelo circuital de una conductancia no lineal controlada por tensión.

Nótese que la elección del valor del parámetro G_0 es arbitraria y por tanto se puede modelar la alinealidad simplemente con una fuente controlada. Si bien el valor del elemento lineal se puede escoger de modo que facilite la convergencia de determinados métodos basados en algoritmos de relajación o en la iteración de Picard [Fre-92], al utilizar

algoritmos de resolución más robustos, basados en el método de Newton, se puede prescindir del elemento lineal.

Resistencia no lineal controlada por tensión

Este elemento viene caracterizado por la relación no lineal

$$v = r(i), \quad (2.4)$$

que puede ser expresada de la forma

$$v = R_0 i + f(i), \quad (2.5)$$

previa definición de

$$f(i) = r(i) - R_0 i. \quad (2.6)$$

Esta expresión admite el modelo circuital ilustrado en la Fig. 2. 3 en el que interviene una resistencia lineal en serie con una fuente de tensión controlada por corriente.

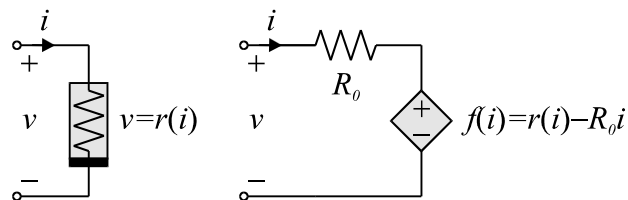


Fig. 2. 3. Modelo circuital de una resistencia no lineal controlada por corriente.

Como en el caso anterior, la elección del valor del parámetro R_0 sigue siendo arbitraria. Obsérvese que los resultados obtenidos se pueden derivar a partir de los anteriores sin más que hacer uso del concepto de dualidad [Chu-97].

Condensador no lineal controlado por tensión

A los elementos no lineales con característica dinámica se les puede realizar una descomposición similar a la llevada a cabo sobre los elementos lineales con característica estática vistos hasta el momento. Para el caso de un condensador no lineal controlado por tensión, la característica

$$i = C(v)\dot{v}, \quad (2.7)$$

puede ser descompuesta en

$$i = C_0\dot{v} + g(v)\dot{v}, \quad (2.8)$$

definiendo

$$g(v) = C(v) - C_0, \quad (2.9)$$

Dado que habitualmente la expresión conocida es $q(v)$, es posible expresar $C(v)$ como

$$C(v) = \frac{d}{dv}(q(v)). \quad (2.10)$$

La ecuación (2.8) admite un modelo circuital formado por un condensador lineal C_0 en paralelo con una fuente controlada. Nótese que la fuente controlada depende de la VC, v , y de su derivada. Así, siempre es posible escribir

$$f(v, \dot{v}) = g(v)\dot{v}. \quad (2.11)$$

En adelante, cuando se hable de alinealidad dinámica se asumirá que esta admite una descomposición como la indicada en (2.11): el producto de una alinealidad estática y la derivada de la VC⁴. El modelo circuital correspondiente a la descomposición indicada en (2.8), con la formulación (2.11), se ilustra en la Fig. 2.4.

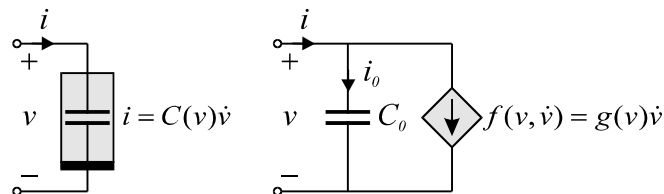


Fig. 2.4. Modelo circuital de un condensador no lineal controlado por tensión. Formulación con alinealidad dinámica.

⁴ En la representación circuital del resto de alinealidades que queda por desarrollar se comprobará que siempre es posible realizar esta descomposición. Así, no existe pérdida de generalidad al relacionar unívocamente alinealidad dinámica con (2.11).

Una alternativa a la utilización de (2. 11) aparece al introducir una nueva variable de control. Así, es posible calcular la derivada de la VC en función de la corriente i_0 que circula por el condensador C_0 mediante la relación

$$\dot{v} = \frac{i_0}{C_0}, \quad (2. 12)$$

convirtiéndose i_0 en una nueva VC. Utilizando la ecuación anterior, podemos reescribir (2. 11) como una alinealidad estática controlada por dos VC:

$$f(v, i_0) = g(v)i_0. \quad (2. 13)$$

La utilización de la formulación (2. 13), y sin ánimos de avanzar resultados, aumentará el número de variables a determinar una vez discretizado el sistema de ecuaciones que caracteriza el circuito, con el consiguiente aumento del tiempo de cálculo y de las dificultades de convergencia del algoritmo iterativo de resolución. Para evitar este inconveniente es posible utilizar (2. 11), aproximando el valor de la derivada de la VC a partir de las muestras de la misma VC. Aunque se puede pensar que con ello se está reduciendo la exactitud de la solución, el error que se introduce es del mismo orden que el que aparece al discretizar el sistema de ecuaciones. El modelo circuital correspondiente a la descomposición indicada en (2. 8), con la formulación (2. 13) se ilustra en la Fig. 2. 5.

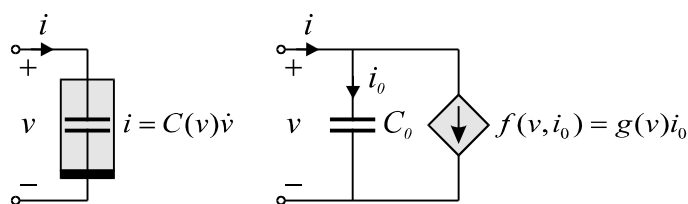


Fig. 2. 5. Modelo circuital de un condensador no lineal controlado por tensión. Formulación con alinealidad controlada por dos VC.

Un último paso en el razonamiento realizado hasta el momento nos lleva a advertir que es posible evitar el uso de los dos tipos de alinealidad anteriores (dinámica y estática con dos VC) trabajando con la derivada de una alinealidad estática. Efectivamente, definiendo

$$g(v) = \frac{d}{dv}(h(v)), \quad (2.14)$$

reescribimos (2.11) como

$$f(v, \dot{v}) = \frac{d}{dv}(h(v))\dot{v} \longrightarrow f(v) = \frac{d}{dt}(h(v)). \quad (2.15)$$

Así, en el sistema de ecuaciones se introducirá el término de la derecha de (2.15), sin llegarse a calcular su derivada de forma analítica. Esta derivada se realizará al discretizar el sistema de ecuaciones a partir de las muestras de $h(v)$, de forma similar a como en (2.11) se calcula la derivada de la VC a partir de sus muestras. En el capítulo 2.5 se estudiará el error introducido al utilizar cada una de estas formulaciones. Este estudio teórico se completará en el capítulo 2.6 con resultados experimentales al analizar el oscilador de Van der Pol con las formulaciones (2.11), (2.13) y (2.15).

El modelo circuital correspondiente a la descomposición indicada en (2.8), con la formulación (2.15), y su equivalente en el dominio transformada de Laplace, se ilustra en la Fig. 2.6.

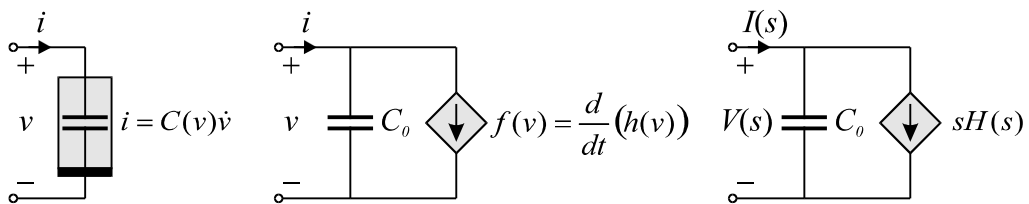


Fig. 2.6. Modelo circuital de un condensador no lineal controlado por tensión. Formulación con alinealidad estática y su circuito transformado de Laplace.

Condensador no lineal controlado por carga

La relación constitutiva de un condensador no lineal controlado por carga

$$v = v(q), \tag{2.16}$$

puede ser expresada de la forma

$$v = \frac{1}{C_0} q + \left[v(q) - \frac{1}{C_0} q \right]. \tag{2.17}$$

Esta relación admite una representación circuital mediante la conexión serie de un condensador lineal de capacidad C_0 y una fuente de tensión controlada por la variable q . Puesto que es habitual analizar un circuito haciendo uso de las variables de circuito tensión y corriente, es preciso expresar q en función de la tensión en terminales de C_0 como

$$q = C_0 v_0. \tag{2.18}$$

Así, definiendo la fuente controlada de tensión en función de la VC, v_0 ,

$$f(v_0) = v(C_0 v_0) - v_0, \tag{2.19}$$

se obtiene el modelo circuital representado en la Fig. 2. 7.

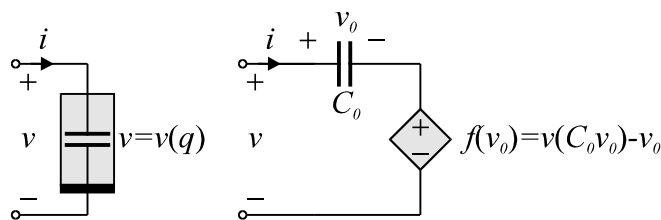


Fig. 2. 7. Modelo circuital de un condensador no lineal controlado por carga.

Nótese que si queremos evitar trabajar con la variable q es necesario introducir el condensador lineal C_0 . Así, en el caso de un condensador no lineal controlado por carga es forzoso introducir el elemento lineal, a diferencia de los casos estudiados hasta el momento.

Inductor no lineal controlado por corriente

La utilización del concepto de dualidad permite obtener directamente la representación circuital para inductores con característica no lineal a partir de la representación obtenida para condensadores con característica no lineal. Así, el inductor no lineal controlado por corriente y el condensador no lineal controlado por tensión son elementos duales. También son duales la corriente y la tensión, la carga eléctrica y el flujo magnético, el inductor y el condensador, y las configuraciones serie y paralelo. Con estas consideraciones es inmediato realizar el siguiente desarrollo. Partiendo de la relación constitutiva

$$v = L(i)\dot{i}, \quad (2.20)$$

ésta se puede descomponer en

$$v = L_0\dot{i} + g(i)\dot{i}, \quad (2.21)$$

definiendo

$$g(i) = L(i) - L_0, \quad (2.22)$$

Dado que habitualmente la expresión conocida es $\phi(i)$, siempre es posible expresar $L(i)$ en función de ésta como

$$L(i) = \frac{d}{di}(\phi(i)). \quad (2.23)$$

Nótese que la fuente controlada, con la que es posible modelar (2.21), depende de la VC, i , y de su derivada. Así, siempre es posible escribir

$$f(i, \dot{i}) = g(i)\dot{i}. \quad (2.24)$$

También en este caso es posible trabajar con dos VC. No obstante, por la simplicidad que ello entraña, en esta tesis será habitual trabajar con la derivada de una alinealidad estática.

Así, definiendo

$$g(i) = \frac{d}{di}(h(i)), \quad (2.25)$$

reescribimos (2.24) como

$$f(i, i) = \frac{d}{di}(h(i))i \longrightarrow f(i) = \frac{d}{dt}(h(i)). \quad (2.26)$$

El modelo circuital correspondiente a la descomposición indicada en (2.21), con la formulación (2.26), y su equivalente en el dominio transformada de Laplace, se ilustra en la Fig. 2.8.

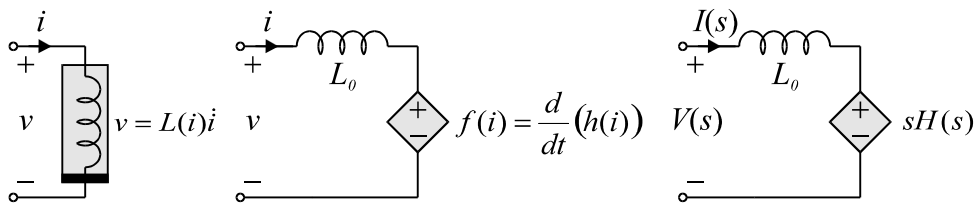


Fig. 2.8. Modelo circuital de un inductor no lineal controlado por corriente. Formulación con alinealidad estática y su circuito transformado de Laplace.

Inductor no lineal controlado por flujo

Este elemento y el condensador no lineal controlado por carga son duales. Así, es posible realizar un desarrollo paralelo al realizado al estudiar éste partiendo de la relación constitutiva

$$i = i(\phi), \quad (2.27)$$

la cual puede ser expresada de la forma

$$i = \frac{1}{L_0}\phi + \left[i(\phi) - \frac{1}{L_0}\phi \right]. \quad (2.28)$$

Por los mismos argumentos a los que se ha hecho referencia al derivar el modelo circuital de un condensador no lineal controlado por carga, es preciso expresar ϕ en función de la corriente que circula por L_0 como

$$\phi = L_0 i_0. \quad (2. 29)$$

Así, definiendo la fuente de corriente controlada por la VC i_0 del modo

$$f(i_0) = i(L_0 i_0) - i_0, \quad (2. 30)$$

se obtiene el modelo circuital representado en la Fig. 2. 9.

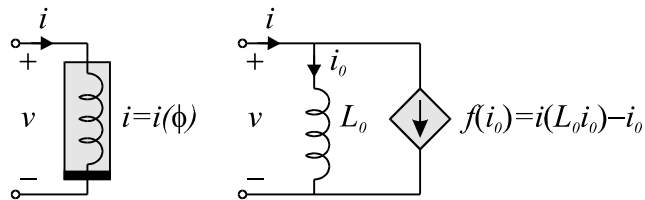


Fig. 2. 9. Modelo circuital de un inductor no lineal controlado por flujo.

Sumario

Los elementos no lineales estudiados en este capítulo son suficientes para modelar una clase importante de dispositivos. En aquellos circuitos en que aparezca otro tipo de alinealidad será necesario extender las ideas aquí presentadas, especialmente en lo que hace referencia a la representación de una alinealidad dinámica como derivada de una alinealidad estática. En determinadas ocasiones el bipolo no lineal presente en el circuito está compuesto por varias alinealidades. En esta situación, puede resultar altamente eficaz modelar el bipolo no lineal equivalente y no cada una de las alinealidades que lo forman⁵.

Recordemos que hasta el momento se ha realizado la extracción de las fuentes independientes y las alinealidades del circuito. Éstas se han modelado mediante una fuente controlada no lineal, y un elemento lineal del cual se puede prescindir en algunos casos. Este elemento lineal, caso de existir, debe ser reincorporado al circuito, de modo que se obtiene un multipuerto lineal de parámetros distribuidos en el que actúan como excitaciones las propias fuentes independientes y las fuentes controladas no lineales. En la Fig. 2. 10 se ilustra el resultado de substituir la alinealidad de la Fig. 2. 1 por su modelo circuital, y reincorporar el elemento lineal al circuito. Tras esta última reordenación del circuito se está en condiciones de obtener las ecuaciones de equilibrio que lo caracterizan, objetivo que se aborda a continuación.

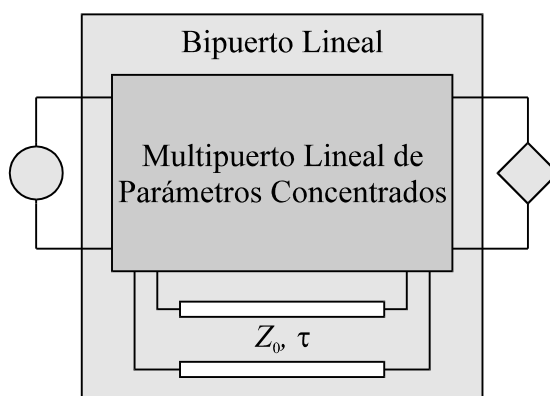


Fig. 2. 10. Modelación circuital de la alinealidad de la Fig. 2. 1 y reincorporación del elemento lineal al circuito.

2.2 Formulación del sistema de ecuaciones discretizado

La reconfiguración del circuito realizada previamente nos permite avanzar en nuestro objetivo. El primer eslabón consiste en plantear las ecuaciones de equilibrio que caracterizan el circuito en el dominio temporal. A continuación, se realiza la discretización de estas ecuaciones. Se describe con detalle la técnica utilizada para discretizar las ecuaciones de equilibrio, tanto para el operador derivada como para el operador retardo. Con la discretización de las ecuaciones de equilibrio, se obtiene una formulación que podría ser usada para, partiendo de unas condiciones iniciales, calcular el transitorio usando métodos de integración. Puesto que nuestro objetivo es determinar el RP de forma directa, se considera la periodicidad de la solución. Ello nos conduce a reformular el problema en forma matricial, alcanzándose uno de los objetivos de este capítulo: la obtención de un sistema de ecuaciones algebraico no lineal.

2.2.1 Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio

Con el objetivo de facilitar la exposición del método, se tratará un caso simplificado de circuito, con tan sólo una excitación, una línea de transmisión y una alinealidad controlada por una VC. En la Fig. 2. 11 se ilustra este circuito simplificado.

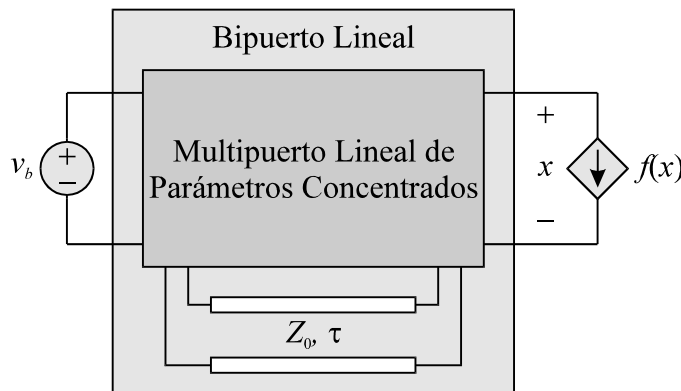


Fig. 2. 11. Circuito simplificado al que se aplicará el método DTA–Gear.

⁵ En el capítulo 5.3 se aplicará esta idea a un oscilador con línea de transmisión.

Dado que el bipuerto resultante de la extracción es lineal, podemos aplicar superposición en el dominio transformado de Laplace. Así, podemos expresar la VC de la alinealidad como

$$X(s) = H_1(s, e^{-s\tau})F(X) + H_2(s, e^{-s\tau})V_b(s), \quad (2.31)$$

y la variable de salida deseada como

$$Y(s) = H_3(s, e^{-s\tau})F(X) + H_4(s, e^{-s\tau})V_b(s), \quad (2.32)$$

donde

$$H_j(s, e^{-s\tau}) = -\frac{B_j(s, e^{-s\tau})}{A(s, e^{-s\tau})}. \quad (2.33)$$

Haciendo uso de esta notación, podemos reescribir (2.31) como

$$A(s, e^{-s\tau})X(s) + B_1(s, e^{-s\tau})F(X) + B_2(s, e^{-s\tau})V_b(s) = 0, \quad (2.34)$$

y (2.32) como

$$A(s, e^{-s\tau})Y(s) + B_3(s, e^{-s\tau})F(X) + B_4(s, e^{-s\tau})V_b(s) = 0, \quad (2.35)$$

Llegados a este punto, hay que poner énfasis en la composición de los polinomios $B_j(s, e^{-s\tau})$ y $A(s, e^{-s\tau})$ con los que se construyen cada una de las funciones de red. Estos polinomios en dos variables, s y $e^{-s\tau}$, llamados bivariados, se pueden expresar del modo [Hos-94]

$$P(s, e^{-s\tau}) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 p_{ik} s^i e^{-sk\tau}, \quad (2.36)$$

donde n es el orden del multipuerto de parámetros concentrados y τ el retardo de la línea de transmisión⁶. El operador definido por el polinomio $P(s, e^{-s\tau})$ aplicado a la

⁶ La extensión a circuitos con múltiples líneas de transmisión es inmediata.

transformada de Laplace de una variable genérica $u(t)$ se puede expresar en el dominio temporal como⁷

$$P(s, e^{-s\tau})U(s) \xrightarrow{ILT} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 p_{ik} \frac{d^i}{dt^i} (u(t - k\tau)). \quad (2. 37)$$

Así, al trasladar las ecuaciones (2. 34) y (2. 35) al dominio temporal aparece una combinación de las derivadas y retardos de: *a*) la excitación, *b*) la alinealidad y *c*) la VC para (2. 34) y la variable de salida para (2. 35). La ecuación (2. 34) trasladada al dominio temporal toma la forma:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 \left[a_{ik} \frac{d^i}{dt^i} (x(t - k\tau)) + b_{ik}^1 \frac{d^i}{dt^i} (f(x(t - k\tau))) + b_{ik}^2 \frac{d^i}{dt^i} (v_b(t - k\tau)) \right] = 0. \quad (2. 38)$$

Aunque el método descrito para determinar (2. 38) se puede realizar exclusivamente en el dominio temporal, la obtención de esta ecuación en el dominio transformado de Laplace tal vez sea más inteligible. La ecuación (2. 35), en la que aparece la variable de salida, se traslada al dominio temporal del mismo modo que (2. 38). Ambas forman el conjunto de ecuaciones de equilibrio que caracterizan el circuito.

Así pues, hemos descrito la forma de plantear en el dominio temporal las ecuaciones de equilibrio de un circuito no lineal con parámetros distribuidos. El sistema de ecuaciones diferencial en diferencias obtenido no admite, en general, una solución analítica. Por este motivo se propone su discretización con el fin de obtener un sistema de ecuaciones algebraico no lineal, preferible al primero puesto que es posible alcanzar directamente una solución periódica de forma iterativa. A continuación se describe la técnica empleada para realizar esta discretización.

⁷ No se consideran las condiciones iniciales puesto que el objetivo final es determinar el RP de forma directa.

2.2.2 Discretización de las ecuaciones de equilibrio

Ante la imposibilidad de resolver la ecuación (2. 38) de forma analítica, se propone la discretización de las variables que intervienen en ella. Así, en lugar de trabajar con las derivadas y los retardos de las funciones temporales x (desconocida), $f(x)$ (en función de x) y v_b (conocida) se trabaja con sus respectivas muestras.

Para evitar que en el sistema de ecuaciones aparezca un número mayor de incógnitas que de ecuaciones, cabe plantearse la posibilidad de expresar todas las variables desconocidas únicamente en función de la VC de la alinealidad. Así, el valor de las muestras de las derivadas y retardos de x y $f(x)$ se aproximan utilizando únicamente las muestras de x . Esta aproximación se puede realizar de diversos modos. La elección del método de Gear para aproximar el operador derivada constituye uno de los puntos clave en los que se basa el método DTA–Gear.

Discretización del operador derivada

La discretización del operador derivada se realiza para una variable periódica⁸ $u(t)$ de periodo T , cuyas N muestras están equiespaciadas un tiempo $\Delta = \frac{T}{N}$. En el método de Gear de orden g , la derivada de $u(t)$ es aproximada en el instante $n\Delta$ interpolando $u(t)$ mediante un polinomio de grado g fijado por las últimas $g+1$ muestras [Sch-91]. La Fig. 2. 12 ilustra los desarrollos que se realizarán a continuación particularizados para una discretización de segundo orden: $g=2$.

⁸ Aunque la condición de periodicidad no es necesaria para realizar la discretización, ello agilizará los desarrollos posteriores.

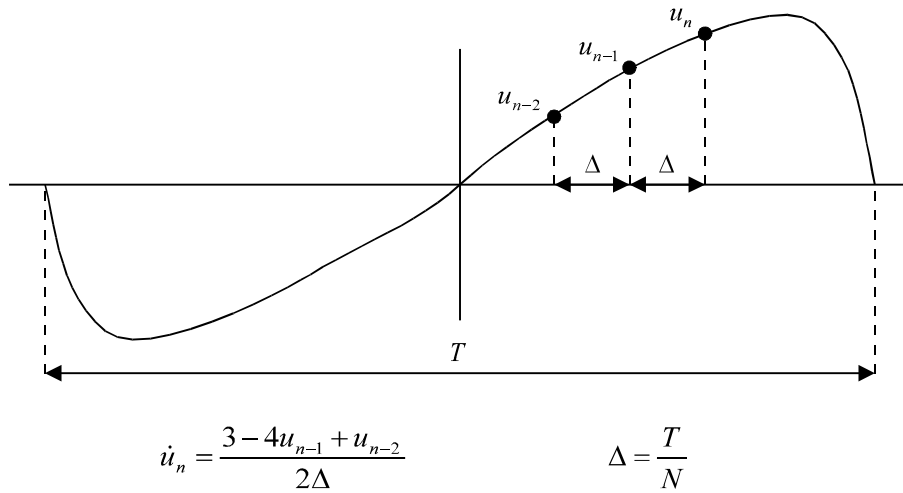


Fig. 2. 12 Cálculo de la derivada en una discretización de segundo orden.

Definiendo el vector de N muestras de $u(t)$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T, \quad (2.39)$$

con

$$u_n = u(n\Delta), \quad (2.40)$$

se puede aproximar el vector de muestras de

$$\frac{d}{dt}(u(t)), \quad (2.41)$$

definido por

$$\dot{\mathbf{u}} = [\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_N]^T, \quad (2.42)$$

a partir de las muestras de \mathbf{u} utilizando

$$\left. \frac{d}{dt}(u(t)) \right|_{t=n\Delta} \cong \dot{u}_n = \sum_{r=0}^g c'_r u_{n-r}, \quad (2.43)$$

donde los coeficientes c'_r se obtienen a partir del proceso de interpolación descrito anteriormente.

Para el posterior cálculo del Jacobiano del sistema de ecuaciones, realizado en el capítulo 2.3, la dependencia de los coeficientes c_r' con el periodo T debe ser expuesta de forma explícita. Esta dependencia es

$$c_r' = c_r \frac{1}{\Delta} = c_r \frac{N}{T}, \quad (2.44)$$

donde los coeficientes c_r dependen sólo del orden de la discretización de Gear usada, y no del periodo T .

Profundizando en el significado de (2.43), vemos que cada una de las muestras de la variable derivada se aproxima utilizando la muestra de la variable en ese instante y las g muestras anteriores. Así, comprobamos que para el cálculo del vector (2.42), necesitamos más muestras que las contenidas en el vector (2.39). No obstante, al considerar la periodicidad de la solución, comprobamos que toda muestra se puede expresar a partir de las N que aparecen en (2.39). De este modo, el vector de muestras de la derivada de $u(t)$, se calcula como el producto de una matriz circulante $\mathbf{P}_{10}(T)$, equivalente al operador derivada, y el vector de muestras de $u(t)$. Así, la discretización de (2.37) para $i=1$ y $k=0$ se concreta en

$$\frac{d}{dt}(u(t)) \xrightarrow{g,N} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{u}, \quad (2.45)$$

donde la operación derivada se traduce en multiplicar el vector de muestras por la matriz

$$\mathbf{P}_{10}(T) = \text{circ}(c_0', c_1', \dots, c_g', 0_{g+1}, \dots, 0_{N-1})^T = \frac{\mathbf{C}}{\Delta}, \quad (2.46)$$

y \mathbf{C} , que no depende de T , es

$$\mathbf{C} = \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_g, 0_{g+1}, \dots, 0_{N-1})^T. \quad (2.47)$$

En las expresiones anteriores se ha utilizado la notación

$$\text{circ}(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})^T = \begin{bmatrix} a_0 & a_{N-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Nótese que la matriz circulante (2.46) equivalente al operador derivada, está formada por tan sólo $g+1$ elementos distintos. Estos elementos vienen dados por el vector

$$\mathbf{c}_g = [c_0, c_1, \dots, c_g], \quad (2.49)$$

cuyo valor aparece en la Tabla II. 1 para $g=\{1 \dots 4\}$.

Tabla II. 1 Vectores de discretización del operador derivada

Orden de discretización	Vector (2.49)
1	$\mathbf{c}_1 = [1 \quad -1]$
2	$\mathbf{c}_2 = \frac{1}{2}[3 \quad -4 \quad 1]$
3	$\mathbf{c}_3 = \frac{1}{6}[11 \quad -18 \quad 9 \quad -2]$
4	$\mathbf{c}_4 = \frac{1}{24}[50 \quad -96 \quad 72 \quad -32 \quad 6]$

Discretización del operador retardo

Dado que el valor de la función evaluada en el instante $n\Delta$ y retardada $k\tau$ segundos, esto es $u(n\Delta - k\tau)$, generalmente no coincide con una de las muestras de $u(t)$, su valor se obtiene interpolando $u(t)$. Para que la discretización del operador retardo sea coherente con la discretización realizada para el operador derivada, esta interpolación se realiza con un polinomio de grado g fijado por la muestra que sigue al instante $n\Delta - k\tau$ y por las g muestras

anteriores. La Fig. 2. 13 ilustra los desarrollos que se realizarán a continuación particularizados para una discretización de segundo orden: $g=2$.

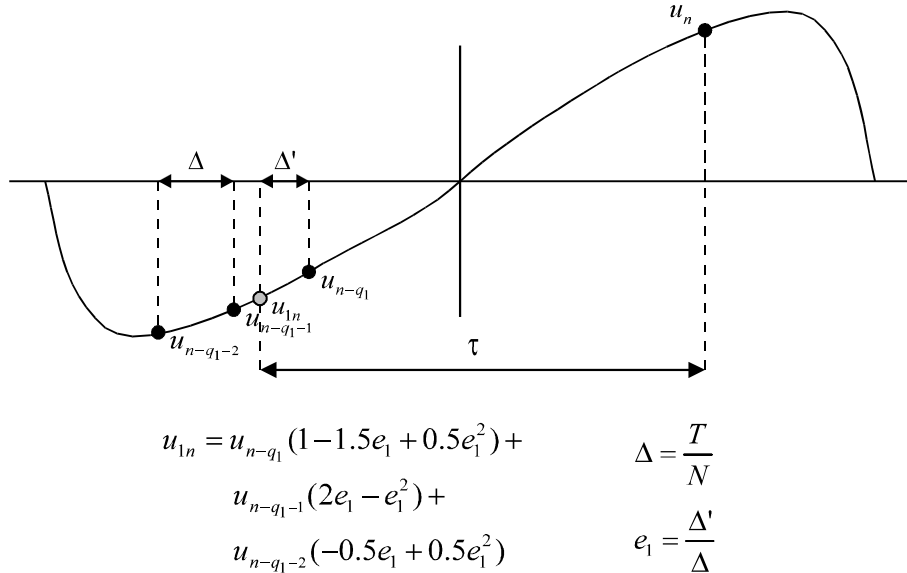


Fig. 2. 13 Cálculo del retardo en una discretización de segundo orden.

Podemos aproximar el vector de muestras de $u(t-k\tau)$ definido por

$$\mathbf{u}_k = [u_{k1}, u_{k1}, \dots, u_{kN}]^T, \quad (2.50)$$

a partir de las muestras de \mathbf{u} utilizando

$$u(n\Delta - k\tau) \cong u_{kn} = \sum_{r=0}^g d'_{kr} u_{n-q_k-r}, \quad (2.51)$$

donde q_k , de acuerdo con Δ y τ , se obtiene a partir de la desigualdad

$$q_k \Delta \leq k\tau < (q_k + 1)\Delta, \quad (2.52)$$

y los coeficientes d'_{kr} se obtienen a partir del proceso de interpolación descrito anteriormente.

Por las mismas razones argumentadas al discretizar el operador derivada, la dependencia de los coeficientes d'_{kr} con el periodo T debe ser puesta de manifiesto. Esta dependencia, de mayor complejidad que la establecida para el operador derivada, es

$$d'_{kr} = \sum_{j=0}^g d'_{rj} (e_k)^j, \quad (2.53)$$

con

$$e_k = \frac{k\tau - q_k \Delta}{\Delta} = \frac{Nk\tau}{T} - q_k. \quad (2.54)$$

Los coeficientes d'_{rj} dependen sólo del orden del polinomio usado para interpolar $u(t)$, y no del periodo T .

Al considerar la periodicidad de la solución, comprobamos que toda muestra de (2.50) se puede expresar a partir de las N que aparecen en (2.39). De este modo, el vector de muestras de la variable $u(t)$ retardada, se calcula como el producto de una matriz circulante $\mathbf{P}_{0k}(T)$, equivalente al operador retardo, y el vector de muestras de $u(t)$. Así, la discretización de (2.37) para $i=0$ se concreta en

$$u(t - k\tau) \xrightarrow{g, N} \mathbf{u}_k = \mathbf{P}_{0k}(T) \mathbf{u}, \quad (2.55)$$

Donde se define al operador retardo

$$\mathbf{P}_{0k}(T) = \text{circ}(0_0, \dots, 0_{q_k-1}, d'_{k0}, \dots, d'_{kg}, 0_{q_k+g+1}, \dots, 0_{N-1})^T. \quad (2.56)$$

Los coeficientes d'_{kr} pueden ser expresados como un polinomio en e_k , definido en (2.54), mediante la formulación

$$\begin{bmatrix} d'_{k0} \\ d'_{k1} \\ \vdots \\ d'_{kg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \cdots & d_{0g} \\ d_{10} & d_{11} & \cdots & d_{1g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{g0} & d_{g1} & \cdots & d_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (e_k)^0 \\ (e_k)^1 \\ \vdots \\ (e_k)^g \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

que en forma compacta se escribe

$$\mathbf{d}_k(T) = \mathbf{D}_g \mathbf{e}_k(T). \quad (2.58)$$

La matriz \mathbf{D}_g , independiente de T y k , aparece en la Tabla II. 2 para $g=\{1 \dots 4\}$.

Tabla II. 2 Matrices de discretización del operador retardo

Orden de discretización	Matriz (2. 57)
1	$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\mathbf{D}_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -11 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & -9 & 12 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
4	$\mathbf{D}_4 = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \\ 0 & 96 & -104 & 36 & -4 \\ 0 & -72 & 114 & -48 & 6 \\ 0 & 32 & -56 & 28 & -4 \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

2.2.3 Obtención de la formulación DTA–Gear

Por el momento se ha realizado de forma aislada la discretización de los operadores derivada y retardo mediante matrices circulantes. Con estos resultados es posible abordar la discretización de operadores que combinen una derivada a la potencia i -ésima y un retardo, como es el caso de la ecuación (2. 37). La discretización de esta ecuación utilizando los operadores básicos derivada y retardo es

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 p_{ik} \frac{d^i}{dt^i} (u(t - k\tau)) \xrightarrow{g, N} \mathbf{P}(T)\mathbf{u}, \quad (2. 59)$$

con

$$\mathbf{P}(T)\mathbf{u} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 p_{ik} \mathbf{P}_{ik}(T)\mathbf{u}, \quad (2. 60)$$

donde cada una de las matrices $\mathbf{P}_{ik}(T)$, equivalente a derivar i veces y retardar $k\tau$ segundos, se descompone en el producto de las matrices equivalentes al operador derivada (2. 45) y al operador retardo (2. 55) como

$$\mathbf{P}_{ik}(T) = \mathbf{P}_{i0}(T)\mathbf{P}_{0k}(T) = (\mathbf{P}_{10}(T))^i \mathbf{P}_{0k}(T). \quad (2. 61)$$

La expresión anterior permite la siguiente lectura: la multiplicación por i matrices $\mathbf{P}_{10}(T)$ y por $\mathbf{P}_{0k}(T)$ es equivalente al operador derivada i -ésima y retardo $k\tau$ segundos. Puesto que estas matrices son circulantes, su producto es conmutativo, resultado que concuerda con el hecho que sus correspondientes operadores, derivada y retardo, también son conmutativos.

La extensión de esta idea a la ecuación (2. 38), permite obtener la siguiente discretización

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 [a_{ik} \mathbf{P}_{ik}(T)\mathbf{x} + b_{ik}^1 \mathbf{P}_{ik}(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + b_{ik}^2 \mathbf{P}_{ik}(T)\mathbf{v}_b] = \mathbf{0}. \quad (2. 62)$$

Usando una notación similar a la utilizada en (2. 60) podemos escribir (2. 62) en forma compacta como

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_2(T)\mathbf{v}_b = \mathbf{0}, \quad (2. 63)$$

donde cada matriz, una vez fijado el orden de la discretización y el número de muestras N , sólo depende del periodo de oscilación T .

El lector habrá observado que la formulación obtenida hasta el momento es válida tanto para circuitos autónomos como excitados. Sin embargo, puesto que en circuitos autónomos, el periodo T es desconocido, el sistema (2. 63) tiene infinitas soluciones que

sólo difieren en un retardo arbitrario. Al existir infinitas soluciones parece que la probabilidad de convergencia del algoritmo de resolución iterativo a una solución aumenta. Sin embargo, los algoritmos existentes deben ser modificados para contemplar este caso particular. Para solventar ese inconveniente, una de las muestras de la variable de control \mathbf{x} es fijada a un valor el cual, *a priori*, se espera que la solución tome a lo largo de un periodo. Así, de ahora en adelante, y sin pérdida de generalidad, asumiremos el valor de la primera muestra de \mathbf{x} conocido. Así, (2. 63) es un sistema bien dimensionado, con N ecuaciones y N incógnitas: el periodo y las $N-1$ muestras de \mathbf{x} . Las incógnitas de (2. 63) pueden ser escritas en forma vectorial como

$$[T, x_2, x_3, \dots, x_N]. \quad (2. 64)$$

Continuando con el caso de circuitos autónomos, el vector \mathbf{v}_b proviene de las fuentes de polarización, con lo cual todas las muestras tienen el mismo valor. Así, el operador derivada aplicado sobre \mathbf{v}_b es cero y el retardo es un operador neutro. De este modo

$$\mathbf{B}_2(T)\mathbf{v}_b = \sum_{k=0}^2 b_{0k}^2 \mathbf{v}_b = c_2 \mathbf{v}_b. \quad (2. 65)$$

donde c_2 es una constante que no depende del periodo. Con estas consideraciones, (2. 62) se convierte para circuitos autónomos en

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 [a_{ik} \mathbf{P}_{ik}(T)\mathbf{x} + b_{ik}^1 \mathbf{P}_{ik}(T)\mathbf{f}(\mathbf{x})] + \sum_{k=0}^2 [b_{0k}^2 \mathbf{v}_b] = \mathbf{0}, \quad (2. 66)$$

y (2. 63) en

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + c_2 \mathbf{v}_b = \mathbf{0}, \quad (2. 67)$$

No debe olvidarse que el sistema de ecuaciones inicial estaba formado por las ecuaciones (2. 34) y (2. 35). Así, el cálculo de la variable de salida \mathbf{y} requiere la resolución de (2. 35). Del mismo modo que de (2. 34) se ha obtenido (2. 67), a partir de (2. 35) es posible obtener

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{y} + \mathbf{B}_3(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + c_4\mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (2.68)$$

La resolución de (2.67) equivale al conocimiento del vector de incógnitas (2.64). De este modo, la única incógnita de (2.68) es el vector \mathbf{y} . Éste se calcula de forma analítica a partir de (2.68) sin más que realizar la siguiente operación

$$\mathbf{y} = -\mathbf{A}(T)^{-1}(\mathbf{B}_3(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + c_4\mathbf{v}_b). \quad (2.69)$$

Sumario

Llegados a este punto podemos resumir brevemente el desarrollo realizado hasta el momento. Partiendo de las ecuaciones (2.34) y (2.35) en el dominio transformado de Laplace se ha obtenido un sistema equivalente formado por (2.67) y (2.68) en el dominio temporal discreto. La resolución de (2.67) equivale a resolver un sistema de N ecuaciones algebraico no lineal, mientras que (2.68) se resuelve de forma analítica. En la formulación obtenida aparece un número limitado de matrices circulantes: una para el operador derivada y dos para los posibles retardos que aparecen en el circuito.

Se ha cumplido, pues, el objetivo de transformar un sistema de ecuaciones diferencial en diferencias no lineal, en general irresoluble de forma analítica, en un sistema de ecuaciones algebraico no lineal. Este último es preferible al primero por ser resoluble de forma iterativa usando algoritmos globalmente convergentes basados en el método de Newton. La implementación eficaz de estos algoritmos de resolución, precisa del conocimiento del Jacobiano del sistema de ecuaciones (2.67), objetivo que se aborda a continuación.

2.3 Cálculo analítico de sensibilidades

Reproducimos a continuación la formulación DTA–Gear para circuitos autónomos que se ha obtenido en la sección anterior

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 [a_{ik} \mathbf{P}_{ik}(T) \mathbf{x} + b_{ik}^1 \mathbf{P}_{ik}(T) \mathbf{f}(\mathbf{x})] + \sum_{k=0}^2 [b_{0k}^2 \mathbf{v}_b] = \mathbf{0}, \quad (2.70)$$

que en forma compacta se escribe

$$\mathbf{A}(T) \mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + c_2 \mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (2.71)$$

La resolución eficiente del sistema de ecuaciones DTA–Gear requiere el uso de algoritmos globalmente convergentes basados en el método de Newton [Den-83]. Estos métodos determinan el valor de las incógnitas del sistema de ecuaciones, a saber

$$[T, x_2, x_3, \dots, x_N], \quad (2.72)$$

de forma iterativa. El proceso iterativo empieza con una estimación inicial de (2.72) que difícilmente coincidirá con la solución. Así, la parte izquierda de (2.71) será distinta de cero, pudiéndose evaluar su error a partir del vector \mathbf{h} definido por

$$\mathbf{h}(T, x_2, x_3, \dots, x_N) = \mathbf{A}(T) \mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + c_2 \mathbf{v}_b, \quad (2.73)$$

donde cada uno de los elementos del vector se escribe

$$\mathbf{h}(T, x_2, x_3, \dots, x_N) = \begin{bmatrix} h_1(T, x_2, x_3, \dots, x_N) \\ h_2(T, x_2, x_3, \dots, x_N) \\ \vdots \\ h_N(T, x_2, x_3, \dots, x_N) \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

A partir de la estimación inicial realizada, se intenta reducir el error (2.74) variando el vector de incógnitas (2.72). Este proceso se realiza de forma iterativa hasta alcanzar, si el método converge, una solución. En cada una de estas iteraciones el método de resolución requiere el conocimiento de las derivadas parciales del sistema de ecuaciones (2.74)

respecto a las incógnitas de éste, (2. 72). Así, el llamado Jacobiano del sistema de ecuaciones (2. 74) es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial T} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h_2}{\partial T} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_N}{\partial T} & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} & \frac{\partial h_N}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}. \quad (2. 75)$$

La posible evaluación de (2. 75) es uno de los parámetros que elevan la bondad de un método de análisis. En aquellos métodos en que se desconoce su expresión analítica es frecuente recurrir a aproximaciones basadas en diferencias finitas, alternativa que requiere la repetida evaluación del vector \mathbf{h} . Por otro lado, su conocimiento analítico repercute en una disminución en el tiempo de cálculo del Jacobiano y, en consecuencia, del tiempo global de cálculo de la solución. En este sentido, la formulación DTA–Gear obtenida anteriormente es tal que el Jacobiano del sistema de ecuaciones puede ser evaluado de forma analítica exacta.

Centrándonos en la formulación DTA–Gear, el cálculo de la derivada respecto a las muestras de la VC se realiza sin ninguna dificultad, siendo suficiente este conocimiento para evaluar el Jacobiano de circuitos excitados. En contra, el cálculo de la derivada respecto al periodo de oscilación T no es, en absoluto, trivial⁹. La obtención de las expresiones necesarias para evaluar la derivada respecto al periodo de oscilación T y las muestras de la VC se realiza en las dos secciones siguientes.

Por otro lado, y cambiando de objetivo, la resolución de problemas de optimización requiere como primer paso el conocimiento de la sensibilidad del sistema de ecuaciones respecto a los elementos del circuito. Así, toda formulación que pretenda ser reutilizada eficazmente para resolver este tipo de problemas debe poder determinar de forma analítica

⁹ Esta misma dificultad es compartida por otros métodos de análisis. La tesis doctoral [Mar-90] se centra en la obtención de las expresiones necesarias para evaluar la sensibilidad respecto al periodo de oscilación en el método de HB.

esta dependencia. La formulación DTA–Gear permite obtener expresiones analíticas cuyo desarrollo se incluye en este capítulo.

Antes de afrontar el cálculo de la sensibilidad de (2. 73), nos centraremos en el cálculo de la sensibilidad de (2. 60) que se reproduce a continuación

$$\mathbf{P}(T)\mathbf{u} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 p_{ik} \mathbf{P}_{ik}(T)\mathbf{u} , \quad (2. 76)$$

para después extender los resultados a (2. 73) sin dificultades. El lector seguirá mejor los desarrollos posteriores si advierte que en (2. 76) la dependencia con el periodo de oscilación está contenida en la matriz $\mathbf{P}_{ik}(T)$, la dependencia con las muestras de la VC en el vector \mathbf{u} y la dependencia con los elementos del circuito en los coeficientes p_{ik} .

2.3.1 Derivada respecto al periodo de oscilación

Ya en el momento de su definición, se ha puesto de manifiesto la dependencia de los coeficientes c'_r y d'_{kr} , con los que se construyen los operadores derivada y retardo, respecto al periodo de oscilación. Toda vez que las matrices que aparecen en el sistema de ecuaciones a resolver están íntegramente construidas con estos coeficientes, el cálculo de la derivada respecto al periodo de oscilación incluye, en uno u otro instante, el cálculo de la derivada de estos coeficientes respecto al periodo de oscilación.

Puesto que el vector de muestras \mathbf{u} no depende del periodo de oscilación T la derivada parcial de (2. 76) se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial T}(\mathbf{P}(T))\mathbf{u} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 p_{ik} \frac{\partial}{\partial T}(\mathbf{P}_{ik}(T))\mathbf{u} , \quad (2. 77)$$

que en forma compacta toma la forma

$$\dot{\mathbf{P}}(T)\mathbf{u} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 p_{ik} \dot{\mathbf{P}}_{ik}(T)\mathbf{u} . \quad (2. 78)$$

Usando (2. 61) y la regla de la cadena, expresamos

$$\dot{\mathbf{P}}_{ik}(T) = \dot{\mathbf{P}}_{i0}(T)\mathbf{P}_{0k}(T) + \mathbf{P}_{i0}(T)\dot{\mathbf{P}}_{0k}(T). \quad (2.79)$$

El cálculo de la derivada que aparece en el primer producto es inmediato usando (2.46).

Esta derivada, considerando $\Delta = \frac{T}{N}$, es

$$\dot{\mathbf{P}}_{i0}(T) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mathbf{C}^i}{\Delta^i} \right) = \frac{-i}{T} \mathbf{P}_{i0}(T). \quad (2.80)$$

Para el cálculo de la derivada que aparece en el segundo producto de (2.79), debemos recordar la dependencia de $\mathbf{P}_{0k}(T)$ con el periodo a través de $\mathbf{e}_k(T)$. Empezamos definiendo la derivada de (2.56) como

$$\dot{\mathbf{P}}_{0k}(T) = \text{circ}(0_0, \dots, 0_{q_k-1}, \dot{d}'_{k0}, \dots, \dot{d}'_{kg}, 0_{q_k+g+1}, \dots, 0_{N-1})^T, \quad (2.81)$$

donde

$$\dot{\mathbf{d}}_k(T) = [\dot{d}'_{k0}, \dot{d}'_{k1}, \dots, \dot{d}'_{kg}]^T = \frac{\partial}{\partial T} (\mathbf{d}_k(T)). \quad (2.82)$$

A continuación, usando (2.57) y (2.58), expresamos (2.82) como

$$\dot{\mathbf{d}}_k(T) = \mathbf{D}_g \frac{\partial}{\partial T} (\mathbf{e}_k(T)) = \frac{-1}{T} \mathbf{D}_g \mathbf{Q}_k \mathbf{e}_k(T), \quad (2.83)$$

con

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_k & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2q_k & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & gq_k & g \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

definida en términos del orden g de la discretización de Gear usada y q_k , definido en (2.52). En la obtención de (2.83) se ha hecho uso de la relación de $\mathbf{e}_k(T)$ con el periodo según (2.54).

Una vez se han calculado las matrices $\dot{\mathbf{P}}_{ik}(T)$ usando (2. 79), el cálculo de $\dot{\mathbf{A}}(T)$ y $\dot{\mathbf{B}}_1(T)$ es inmediato puesto que $\mathbf{A}(T)$ y $\mathbf{B}_1(T)$ son una combinación lineal de las matrices $\mathbf{P}_{ik}(T)$ a través de la relación dictada por (2. 70) y (2. 71). Así, la primera columna del Jacobiano (2. 75) se expresa analíticamente como

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial T} = \mathbf{J}(:,1) = \dot{\mathbf{A}}(T)\mathbf{x} + \dot{\mathbf{B}}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2. 85)$$

2.3.2 Derivada respecto a las muestras de la variable de control

La determinación de la sensibilidad del sistema de ecuaciones (2. 73) respecto a las muestras de la VC no presenta ninguna dificultad, puesto que tan sólo los vectores \mathbf{x} y $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ dependen de estas muestras, y el cálculo de sus derivadas parciales es inmediato. Así, la columna n del Jacobiano, que indica la derivada parcial de \mathbf{h} respecto a la muestra n se calcula como

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_n} = \mathbf{J}(:,n) = \mathbf{A}(:,n) + \mathbf{B}_1(:,n)f'(x_n), \quad (2. 86)$$

con

$$f'(x_n) = \left. \frac{d}{dx} (f(x)) \right|_{x=x_n}. \quad (2. 87)$$

Anteriormente se ha comentado que, con el fin de tener un sistema de ecuaciones bien dimensionado, la primera muestra de la VC x estaba fijada de antemano. Por tanto, la dependencia con las muestras desconocidas de la VC

$$[x_2, x_3, \dots, x_N], \quad (2. 88)$$

viene dada por (2. 86) para $n > 1$. Así, las restantes columnas del Jacobiano (2. 75) particularizado para la formulación DTA–Gear (2. 73) se expresan analíticamente como

$$\mathbf{J}(:,2:N) = \mathbf{A}(:,2:N) + \mathbf{B}_1(:,2:N)\mathbf{F}'(\mathbf{x}), \quad (2. 89)$$

con

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \text{diag}(f'(x_2), \dots, f'(x_N)), \quad (2.90)$$

y $f'(x_n)$ según (2.87).

2.3.3 Derivada respecto a los elementos del circuito

La resolución de problemas de optimización utilizando la formulación DTA–Gear requiere, en algún momento, del conocimiento de la sensibilidad respecto a los elementos del circuito. Estos elementos están contenidos únicamente en los coeficientes p_{ik} que multiplican a cada una de las matrices $\mathbf{P}_{ik}(T)$. Así, la derivada parcial de (2.73) respecto a un elemento cualquiera p del circuito que se analiza se escribe, a partir de (2.70), como

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial p} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 \left[\dot{a}_{ik} \mathbf{P}_{ik}(T) \mathbf{x} + \dot{b}_{ik}^1 \mathbf{P}_{ik}(T) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right] + \sum_{k=0}^2 \left[\dot{b}_{0k}^2 \mathbf{v}_b \right], \quad (2.91)$$

con

$$\begin{aligned} \dot{a}_{ik} &= \frac{\partial}{\partial p} (a_{ik}) \\ \dot{b}_{ik}^1 &= \frac{\partial}{\partial p} (b_{ik}^1) . \\ \dot{b}_{0k}^2 &= \frac{\partial}{\partial p} (b_{0k}^2) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Aplicación a la optimización del periodo de oscilación

La reformulación del método DTA–Gear permite reconvertir un determinado tipo de problemas de optimización en un problema formalmente idéntico, y en consecuencia de igual complejidad, que uno de análisis. Efectivamente, consideremos un problema de optimización en el que se desea determinar el valor de un elemento p del circuito para conseguir un determinado periodo de oscilación. Fijado el periodo de oscilación, éste deja de ser incógnita, con lo que el elemento p se puede incluir en el nuevo conjunto de incógnitas:

$$[p, x_2, x_3, \dots, x_N]. \quad (2.93)$$

Ante el cambio en las incógnitas a considerar, reescribimos (2.70) para contemplar la dependencia de cada término con la nueva incógnita como

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 [a_{ik}(p) \mathbf{P}_{ik} \mathbf{x} + b_{ik}^1(p) \mathbf{P}_{ik} \mathbf{f}(\mathbf{x})] + \sum_{k=0}^2 [b_{0k}^2(p) \mathbf{v}_b] = \mathbf{0}, \quad (2.94)$$

que en forma compacta se escribe

$$\mathbf{A}(p) \mathbf{x} + \mathbf{B}_1(p) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + c_2(p) \mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (2.95)$$

El lector comprobará que las dos expresiones anteriores son formalmente idénticas que las que aparecen en un problema de análisis de un circuito autónomo. Definiendo

$$\mathbf{h}(p, x_2, x_3, \dots, x_N) = \mathbf{A}(p) \mathbf{x} + \mathbf{B}_1(p) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + c_2(p) \mathbf{v}_b, \quad (2.96)$$

obtenemos la siguiente expresión para la matriz Jacobiano:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h_2}{\partial p} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_N}{\partial p} & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} & \frac{\partial h_N}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Obsérvese que el Jacobiano de este problema de optimización sólo difiere del Jacobiano (2.75) de un problema de análisis en la primera columna, que se calcula del modo indicado al principio de esta sección en (2.91) y (2.92).

Sumario

Llegados a este punto cabe reflexionar sobre los resultados obtenidos. Se ha formulado un sistema de ecuaciones algebraico no lineal y se ha calculado su sensibilidad respecto al periodo de oscilación, las muestras de la VC y los elementos del circuito. Todas las expresiones se han obtenido de forma analítica exacta, sin ser necesaria ninguna aproximación. El conocimiento de estas sensibilidades permite, por una parte, la implementación eficaz de métodos de resolución iterativos del sistema de ecuaciones DTA–Gear y, por otra parte, afrontar determinados problemas de optimización.

2.4 Reformulación de los resultados para alinealidades especiales

El lector habrá observado a lo largo de los desarrollos anteriores que en todo momento se ha hecho la suposición que la muestra de $f(x)$ en el instante $n\Delta$ se calcula únicamente a partir de la muestra de x en ese instante. Esto es equivalente a decir que los resultados anteriores se han realizado para alinealidades estáticas con una VC. En la modelación circuital de las alinealidades realizada en el capítulo 2.1 han aparecido alinealidades dinámicas. En este mismo capítulo se ha demostrado que estas alinealidades pueden ser reconvertidas en alinealidades estáticas, con lo cual la formulación DTA–Gear también es válida para circuitos con alinealidades dinámicas sin más que realizar esta reconversión.

No obstante, la extensión del método a este tipo de alinealidades obedece a dos razones. En primer lugar, la existencia de una formulación DTA–Gear para ambas alinealidades permitirá un estudio comparativo, teórico y experimental, de los errores de discretización cometidos en ambas formulaciones¹⁰. En segundo lugar, permitirá comparar la formulación de estabilidad en el dominio frecuencial obtenida en esta tesis con la obtenida por otros trabajos en los que se utilizan alinealidades dinámicas¹¹.

La extensión de la formulación DTA–Gear a circuitos con más de una VC se realiza aplicando las ideas utilizadas previamente. Sin embargo puede ser ilustrativo realizar esta formulación para un circuito con dos VC. En su momento este tipo de alinealidad ha aparecido como alternativa a una alinealidad dinámica. Asimismo, la obtención de una formulación DTA–Gear para dos VC permitirá que el estudio comparativo de los errores de discretización se amplíe también a este tipo de alinealidad.

Para ayudar en la ilustración de las ideas presentadas, pongamos como ejemplo de alinealidad estática la que interviene en el modelo circuital del oscilador de Van der Pol¹²:

¹⁰ Este estudio comparativo se realiza en los capítulos 2.5 y 2.6.

¹¹ Esta comparación se realizará en el capítulo 4.3.4.

¹² En el capítulo 2.6 se estudiará con detalle este circuito.

$$f(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right). \quad (2.98)$$

Este mismo oscilador admite otro modelo circuital en el que la alinealidad está controlada por dos VC:

$$f(x_a, x_b) = \mu(x_a^2 - 1)x_b. \quad (2.99)$$

Se evitan los inconvenientes de trabajar con dos VC, expresando una de estas variables como derivada de la otra. Se obtiene así la siguiente alinealidad dinámica

$$f(x, \dot{x}) = \mu(x^2 - 1)\dot{x}. \quad (2.100)$$

Estos dos últimos tipos de alinealidad son contemplados a continuación, requiriendo modificaciones al plantear el sistema de ecuaciones y, especialmente, en el modo de calcular el Jacobiano.

2.4.1 Alinealidad estática con dos variables de control

En el caso de circuitos con una alinealidad controlada por dos variables, la formulación de las ecuaciones de equilibrio sufre alguna variación, que se reseña únicamente para facilitar el cálculo del Jacobiano en este tipo de circuitos.

Considerando el circuito de la Fig. 2.11 con una alinealidad del tipo (2.99) las dos VC se expresan, utilizando superposición, del modo

$$X_a(s) = H_1(s, e^{-s\tau})F(X_a, X_b) + H_2(s, e^{-s\tau})V_b(s), \quad (2.101)$$

$$X_b(s) = H_3(s, e^{-s\tau})F(X_a, X_b) + H_4(s, e^{-s\tau})V_b(s). \quad (2.102)$$

Descomponiendo las funciones de red en cociente de polinomios bivariados, reescribimos las ecuaciones anteriores como

$$A(s, e^{-s\tau})X_a(s) + B_1(s, e^{-s\tau})F(X_a, X_b) + B_2(s, e^{-s\tau})V_b(s) = 0, \quad (2.103)$$

$$A(s, e^{-s\tau})X_b(s) + B_3(s, e^{-s\tau})F(X_a, X_b) + B_4(s, e^{-s\tau})V_b(s) = 0. \quad (2. 104)$$

Este sistema de ecuaciones se puede discretizar de forma automática a partir de los resultados obtenidos anteriormente. Así, con la notación utilizada, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x}_a + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) + \mathbf{B}_2(T)\mathbf{v}_b = \mathbf{0}, \quad (2. 105)$$

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_3(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) + \mathbf{B}_4(T)\mathbf{v}_b = \mathbf{0}, \quad (2. 106)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_a &= [x_{a1}, x_{a2}, \dots, x_{aN}]^T, \\ \mathbf{x}_b &= [x_{b1}, x_{b2}, \dots, x_{bN}]^T, \end{aligned} \quad (2. 107)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = [f(x_{a1}, x_{b1}), f(x_{a2}, x_{b2}), \dots, f(x_{aN}, x_{bN})]^T.$$

El sistema de ecuaciones formado por (2. 105) y (2. 106) se puede agrupar y ser expresado en forma compacta como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(T) \\ \mathbf{B}_3(T) \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2(T) \\ \mathbf{B}_4(T) \end{bmatrix} \mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (2. 108)$$

Una de las muestras de x_a o x_b , de ahora en adelante la primera muestra de x_a , debe ser conocida con el fin que el periodo de oscilación T , desconocido en circuitos autónomos, forme parte del conjunto de incógnitas a determinar. Además, el sistema de ecuaciones (2. 108) particularizado para circuitos autónomos es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(T) \\ \mathbf{B}_3(T) \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) + \begin{bmatrix} c_2 \mathbf{v}_b \\ c_4 \mathbf{v}_b \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2. 109)$$

Una vez obtenido el sistema de ecuaciones DTA–Gear podemos abordar el cálculo de las sensibilidades respecto a las incógnitas

$$[T, x_{a2}, \dots, x_{aN}, x_{b1}, \dots, x_{bN}]. \quad (2.110)$$

Nótese que si el número de muestras por periodo es N , el número de ecuaciones, y de incógnitas, que obtenemos es $2N$.

Derivada respecto al periodo de oscilación

El cálculo de la sensibilidad del sistema de ecuaciones (2. 109) respecto al periodo de oscilación T se obtiene derivando cada una de las matrices que dependen de T . El resultado

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial T} = \mathbf{J}(:,1) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}}(T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{A}}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{B}}_1(T) \\ \dot{\mathbf{B}}_3(T) \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b). \quad (2.111)$$

es muy similar al obtenido para una alinealidad estática con una VC en (2. 85).

Derivada respecto a las muestras de las variables de control

El cálculo de la sensibilidad del sistema de ecuaciones (2. 109) respecto a las muestras de la VC presenta alguna modificación de interés respecto al caso de alinealidad estática con una VC. La columna n ($n < N$) del Jacobiano, que indica la derivada parcial respecto a la muestra n de x_a se calcula como

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_{an}} = \mathbf{J}(:,n) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(:,n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(:,n) \\ \mathbf{B}_3(:,n) \end{bmatrix} f'_a(x_{an}, x_{bn}), \quad (2.112)$$

donde se ha usado la notación

$$f'_a(x_{an}, x_{bn}) = \left. \frac{d}{dx_a} (f(x_a, x_b)) \right|_{(x_a, x_b) = (x_{an}, x_{bn})}. \quad (2.113)$$

Del mismo modo, la columna $n+N$ ($n < N$) del Jacobiano, que indica la derivada parcial respecto a la muestra n de x_b se calcula como

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_{bn}} = \mathbf{J}(:,n+N) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}(:,n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(:,n) \\ \mathbf{B}_3(:,n) \end{bmatrix} f'_b(x_{an}, x_{bn}), \quad (2.114)$$

donde se ha usado la notación

$$f'_b(x_{an}, x_{bn}) = \left. \frac{d}{dx_b} (f(x_a, x_b)) \right|_{(x_a, x_b) = (x_{an}, x_{bn})}. \quad (2.115)$$

Como la primera muestra de la VC x_a no forma parte del conjunto de incógnitas, las columnas restantes columnas del Jacobiano se expresan analíticamente como

$$\mathbf{J}(:, 2:2N) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(:, 2:N) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(:, 2:N) & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_3(:, 2:N) & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}'_a(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}'_b(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.116)$$

con

$$\mathbf{F}'_a(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = \text{diag}(f'_a(x_{a2}, x_{b2}), \dots, f'_a(x_{aN}, x_{bN})), \quad (2.117)$$

$$\mathbf{F}'_b(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = \text{diag}(f'_b(x_{a1}, x_{b1}), \dots, f'_b(x_{aN}, x_{bN})). \quad (2.118)$$

2.4.2 Alinealidad dinámica

Anteriormente se han estudiado dos elementos no lineales, el condensador controlado por tensión y su dual el inductor controlado por corriente, en cuya modelación circuital aparecen alinealidades dinámicas. Éstas pueden ser descompuestas de modo genérico en una alinealidad estática y la derivada de la VC mediante el producto

$$f(x, \dot{x}) = g(x)\dot{x}. \quad (2.119)$$

El sistema de ecuaciones DTA–Gear del circuito de la Fig. 2.11 con una alinealidad estática, que reproducimos a continuación para comodidad del lector,

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + c_2\mathbf{v}_b = \mathbf{0}, \quad (2.120)$$

considera al vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ proveniente de una alinealidad estática:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)]^T. \quad (2.121)$$

Es posible modificar la formulación DTA–Gear anterior para contemplar alinealidades dinámicas sustituyendo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ por un vector que depende de las muestras de x y de su derivada. El resultado de esta sustitución es

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + c_2 \mathbf{v}_b = \mathbf{0}, \quad (2.122)$$

donde el nuevo vector se define

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = [f(x_1, \dot{x}_1), f(x_2, \dot{x}_2), \dots, f(x_N, \dot{x}_N)]^T, \quad (2.123)$$

o bien, usando la descomposición (2.119),

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = [g(x_1)\dot{x}_1, g(x_2)\dot{x}_2, \dots, g(x_N)\dot{x}_N]^T. \quad (2.124)$$

Esta última expresión admite la siguiente representación matricial

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, \quad (2.125)$$

con

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \text{diag}(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_N)), \quad (2.126)$$

y

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N]^T. \quad (2.127)$$

Utilizando (2.125) reescribimos el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{G}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + c_2 \mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (2.128)$$

Puesto que el número de incógnitas a determinar no puede aumentar, es necesario expresar el vector de las muestras de la derivada de x en función de las muestras de x . La relación entre un vector y otro la proporciona el operador derivada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{x}. \quad (2.129)$$

Sustituyendo esta última relación en (2.128), hemos extendido la formulación DTA–Gear a circuitos con alinealidades dinámicas. Esta formulación es

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T)[\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{x}] + c_2\mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (2.130)$$

Derivada respecto al periodo de oscilación

El cálculo de la sensibilidad de la formulación DTA–Gear para alinealidades dinámicas respecto al periodo de oscilación T requiere el cálculo de la derivada de las matrices que dependen de T y el uso de la regla de la cadena. Así, la primera columna del Jacobiano del sistema de ecuaciones, expresada en la notación habitual, es

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial T} = \mathbf{J}(:,1) = \dot{\mathbf{A}}(T)\mathbf{x} + \dot{\mathbf{B}}_1(T)[\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{x}] + \mathbf{B}_1(T)[\mathbf{G}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{P}}_{10}(T)\mathbf{x}]. \quad (2.131)$$

Derivada respecto a las muestras de la variable de control

El cálculo de la sensibilidad de la formulación DTA–Gear para alinealidades dinámicas respecto a las muestras de la VC requiere de especial atención al aplicar el uso de la regla de la cadena y la diagonalización de vectores. Con el fin que el desarrollo no resulte tedioso al lector, se formula directamente la expresión analítica final para el cálculo de las columnas del Jacobiano que quedan por determinar. Su expresión en forma matricial es

$$\mathbf{J}(:,2:N) = \mathbf{A}(:,2:N) + \mathbf{B}_1[\mathbf{G}'(\mathbf{x})\dot{\mathbf{X}}(:,2:N) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{10}(:,2:N)], \quad (2.132)$$

con

$$\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = \text{diag}(g'(x_1), g'(x_2), \dots, g'(x_N)), \quad (2.133)$$

$$g'(x_n) = \left. \frac{d}{dx}(g(x)) \right|_{x=x_n}, \quad (2.134)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \text{diag}(\dot{\mathbf{x}}). \quad (2.135)$$

Sumario

Tras la formulación del método DTA–Gear para alinealidades estáticas, se ha realizado su extensión a otros tipos de alinealidad. Así, se ha estudiado una alinealidad estática con dos VC. Con las ideas presentadas en su desarrollo la extensión del método DTA–Gear a circuitos con un número arbitrario de VC no presenta ninguna dificultad conceptual. También se ha estudiado el tipo de alinealidad dinámica que ha aparecido al modelar los elementos no lineales básicos. En ambos casos se ha obtenido una formulación DTA–Gear y se han derivado expresiones analíticas para el cálculo de la sensibilidad respecto al periodo de oscilación y las muestras de las VC¹³.

La extensión del método para contemplar alinealidades dinámicas no es necesaria, pues ésta se puede expresar como la derivada de una alinealidad estática. Sin embargo, los errores de discretización que aparecen en una y otra formulación son distintos, y su comparación requiere de la existencia de ambas formulaciones. Con este objetivo, se aborda a continuación el estudio del error introducido en la discretización del sistema de ecuaciones.

¹³ La sensibilidad respecto a los elementos del circuito no experimenta ninguna modificación en relación a la formulación obtenida para una alinealidad estática.

2.5 Errores introducidos por la discretización

Los operadores derivada y retardo se aplican sobre las excitaciones, las VC y las alinealidades que aparecen en la formulación DTA–Gear. En este capítulo acotaremos el error introducido por cada uno de estos operadores.

Se empezará estudiando el error introducido por el operador derivada al ser aplicado sobre una función cualquiera. El criterio utilizado en la discretización de Gear de orden g es tal que éste es exacto para polinomios de orden g , de donde se deduce que el error de la discretización guarda relación con el error cometido al truncar la serie de Taylor de la función que se está derivando. El estudio continúa con la evaluación del error introducido al calcular la alinealidad dinámica

$$f(x, \dot{x}) = g(x)\dot{x} \xrightarrow{g, N} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}] = \mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{x}], \quad (2. 136)$$

error que es proporcional al cometido en la discretización de \dot{x} . Acercándonos al punto más importante de este capítulo, la expresión anterior (2. 136) también se puede escribir como

$$\dot{h}(x) = \frac{d}{dt}(h(x)) \xrightarrow{g, N} \mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (2. 137)$$

La relación entre ambas expresiones se encuentra en

$$\frac{d}{dx}(h(x)) = g(x). \quad (2. 138)$$

Así, el estudio para el operador derivada concluye evaluando el error cometido al derivar $h(x)$, en relación con el cometido al evaluar la alinealidad dinámica.

El estudio se repite para el operador retardo sobre una función cualquiera. También en este caso, el criterio utilizado en la discretización del operador retardo de orden g es tal que éste es exacto para polinomios de orden g , con lo que el error de la discretización guarda relación con el error cometido al truncar la serie de Taylor de la función retardada que se está evaluando. A partir de aquí el enfoque es distinto al seguido para el operador derivada.

La evaluación del retardo de la alinealidad puede realizarse de dos modos. El primero, consiste en aplicar el operador retardo sobre la VC y después evaluar el valor de la alinealidad siguiendo la secuencia

$$x(t - k\tau) \xrightarrow{g, N} \mathbf{y} = \mathbf{P}_{0k}(T)\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{y}). \quad (2.139)$$

El segundo consiste en aplicar el operador retardo directamente sobre la alinealidad:

$$f(x(t - k\tau)) \xrightarrow{g, N} \mathbf{P}_{0k}(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.140)$$

Finalmente, se ensayan las distintas formulaciones para distintos ordenes de discretización en un banco de pruebas formado por funciones senoidales y funciones potencia.

2.5.1 Discretización del operador derivada

Con el fin de facilitar los desarrollos posteriores definimos la serie de Taylor de una función $x(t)$ alrededor de $n\Delta$ con la notación

$$x(t) = x_n + x_n^1 h + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_n^i h^i}{i!}, \quad (2.141)$$

donde

$$h = t - n\Delta,$$

$$x_n = x(n\Delta), \quad (2.142)$$

$$x_n^i = \left. \frac{d^i}{dt^i} (x(t)) \right|_{t = n\Delta}.$$

Es adelante, habrá que diferenciar la notación utilizada para el valor exacto de la derivada x_n^1 y su valor aproximado \dot{x}_n . Ambos están relacionados mediante el error

$$\xi(x_n) = x_n^1 - \dot{x}_n. \quad (2.143)$$

Derivada de un vector de muestras

En el método propuesto en este capítulo, las muestras de la derivada de $x(t)$ se aproximan utilizando

$$\frac{d}{dt}(x(t)) \xrightarrow{g,N} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{x}. \quad (2.144)$$

Las relaciones (2.43), (2.44) y la Tabla II.1 permiten expresar la muestra n del vector $\dot{\mathbf{x}}$ a partir de $g+1$ muestras del vector \mathbf{x} . Particularizando para $g=1$:

$$\dot{x}_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta}. \quad (2.145)$$

La serie de Taylor (2.141) evaluada en el instante $(n-1)\Delta$ es

$$x_{n-1} = x_n - x_n^1 \Delta + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_n^i (-\Delta)^i}{i!} = x_n - x_n^1 \Delta + x_n^2 \frac{\Delta^2}{2} + 0(\Delta^3). \quad (2.146)$$

Utilizando las dos ecuaciones anteriores se obtiene la siguiente expresión para el error cometido en una discretización de primer orden

$$\xi(x_n) = x_n^2 \frac{\Delta}{2} + 0(\Delta^2). \quad (2.147)$$

Esta expresión puede ser fácilmente generalizada a un orden cualquiera repitiendo el proceso anterior. Así, se obtiene la siguiente expresión general para el error de discretización del operador derivada:

$$\xi(x_n, g) = x_n^{g+1} \frac{\Delta^g}{(g+1)} + 0(\Delta^{g+1}). \quad (2.148)$$

Obsérvese que si la función x es un polinomio de grado g en la variable t

$$x(t) = t^g, \quad (2.149)$$

entonces el error de aproximación es nulo para una discretización de orden g , resultado que es coherente con el criterio de discretización utilizado.

Evaluación de una alinealidad dinámica

El error introducido al evaluar la alinealidad dinámica según la expresión

$$f(x, \dot{x}) = g(x)\dot{x}, \quad (2.150)$$

proviene únicamente del error, según (2.148), cometido al discretizar \dot{x} . Así, y considerando que esta alinealidad es el producto de dos funciones, definimos el error de evaluación de la alinealidad dinámica como¹⁴

$$\xi(f_n, g) = g_n \xi(x_n, g). \quad (2.151)$$

Nótese que si la función x es un polinomio de grado g , entonces el error de evaluación de la alinealidad es nulo para una discretización de orden g , resultado que es independiente del tipo de alinealidad estática $g(x)$ que se esté tratando.

Derivada de una alinealidad estática

La determinación del error introducido al evaluar la alinealidad dinámica como la derivada de una alinealidad estática

$$\dot{h}(x) = \frac{d}{dt}(h(x)) \xrightarrow{g, N} \mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (2.152)$$

se realiza sustituyendo x por h en (2.148). Así,

$$\xi(h_n, g) = h_n^{g+1} \frac{\Delta^g}{(g+1)} + 0(\Delta^{g+1}). \quad (2.153)$$

Obsérvese que si la función $h(t)$ es un polinomio en t de grado g , entonces el error de aproximación es nulo para una discretización de orden g . Ya que nuestro objetivo es comparar el error introducido en los dos tipos de alinealidad, debemos expresar los términos que aparecen en (2.153)

¹⁴ No debe confundirse el orden de discretización g con la función $g(x)$, su valor en el instante Δn , g_n , o su derivada i -ésima en este instante, g_n^i .

$$h_n^i = \frac{d^i}{dt^i} (h(x)) \Big|_{t=n\Delta}, \quad (2.154)$$

en función de los términos que aparecen en (2.151)

$$x_n^i = \frac{d^i}{dt^i} (x(t)) \Big|_{t=n\Delta}. \quad (2.155)$$

Esta relación aparece a continuación para distintos valores de g :

$$h_n^1 = g_n x_n^1,$$

$$h_n^2 = g_n^1 x_n^1 + g_n x_n^2,$$

$$h_n^3 = g_n^2 x_n^1 + 2g_n^1 x_n^2 + g_n x_n^3, \quad (2.156)$$

$$h_n^4 = g_n^3 x_n^1 + 3g_n^2 x_n^2 + 3g_n^1 x_n^3 + g_n x_n^4,$$

$$h_n^5 = g_n^4 x_n^1 + 4g_n^3 x_n^2 + 6g_n^2 x_n^3 + 4g_n^1 x_n^4 + g_n x_n^5.$$

Utilizando las relaciones anteriores reescribimos el error (2.153) como

$$\xi(h_n, g) = \left[\sum_{i=1}^g k_{ig} g_n^i x_n^{g+1-i} + g_n x_n^{g+1} \right] \frac{\Delta^g}{(g+1)} + o(\Delta^{g+1}), \quad (2.157)$$

error que se puede expresar en función de (2.151) como

$$\xi(h_n, g) = \left[\sum_{i=1}^g k_{ig} g_n^i x_n^{g+1-i} \right] \frac{\Delta^g}{(g+1)} + \xi(f_n, g), \quad (2.158)$$

pudiéndose comparar ahora los errores de discretización de ambas formulaciones.

Sumario

Los resultados obtenidos al evaluar el error introducido por la discretización del operador derivada son los siguientes.

- a) **El cálculo de la derivada de x utilizando una discretización de orden g es exacto si x es un polinomio en t de grado g .**
- b) **El cálculo de la alinealidad dinámica $f(x, \dot{x}) = g(x)\dot{x}$, utilizando una discretización de orden g , es exacto si x es un polinomio en t de grado g .**
- c) **El cálculo de la derivada de la alinealidad estática, utilizando una discretización de orden g , es exacto si $h(t)$ es un polinomio en t de grado g . Si $h(x)$ es un polinomio en x de grado m , y x un polinomio en t de grado n , entonces, el cálculo es exacto si $mn \leq g$. Esta última afirmación admite la siguiente lectura equivalente: el cálculo es exacto si x es un polinomio en t de grado $n \leq \frac{g}{m}$.**

De estos resultados se derivan las siguientes conclusiones:

- Por un lado, parece que se está tratando de afirmar que “el cálculo de la alinealidad dinámica introduce errores menores que el cálculo de la derivada de la alinealidad estática”. No obstante, esta afirmación está sujeta a dos hipótesis: que $h(x)$ sea un polinomio en x y x un polinomio en t . Parece razonable que esta afirmación sea cierta aún en el caso de no cumplirse las hipótesis, puesto que siempre es posible expresar las funciones $h(x)$ como un polinomio en x y x como un polinomio en t mediante su serie de Taylor.
- Por otro lado, es posible encontrar sencillos ejemplos de funciones que no son polinomios, $h(x)$ o x , para las cuales se comprueba que “el cálculo de la alinealidad dinámica introduce errores mayores que el cálculo de la derivada de la alinealidad estática”. Tras el estudio que se realiza a continuación para el operador retardo, se utilizarán distintas funciones para evaluar los errores cometidos en la discretización. Entre estas funciones encontraremos los ejemplos mencionados.

2.5.2 Discretización del operador retardo

En los desarrollos que se realizarán a continuación utilizaremos la serie de Taylor de una función $x(t)$ alrededor de τ con la notación

$$x(t) = x_\tau + x_\tau^1 h + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_\tau^i h^i}{i!}, \quad (2.159)$$

donde

$$h = t - \tau,$$

$$x_\tau = x(\tau), \quad (2.160)$$

$$x_\tau^i = \left. \frac{d^i}{dt^i} (x(t)) \right|_{t=\tau}.$$

También en este caso, habrá que diferenciar la notación utilizada para el valor exacto de x_τ y su valor aproximado \tilde{x}_τ . Ambos están relacionados mediante el error

$$\xi(x_\tau, g) = x_\tau - \tilde{x}_\tau, \quad (2.161)$$

donde g es el orden de discretización utilizado.

Retardo de un vector de muestras

En el método propuesto en este capítulo, las muestras de $x(t)$ con retardo se aproximan utilizando

$$x(t - k\tau) \xrightarrow{g, N} \mathbf{x}_k = \mathbf{P}_{0k}(T) \mathbf{x}. \quad (2.162)$$

El cálculo de una muestra retardada se realiza mediante un algoritmo de interpolación. Por esta razón, y con el fin de simplificar la notación a utilizar, en los desarrollos posteriores se considerará el error introducido en esta interpolación sin referirnos al instante $n\Delta$ a partir del cual se calcula la muestra retardada $k\tau$ segundos. Esto requerirá un cambio de notación,

ya que evaluaremos el error introducido en el cálculo de $x(t)$ en el instante τ a partir de la siguiente muestra, que consideramos situada en el instante $n\Delta$, y las anteriores. Teniendo en cuenta este cambio de notación, las relaciones (2. 51)–(2. 54) y la Tabla II.2 permiten expresar la muestra en el instante τ a partir de $g+1$ muestras del vector \mathbf{x} y la distancia normalizada e que separa τ de $n\Delta$. Particularizando para $g=1$:

$$\tilde{x}_\tau = x_n(1 - e) + x_{n-1}(e). \quad (2. 163)$$

La serie de Taylor (2. 159) evaluada en los instantes $n\Delta$ y $(n-1)\Delta$ es

$$x_n = x_\tau + x_\tau^1 e\Delta + x_\tau^2 \frac{(e\Delta)^2}{2} + 0(\Delta^3), \quad (2. 164)$$

$$x_{n-1} = x_\tau + x_\tau^1 (e-1)\Delta + x_\tau^2 \frac{((e-1)\Delta)^2}{2} + 0(\Delta^3). \quad (2. 165)$$

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en (2. 163) se obtiene la siguiente expresión para el error de una discretización de primer orden

$$\xi(x_\tau, 1) = -x_\tau^2 \frac{\Delta^2}{2} e(1 - e) + 0(\Delta^3). \quad (2. 166)$$

Nótese que el término dominante de la expresión anterior, y también el error total si consideramos toda de la serie de Taylor, es cero cuando $e=\{0,1\}$, esto es, cuando la muestra a evaluar coincide con una de las muestras de la función. Puesto que nuestro objetivo es acotar el error, debemos maximizar éste en función de e . Para una discretización de primer orden, el coeficiente que multiplica al término dominante es máximo cuando $e=0.5$. Así, y considerando a partir de ahora únicamente el término dominante del error, fijamos el error máximo en

$$\xi_{max}(x_\tau, 1) = -x_\tau^2 \frac{\Delta^2}{8}. \quad (2. 167)$$

Estas expresiones pueden ser obtenidas para un orden cualquiera repitiendo el proceso anterior. Así, el error de interpolación para los restantes valores de g en función de e aparece a continuación:

$$\xi(x_\tau, 2) = -x_\tau^3 \frac{\Delta^3}{6} e(2 - 3e + e^2) + 0(\Delta^4),$$

$$\xi(x_\tau, 3) = -x_\tau^4 \frac{\Delta^4}{24} e(6 - 11e + 6e^2 - e^3) + 0(\Delta^5), \quad (2.168)$$

$$\xi(x_\tau, 4) = -x_\tau^5 \frac{\Delta^5}{120} e(24 - 50e + 35e^2 - 10e^3 + e^4) + 0(\Delta^6).$$

El error máximo de cada una de las expresiones anteriores es

$$\xi_{max}(x_\tau, 2) \cong -x_\tau^3 \frac{\Delta^3}{16},$$

$$\xi_{max}(x_\tau, 3) = -x_\tau^4 \frac{\Delta^4}{24}, \quad (2.169)$$

$$\xi_{max}(x_\tau, 4) \cong -x_\tau^5 \frac{\Delta^5}{32}.$$

Obsérvese que si la función x es un polinomio de grado g , entonces el error de aproximación es nulo para una discretización de orden g , resultado que es coherente con el criterio de discretización utilizado. Por otro lado, el término dominante en el error es proporcional a Δ^{g+1} , a diferencia de lo que ocurre con el operador derivada, en que éste es proporcional a Δ^g .

Evaluación del retardo de una alinealidad a partir del retardo de la VC

Consideremos la alinealidad $f(x)$ y su desarrollo en serie de Taylor alrededor de x_τ

$$f(x) = f_\tau + g_\tau h + 0(h^2). \quad (2.170)$$

con

$$h = x - x_\tau, \quad (2.171)$$

$$g_\tau = \frac{d}{dx}(f(x)) \Big|_{x=x_\tau}. \quad (2.172)$$

En los siguientes desarrollos, habrá que diferenciar la notación utilizada para el valor exacto de f_τ y su valor aproximado \tilde{f}_τ . Ambos están relacionados mediante el error

$$\xi(f_\tau, g) = f_\tau - \tilde{f}_\tau, \quad (2.173)$$

donde g es el orden de discretización utilizado.

El cálculo del valor de la alinealidad

$$f_\tau = f(x_\tau). \quad (2.174)$$

en un instante que no coincide con $n\Delta$ se puede realizar de dos modos. El primero de ellos consiste en sustituir x_τ por la aproximación \tilde{x}_τ en (2.174), obteniéndose

$$\tilde{f}_\tau = f(\tilde{x}_\tau) = f(x_\tau - \xi(x_\tau, g)). \quad (2.175)$$

Considerando ahora la serie de Taylor (2.170) de la relación anterior con

$$h = -\xi(x_\tau, g), \quad (2.176)$$

determinamos el error cometido en la evaluación de la alinealidad retardada como

$$\xi(f_\tau, g) = g_\tau \xi(x_\tau, g) + \mathcal{O}(\xi(x_\tau, g)^2), \quad (2.177)$$

Obsérvese que si la función x es un polinomio en t de grado g , entonces el error de evaluación de x_τ para una discretización de orden g es nulo y, en consecuencia, también lo es el error de evaluación de la alinealidad.

Así, la evaluación del retardo de una alinealidad siguiendo el esquema

$$x(t - k\tau) \xrightarrow{g, N} \mathbf{P}_{0k}(T)\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{P}_{0k}(T)\mathbf{x}), \quad (2.178)$$

da lugar al error indicado en (2.177).

Evaluación del retardo de una alinealidad en el método propuesto

En el método propuesto en este capítulo, es posible calcular el retardo de una alinealidad directamente a partir de las muestras de la alinealidad siguiendo el esquema

$$f(x(t - k\tau)) \xrightarrow{g, N} \mathbf{P}_{0k}(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2. 179)$$

La determinación del error introducido al evaluar el retardo de este modo se realiza sustituyendo $x(t)$ por $f(x(t))$ en las expresiones (2. 166) a (2. 169) según el orden de discretización usado. Así, utilizando el subíndice DTA–Gear para diferenciar entre la formulación actual y la anterior, este error es

$$\xi_{\text{DTA-Gear}}(f_\tau, g) = -f_\tau^{g+1} \Delta^{g+1} c_{eg} + 0(\Delta^{g+2}), \quad (2. 180)$$

donde, para abreviar la notación, el coeficiente que multiplica al término dominante se ha substituido por la constante c_{eg} . Obsérvese que si la función $f(x(t))$ es un polinomio en t de grado g , entonces el error de aproximación es nulo para una discretización de orden g .

Dado que nuestro objetivo es comparar el error en los dos modos de evaluar el retardo de la alinealidad, debemos expresar la derivada de f respecto a t que aparecen en (2. 180) en función de la derivada de x respecto a t que aparecen en (2. 177). Utilizando esta relación, que viene dada por (2. 156) substituyendo h por f y n por τ , reescribimos el error (2. 180) como

$$\xi_{\text{DTA-Gear}}(f_\tau, g) = \left[\sum_{i=1}^g k_{ig} g_\tau^i x_\tau^{g+1-i} \right] \Delta^{g+1} c_{eg} + \xi(f_\tau, g), \quad (2. 181)$$

pudiéndose comparar ahora los errores de discretización de ambas formulaciones.

Sumario

Los resultados obtenidos al evaluar el error introducido por la discretización del operador retardo son los siguientes.

- a) **El cálculo del retardo de x utilizando una discretización de orden g es exacto si x es un polinomio en t de grado g .**
- b) **El cálculo del retardo de la alinealidad f a partir del retardo de x utilizando una discretización de orden g , es exacto si x es un polinomio en t de grado g .**
- c) **El cálculo del retardo de la alinealidad f a partir de las muestras de f , utilizando una discretización de orden g , es exacto si $f(x(t))$ es un polinomio en t de grado g . Si $f(x)$ es un polinomio en x de grado m , y x un polinomio en t de grado n , entonces, el cálculo es exacto si $mn \leq g$. Esta última afirmación admite la siguiente lectura equivalente: el cálculo es exacto si x es un polinomio en t de grado $n \leq \frac{g}{m}$.**

De estos resultados se derivan las siguientes conclusiones:

- Por un lado, parece que se está tratando de afirmar que “el cálculo de la alinealidad f a partir del retardo de x introduce errores menores que el cálculo de la alinealidad f a partir de las muestras de f ”. No obstante, esta afirmación está sujeta a dos hipótesis: que $f(x)$ sea un polinomio en x y x un polinomio en t . Parece razonable que esta afirmación sea cierta aún en el caso de no cumplirse las hipótesis, puesto que siempre es posible expresar las funciones $f(x)$ como un polinomio en x y x como un polinomio en t mediante su serie de Taylor.
- Por otro lado, es posible encontrar sencillos ejemplos de funciones que no son polinomios, $f(x)$ o x , para las cuales “el cálculo de la alinealidad f a partir del retardo de x introduce errores mayores que el cálculo de la alinealidad f a partir de las muestras de f ”.

A continuación se evalúa el error cometido por los operadores derivada y retardo en la evaluación de distintas funciones de prueba. Los resultados confirmarán las conclusiones aquí expuestas.

2.5.3 Evaluación sobre funciones de prueba

El estudio teórico realizado con anterioridad ha acotado el error introducido en la discretización del operador derivada y retardo. A continuación utilizaremos estos operadores sobre funciones analíticas, de modo que podremos calcular de forma exacta el error de discretización cometido, al tiempo que se validarán las expresiones de cota de error obtenidas.

La elección de las funciones de prueba no ha sido arbitraria. En el método DTA–Gear los operadores derivada y retardo se aplican sobre señales periódicas. Éstas admiten su descomposición en serie de Fourier. Siendo así, las señales senoidales son una buena función para testear un método de discretización. Sin embargo, los errores introducidos en la discretización de cada uno de los armónicos pueden ser tales que se cancelen entre ellos. Así, aparece la alternativa de utilizar funciones de prueba analíticas que por sí solas, y no como combinación entre ellas, se aproximen a la señal periódica en una determinada zona. Entre éstas se estudiarán las funciones potencia directa, x^n , e inversa, $\sqrt[n]{x}$, con n entero.

En adelante, cada una de las funciones de prueba, senoidales y de potencia directa e inversa, aparecerá con la notación x si se trata de la función analítica y \mathbf{x} si se trata de su vector de muestras. Estas funciones de prueba se emplearán en el cálculo de la derivada de un vector de muestras según

$$\frac{d}{dt}(x(t)) \xrightarrow{g, N} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{x}, \quad (2.182)$$

y en la evaluación de una alinealidad dinámica utilizando

$$f(x, \dot{x}) = g(x)\dot{x} \xrightarrow{g, N} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}] = \mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{x}]. \quad (2.183)$$

Los resultados obtenidos al evaluar esta última expresión se compararán con los obtenidos al calcular la derivada de una alinealidad estática mediante

$$\dot{h}(x) = \frac{d}{dt}(h(x)) \xrightarrow{g,N} \mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (2.184)$$

Estas funciones de prueba se emplearán también en el cálculo del retardo de un vector de muestras según

$$x(t - k\tau) \xrightarrow{g,N} \mathbf{x}_k = \mathbf{P}_{0k}(T)\mathbf{x}, \quad (2.185)$$

y en el cálculo del retardo de una alinealidad a partir de la VC retardada

$$x(t - k\tau) \xrightarrow{g,N} \mathbf{P}_{0k}(T)\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{P}_{0k}(T)\mathbf{x}). \quad (2.186)$$

Los resultados obtenidos al evaluar esta última expresión se compararán con los obtenidos al calcular el retardo de forma directa utilizando

$$f(x(t - k\tau)) \xrightarrow{g,N} \mathbf{P}_{0k}(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.187)$$

Funciones senoidales

Operador derivada

Empecemos aproximado la primera derivada de un seno, de amplitud y frecuencia angular unidad, con $N=20$ muestras de una discretización de Gear de orden $g=\{1 \dots 4\}$. En las Fig. 2. 14 y Fig. 2. 15 aparece simultáneamente el error según (2. 144) y el error del término dominante de la serie de Taylor según (2. 148). Se comprueba una disminución en el error máximo de casi dos órdenes de magnitud al variar de $g=1$ a $g=4$.

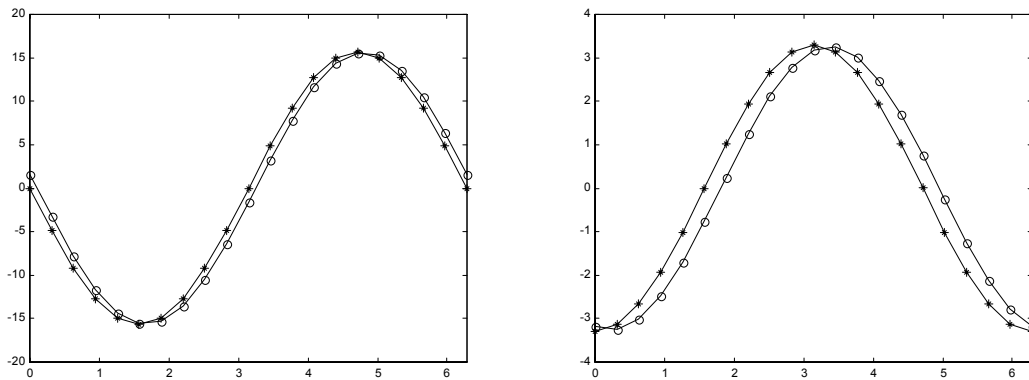


Fig. 2. 14. Error (%) en la derivada de $N=20$ muestras de un seno con Gear-1 (izq.) y Gear-2 (der.).

El error exacto (o) aparece junto al término dominante del error (*)

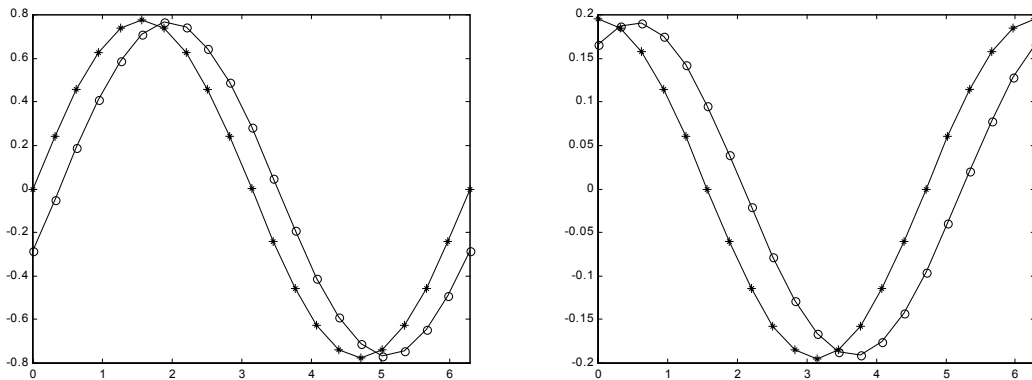


Fig. 2. 15. Error (%) en la derivada de $N=20$ muestras de un seno con Gear-3 (izq.) y Gear-4 (der.).

El error exacto (o) aparece junto al término dominante del error (*)

El aumento del número de muestras conlleva una disminución de Δ en (2. 148). Así, al doblar el número de muestras la disminución del error es de 2^g comprobándose nuevamente las ventajas de una discretización de orden mayor.

El cálculo del error en la derivada i -ésima de un seno se puede realizar de forma analítica para las tres primeras derivadas, siendo inmediato obtener el resto de derivadas a partir de éstas. En primer lugar aparecen las expresiones obtenidas al utilizar (2. 144) y (2. 148) repetidas veces y a continuación se analizan estos resultados. Así, partiendo de

$$x = \sin(t), \quad (2. 188)$$

sus tres primeras derivadas para una discretización Gear-1 son

$$\dot{x} = \cos(t) + k_1 \sin(t) + 0(\Delta^2), \quad (2.189)$$

$$\ddot{x} = -\sin(t) + 2k_1 \cos(t) + 0(\Delta^2), \quad (2.190)$$

$$\ddot{\ddot{x}} = -\cos(t) - 3k_1 \sin(t) + 0(\Delta^2), \quad (2.191)$$

para Gear-2

$$\dot{x} = \cos(t) + k_2 \cos(t) + 0(\Delta^3), \quad (2.192)$$

$$\ddot{x} = -\sin(t) - 2k_2 \sin(t) + 0(\Delta^3), \quad (2.193)$$

$$\ddot{\ddot{x}} = -\cos(t) - 3k_2 \cos(t) + 0(\Delta^3), \quad (2.194)$$

para Gear-3

$$\dot{x} = \cos(t) - k_3 \sin(t) + 0(\Delta^4), \quad (2.195)$$

$$\ddot{x} = -\sin(t) - 2k_3 \cos(t) + 0(\Delta^4), \quad (2.196)$$

$$\ddot{\ddot{x}} = -\cos(t) + 3k_3 \sin(t) + 0(\Delta^4), \quad (2.197)$$

y, finalmente, para Gear-4

$$\dot{x} = \cos(t) - k_4 \cos(t) + 0(\Delta^5), \quad (2.198)$$

$$\ddot{x} = -\sin(t) + 2k_4 \sin(t) + 0(\Delta^5), \quad (2.199)$$

$$\ddot{\ddot{x}} = -\cos(t) + 3k_4 \cos(t) + 0(\Delta^5), \quad (2.200)$$

con

$$k_g = \frac{\Delta^g}{(g+1)}. \quad (2.201)$$

De las expresiones anteriores se puede realizar un estudio cuantitativo y otro cualitativo. Así, fijándonos únicamente en el módulo del error, se observa que el error en la derivada i -ésima es i veces el error en la primera derivada para todos los órdenes de discretización. De muy interesantes se puede cualificar los resultados obtenidos al observar la evolución del error desde un punto de vista cualitativo. Así, ya que en todos los casos la derivada i -ésima aparece como la suma de dos señales senoidales, siempre es posible expresar esta derivada como una sola señal senoidal. El resultado de esta operación es sorprendente y lleva a los siguientes resultados:

- El operador derivada de primer orden **Gear-1** aplicado sobre una señal senoidal **es equivalente a retardar la derivada analítica**. Así, el error de discretización Gear-1 no altera la amplitud de la señal, únicamente modifica su fase en un valor

$$\theta = -\text{atan}(ik_1). \quad (2. 202)$$

- El operador derivada de segundo orden **Gear-2** aplicado sobre una señal senoidal **es equivalente a amplificar la derivada analítica**. Así, el error de discretización Gear-2 no altera la fase de la señal, únicamente varia su amplitud en un factor

$$c = (1 + ik_2). \quad (2. 203)$$

- El operador derivada de tercer orden **Gear-3** aplicado sobre una señal senoidal **es equivalente a avanzar la derivada analítica**. Así, el error de discretización Gear-3 no altera la amplitud de la señal, únicamente modifica su fase en un valor

$$\theta = \text{atan}(ik_2). \quad (2. 204)$$

- El operador derivada de cuarto orden **Gear-4** aplicado sobre una señal senoidal **es equivalente a atenuar la derivada analítica**. Así, el error de discretización Gear-4 no altera la fase de la señal, únicamente varia su amplitud en un factor

$$c = (1 - ik_4). \quad (2. 205)$$

Estos resultados se ven confirmados por las pruebas numéricas. Así, en la Fig. 2. 16 es perfectamente visible el retardo y la amplificación introducidos por una discretización Gear-1 y Gear-2 respectivamente al calcular la derivada octava.

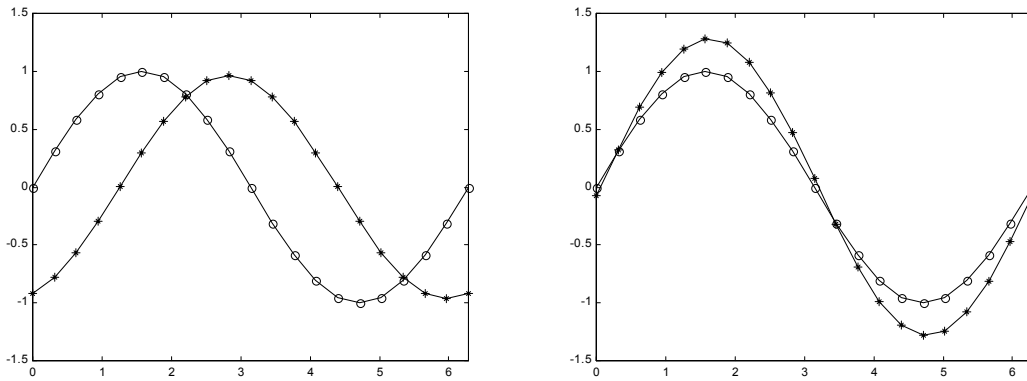


Fig. 2. 16. Retardo y amplificación introducido por una discretización de Gear-1 (izq.) y Gear-2 (der.).
La octava derivada analítica (o) aparece junto a la octava derivada aproximada (*)

El conocimiento de estos resultados permite idear estrategias de disminución del error al aplicar repetidas veces el operador derivada. Así, como primer ejemplo, una combinación de discretizaciones de primer y tercer orden disminuyen el desfase introducido en la discretización. Otro ejemplo lo tenemos en la atenuación de la señal introducida en la discretización de orden cuarto, que puede ser compensada multiplicando por el inverso de (2. 205). Ya que estas operaciones de cancelación de error tan sólo se hacen nulas para un armónico, **un criterio razonable, que globaliza los resultados obtenidos hasta el momento, puede ser utilizar discretizaciones Gear-4 con una compensación de la amplificación que anule el error para el primer armónico.**

Pasemos a continuación a evaluar los errores cometidos en el cálculo de las alinealidades (2. 183) y (2. 184). El tipo de alinealidad escogido es la que aparece en el oscilador de Van der Pol que se estudiará mas adelante. En las Fig. 2. 17 y Fig. 2. 18 se muestra el error cometido al evaluar la alinealidad dinámica

$$f(x, \dot{x}) = (x^2 - 1)\dot{x}, \quad (2. 206)$$

y la derivada de la alinealidad estática

$$h(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right), \quad (2. 207)$$

para discretizaciones Gear-1 y Gear-4. La comparación entre las gráficas de cada figura confirma los resultados teóricos. Estos indican que si la alinealidad $h(x)$ es un polinomio de grado tres, entonces la derivada sólo es exacta para un número de término de la serie de Taylor de x tres veces menor que los necesarios para que la evaluación de $f(x, \dot{x})$ sea exacta.

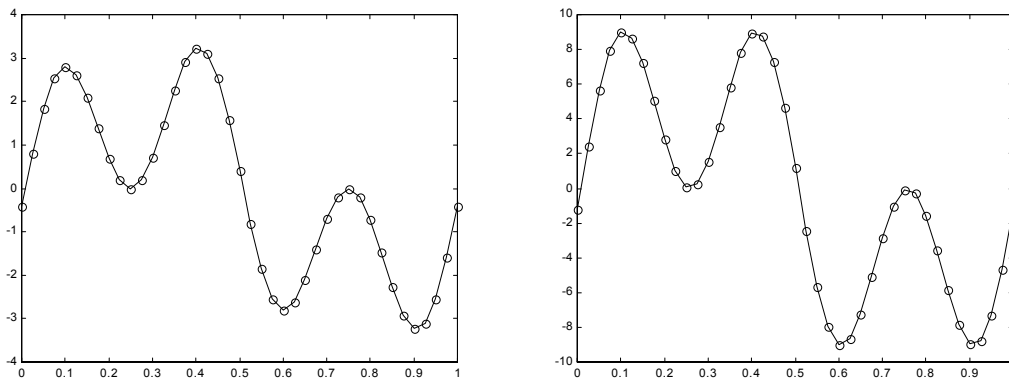


Fig. 2. 17. Error (%) en la evaluación de una alinealidad dinámica (izq.) y la derivada de una alinealidad estática (der.) utilizando Gear-1 y $N=40$ muestras.

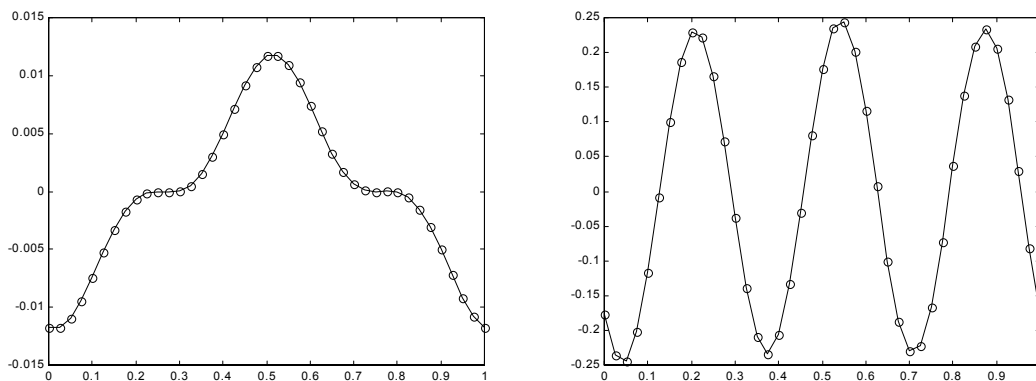


Fig. 2. 18. Error (%) en la evaluación de una alinealidad dinámica (izq.) y la derivada de una alinealidad estática (der.) utilizando Gear-4 y $N=40$ muestras.

Operador retardo

En la evaluación del operador retardo utilizaremos un esquema parecido, aunque en el método DTA–Gear no se aplica nunca repetidas veces el operador retardo, sino que a un retardo distinto le corresponde una matriz de discretización distinta. Con estas consideraciones, empecemos aproximado el retardo de un seno, de amplitud y frecuencia angular unidad, con $N=20$ muestras de una discretización de Gear de orden $g=\{1 \dots 4\}$. En todos los casos se ha supuesto que el retardo se encuentra a medio camino entre dos muestras, esto es $e=0.5$. En las Fig. 2. 19 y Fig. 2. 20 aparece el error de discretización del operador retardo.

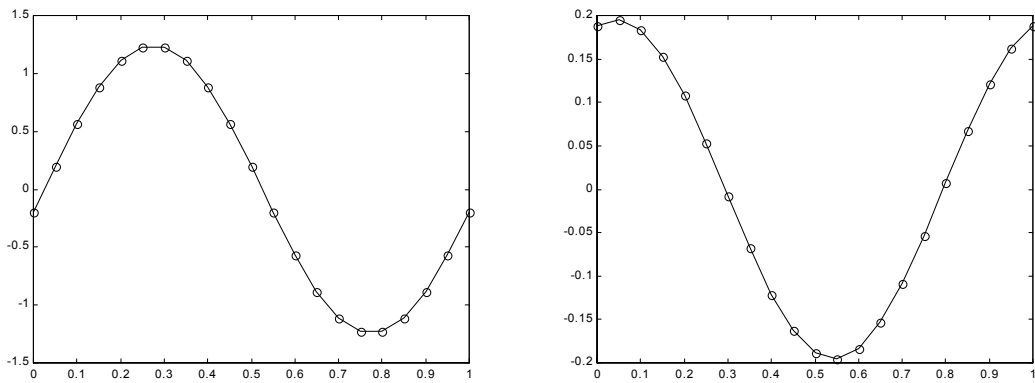


Fig. 2. 19. Error (%) en el retardo de $N=20$ muestras de un seno con Gear–1 (izq.) y Gear–2 (der.).

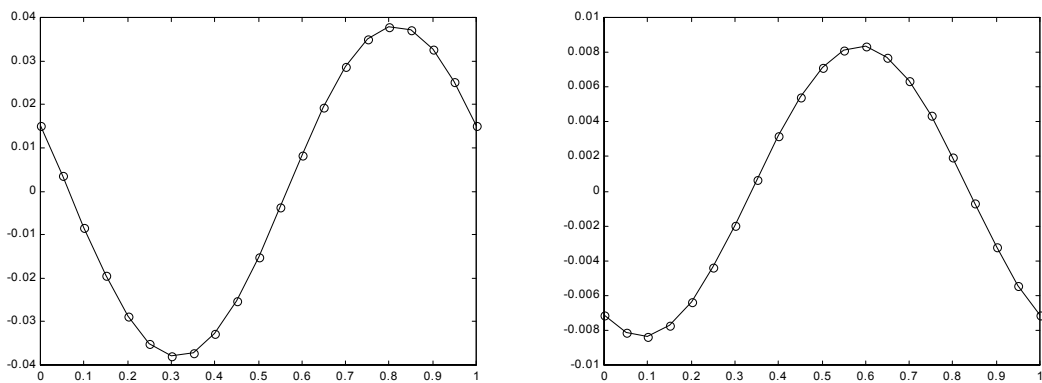


Fig. 2. 20. Error (%) en el retardo de $N=20$ muestras de un seno con Gear–3 (izq.) y Gear–4 (der.).

En estas gráficas se comprueba que el error realizado en la discretización del operador retardo es inferior al cometido por el operador derivada para un mismo orden de discretización. Efectivamente, al comparar (2. 148) con (2. 167) y (2. 169) se verifica que la diferencia entre los dos errores se encuentra en la potencia de Δ (mayor en el operador retardo) y en un coeficiente (menor para el operador retardo).

Este resultado parece evidenciar que en el método DTA–Gear el error en la discretización global proviene mayoritariamente del operador derivada, especialmente si hay que utilizar este operador repetidas veces. Efectivamente, en el método DTA–Gear no se aplica nunca repetidas veces el operador retardo, a diferencia del operador derivada que al ser aplicado n veces introduce un error n veces mayor. Por este motivo no es necesario realizar un estudio cualitativo del error introducido por el operador retardo¹⁵.

Pasemos a continuación a evaluar los errores cometidos en el cálculo del retardo de las alinealidades según (2. 186) y (2. 187), con la alinealidad estática que aparece al modelar el oscilador de Van der Pol. En la Fig. 2. 21 y Fig. 2. 22 se muestra el error cometido al evaluar el retardo de la alinealidad aproximando primero el retardo de la VC según

$$h(\tilde{x}_\tau) = \left(\frac{\tilde{x}_\tau^3}{3} - \tilde{x}_\tau \right), \quad (2. 208)$$

y al evaluar el retardo directamente sobre las muestras de h

$$\tilde{h}_\tau, \quad (2. 209)$$

para discretizaciones Gear–1 y Gear–4.

La observación de los resultados merece idénticos comentarios que los realizados al evaluar la derivada de una alinealidad.

¹⁵ De hecho, se obtienen resultados cualitativamente similares a los obtenidos para el operador derivada. La diferencia estriba en que para el operador retardo son los órdenes de discretización impares los que alteran el módulo de la señal y los órdenes pares los que alteran la fase.

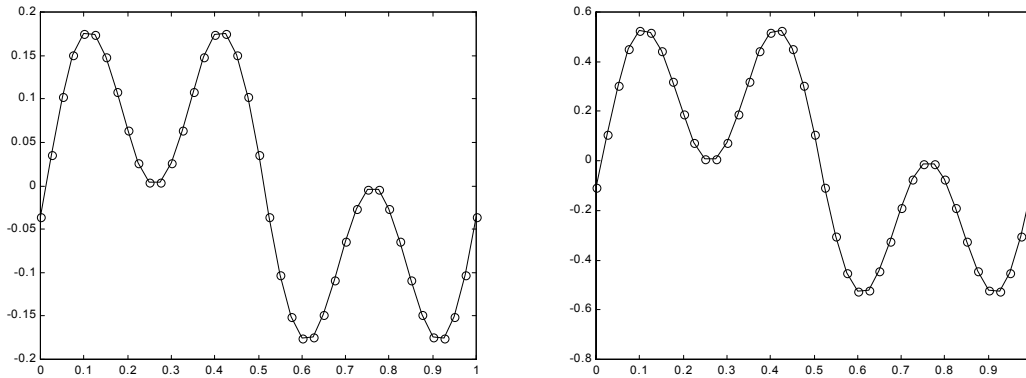


Fig. 2. 21. Error (%) en el retardo de una alinealidad a partir de las muestras de la VC (izq.) y a partir de las muestras de la alinealidad (der.) utilizando Gear-1 y $N=40$ muestras.

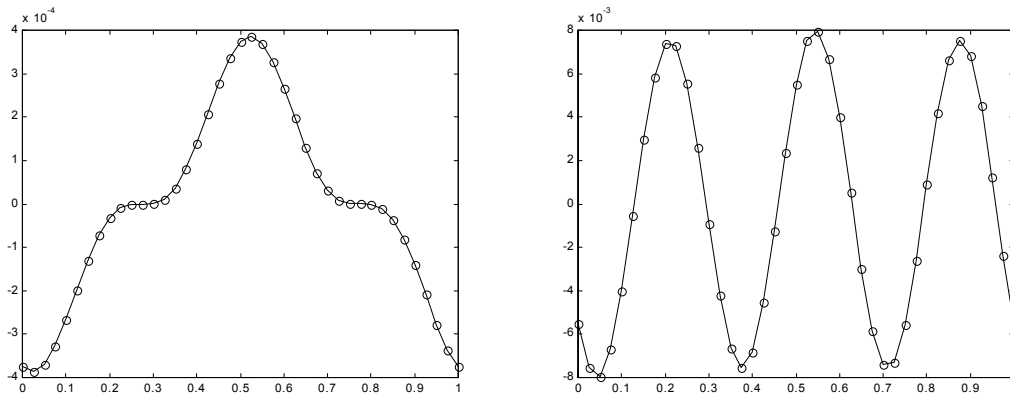


Fig. 2. 22. Error (%) en el retardo de una alinealidad a partir de las muestras de la VC (izq.) y a partir de las muestras de la alinealidad (der.) utilizando Gear-4 y $N=40$ muestras.

Funciones en potencia directa e inversa

En su momento se comentaba el hecho que la posibilidad de descomponer una señal periódica en suma de señales senoidales hacía que el seno fuera una excelente señal de prueba. Al considerar varios armónicos, el error total se puede acotar como la suma del módulo del error introducido por cada uno de los armónicos, dando una cota que en algunos casos puede ser muy superior al error real. Existe la posibilidad que el módulo y la fase de estos armónicos sean tales que la función se pueda aproximar en una determinada zona a partir de una función en potencia. Acotando el error introducido por esta función en potencia se consigue una mejor cota del error global.

Potencia directa

El error introducido al evaluar el error de discretización al considerar una VC como una potencia directa es plenamente conocido a partir de las expresiones obtenidas en los apartados anteriores. Las discretizaciones son exactas al considerar una discretización de orden igual a la potencia directa. Estos resultados se extienden fácilmente a la discretización de alinealidades, cuando éstas se expresan como un polinomio en x . En este caso, los resultados son mucho mejores al evaluar una alinealidad dinámica (en lugar de la derivada de una alinealidad estática) y al calcular el retardo de una alinealidad a partir de las muestras de la VC (en lugar de las muestras de la misma alinealidad). Sin embargo, supongamos que la alinealidad es del tipo

$$h(x) = \sqrt[n]{x} . \quad (2. 210)$$

Si la VC se comporta como una potencia directa

$$x = t^n , \quad (2. 211)$$

entonces la dependencia de la alinealidad con el tiempo es

$$h(t) = t . \quad (2. 212)$$

En este caso particular, la evaluación directa de la derivada o el retardo sobre $h(x)$ es exacta sea cual sea el orden de discretización, mientras que el cálculo a partir de la derivada o el retardo sobre x introducirá un error inevitable dependiendo de la relación entre la potencia n y el orden de discretización g .

Potencia inversa

Los mismos razonamientos anteriores son aplicables al considerar una alinealidad del tipo

$$h(x) = x^n , \quad (2. 213)$$

con una VC que se comporta como una potencia inversa

$$x = \sqrt[n]{t} . \quad (2. 214)$$

La dependencia de la alinealidad con el tiempo es

$$h(t) = t, \quad (2.215)$$

con lo cual la evaluación directa de la derivada o el retardo sobre $h(x)$ es exacta sea cual sea el orden de discretización.

En las Fig. 2. 23 a Fig. 2. 26 se muestra el error al evaluar la alinealidad dinámica

$$f(x, \dot{x}) = x^2 \dot{x}, \quad (2.216)$$

junto al error de evaluación de la derivada de la alinealidad estática

$$h(x) = \frac{x^3}{3}, \quad (2.217)$$

para distintos exponentes inversos y distintos órdenes de discretización¹⁶. Estos resultados confirman que en algunos casos la VC es tal que es posible obtener mejores resultados de aproximación al utilizar una alinealidad estática que una alinealidad dinámica para modelar, por ejemplo, el oscilador de Van der Pol. Además, sin que se haya llegado a demostrar de forma analítica, es posible afirmar que el error cometido al derivar una función estática, en comparación con el cometido al evaluar una alinealidad dinámica, es siempre menor cuando la VC x es una función en potencia inversa de t y la alinealidad $h(x)$ una función en potencia directa de x . A continuación se analiza el oscilador de Van der Pol utilizando distintos modelos circuitales que incorporan estos dos tipos de alinealidad

¹⁶ Los resultados al discretizar el operador retardo son cualitativamente idénticos.

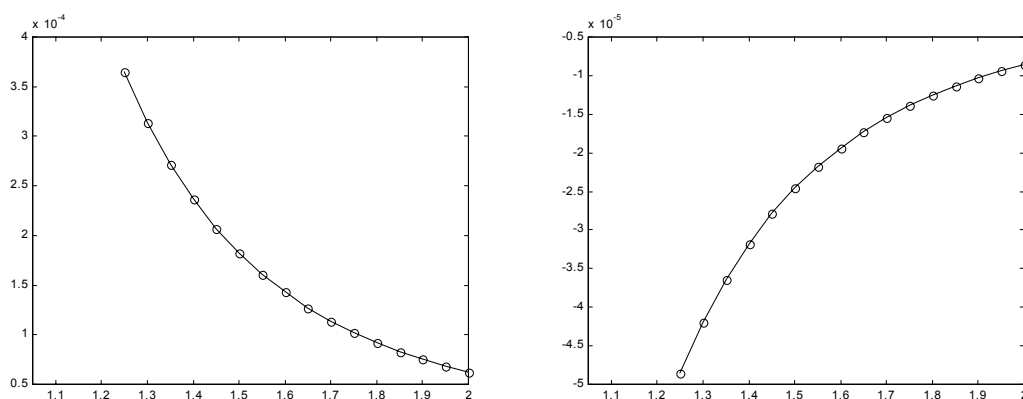


Fig. 2. 23. Error (%) en la evaluación de una alinealidad dinámica (izq.) y la derivada de una alinealidad estática (der.) utilizando Gear-4 y una VC con potencia inversa 2.

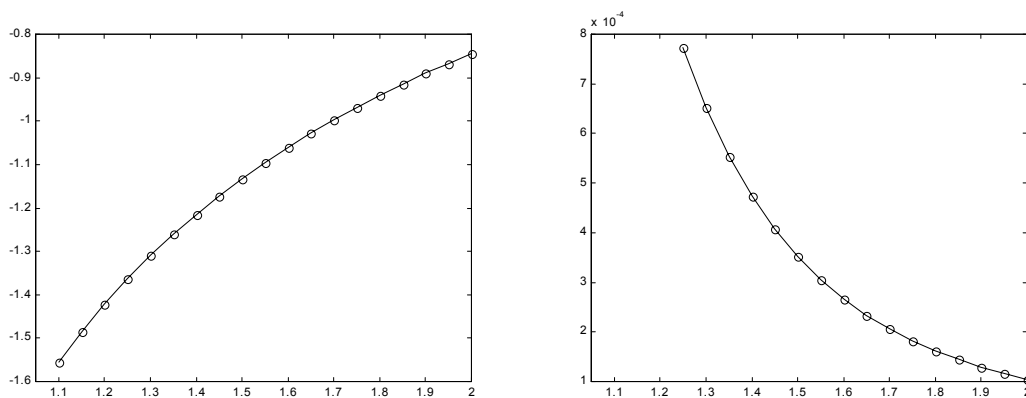


Fig. 2. 24. Error (%) en la evaluación de una alinealidad dinámica utilizando Gear-1 (izq.) y Gear-4 (der.) con una VC con potencia inversa 3 (el error de la derivada de la alinealidad estática es nulo).

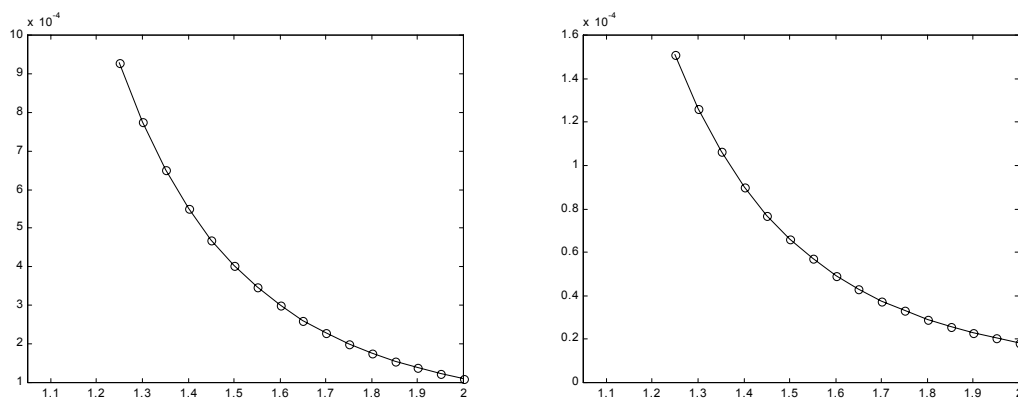


Fig. 2. 25. Error (%) en la evaluación de una alinealidad dinámica (izq.) y la derivada de una alinealidad estática (der.) utilizando Gear-4 y una VC con potencia inversa 4.

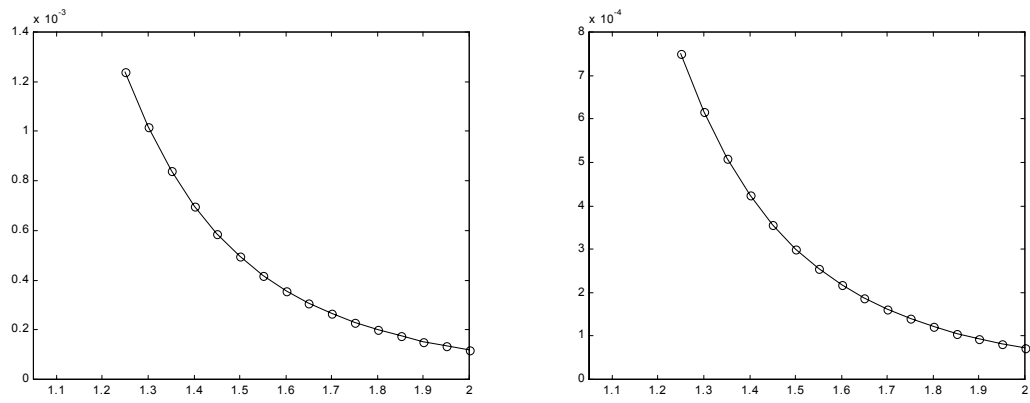


Fig. 2. 26. Error (%) en la evaluación de una alinealidad dinámica (izq.) y la derivada de una alinealidad estática (der.) utilizando Gear-4 y una VC con potencia inversa 10.

2.6 Análisis del oscilador de Van der Pol

En esta sección se aplicará el método de análisis DTA–Gear a la determinación del RP de un circuito ampliamente estudiado en el campo de circuitos no lineales. La ecuación de Van de Pol

$$\ddot{x} + x + \mu(x^2 - 1)\dot{x} = 0, \quad (2.218)$$

modela el comportamiento de ciertos osciladores. Esta ecuación admite más de un modelo circuital, dependiendo del tipo de alinealidad y de la VC. Cada uno de estos modelos circuitales da lugar a una formulación DTA–Gear distinta, apareciendo los tres tipos de alinealidad estudiados: alinealidad dinámica y alinealidad estática con una y dos VC.

2.6.1 Alinealidad dinámica

El modelo circuital de la Fig. 2. 27 permite obtener de forma directa la ecuación de Van der Pol, sustituyendo i_L por x . De este modo, el sistema de ecuaciones a resolver contiene una alinealidad dinámica. Este es el modelo circuital utilizado en [Bar-98] y [Mar-90].

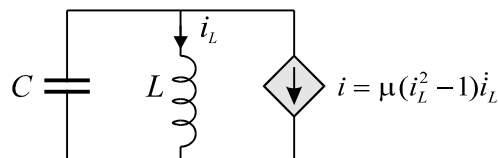


Fig. 2. 27. Modelo circuital del oscilador de Van der Pol con alinealidad dinámica.

La VC i_L equivale a x en la ecuación de Van der Pol.

El método DTA–Gear formula las ecuaciones de equilibrio aplicando superposición en el dominio transformado de Laplace. Trabajando con valores normalizados, y sustituyendo i_L por x , expresamos la VC en función de la fuente controlada del modo

$$X(s) = H(s)F(X, \dot{X}), \quad (2.219)$$

con

$$H(s) = -\frac{1}{s^2 + 1}. \quad (2. 220)$$

Multiplicando toda la expresión (2. 219) por el denominador de $H(s)$ obtenemos la ecuación de equilibrio

$$(s^2 + 1)X(s) + F(X, \dot{X}) = 0, \quad (2. 221)$$

a partir de la cual es inmediato obtener el sistema de ecuaciones discretizado, que en su forma matricial se escribe

$$[\mathbf{P}_{20}(T) + \mathbf{P}_{00}] \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0. \quad (2. 222)$$

La descomposición de la alinealidad estática como el producto

$$f(x, \dot{x}) = g(x)\dot{x} = \mu(x^2 - 1)\dot{x}, \quad (2. 223)$$

permite obtener la formulación DTA–Gear con sólo las muestras de x como incógnitas utilizando las expresiones derivadas en el capítulo 2.4.2. Así, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$[\mathbf{P}_{20}(T) + \mathbf{P}_{00}] \mathbf{x} + [\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{x}] = 0. \quad (2. 224)$$

La obtención del Jacobiano del sistema de ecuaciones es inmediata una vez conocidas las matrices que intervienen en (2. 224) y la derivada de $g(x)$ de (2. 223)

$$g'(x) = 2\mu x. \quad (2. 225)$$

2.6.2 Alinealidad estática con dos variables de control

La alinealidad del modelo circuital de la Fig. 2. 27 admite ser controlada por dos VC. Efectivamente, la derivada de la corriente que circula por el inductor es proporcional a la tensión en terminales del mismo. Así, el modelo circuital de la Fig. 2. 28 con una alinealidad controlada por dos VC permite obtener la ecuación de Van der Pol, sustituyendo i_L por x y v/L por la derivada de i_c .

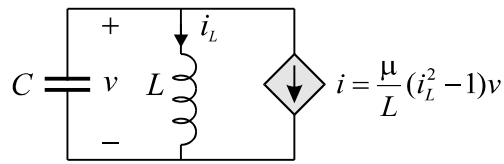


Fig. 2. 28. Modelo circuital del oscilador de Van der Pol con alinealidad estática y dos VC.

La VC i_L equivale a x en la ecuación de Van der Pol.

Con la utilización de valores normalizados, y la sustitución de i_L por x_a y de v por x_b , definimos la alinealidad

$$f(x_a, x_b) = \mu(x_a^2 - 1)x_b, \quad (2. 226)$$

utilizando la cual obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en el dominio transformado de Laplace

$$X_a(s) = H(s)F(X_a, X_b), \quad (2. 227)$$

$$X_b(s) = Z(s)F(X_a, X_b), \quad (2. 228)$$

con $H(s)$ según (2. 220) y

$$Z(s) = -\frac{s}{s^2 + 1}. \quad (2. 229)$$

Multiplicando el sistema de ecuaciones por el denominador de $H(s)$ obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$(s^2 + 1)X_a(s) + F(X_a, X_b) = 0, \quad (2. 230)$$

$$(s^2 + 1)X_b(s) + sF(X_a, X_b) = 0, \quad (2. 231)$$

a partir del cual se obtiene la formulación DTA–Gear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{20}(T) + \mathbf{P}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{20}(T) + \mathbf{P}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} \\ \mathbf{P}_{10}(T) \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = \mathbf{0}. \quad (2. 232)$$

El Jacobiano del sistema de ecuaciones anterior se obtiene utilizando las expresiones derivadas en el capítulo 2.4.1 y el conocimiento de las derivadas parciales de (2. 226)

$$f'_a(x_a, x_b) = 2\mu x_a x_b, \quad (2. 233)$$

$$f'_b(x_a, x_b) = \mu(x_a^2 - 1). \quad (2. 234)$$

Obsérvese que el sistema de ecuaciones (2. 232) se ha obtenido utilizando el teorema de sustitución, mediante el cual consideramos la fuente controlada no lineal como una excitación del circuito. Así, toda VC es proporcional a esta excitación en el dominio transformado de Laplace. Sin embargo, aunque este es el método descrito para obtener las ecuaciones de equilibrio, existe la posibilidad de utilizar un sistema de ecuaciones equivalente. Efectivamente, utilizando la relación entre las dos VC descrita por la relación constitutiva del inductor, podemos reemplazar (2. 228) y (2. 231) por

$$X_b(s) = sX_a(s). \quad (2. 235)$$

Así, una formulación alternativa a (2. 232) es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{20}(T) + \mathbf{P}_{00} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P}_{10}(T) & \mathbf{P}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = \mathbf{0}. \quad (2. 236)$$

Nótese que en esta última formulación, la ecuación original de Van der Pol original se ha transformado en el siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\ddot{x}_a + x_a + \mu(x_a^2 - 1)x_b = 0, \quad (2. 237)$$

$$x_b = \dot{x}_a. \quad (2. 238)$$

2.6.3 Alinealidad estática con una variable de control

En la Fig. 2. 29. aparece un último modelo circuital a partir del cual se obtiene la ecuación de Van der Pol, sustituyendo v por x .

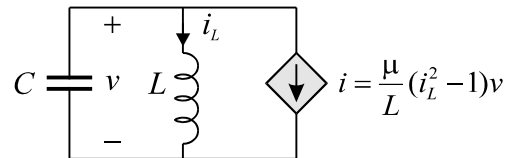


Fig. 2. 29. Modelo circuital del oscilador de Van der Pol con alinealidad estática.

La VC v equivale a x en la ecuación de Van der Pol.

La ecuación de equilibrio de este modelo circuital, utilizado en [Pal-94] y [Rod-98], es

$$\ddot{x} + x + \dot{h}(x) = 0, \quad (2. 239)$$

con

$$h(x) = \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right). \quad (2. 240)$$

Obsérvese que al derivar $h(x)$ se obtiene la ecuación de Van der Pol original. No obstante, el método DTA–Gear se aplica directamente sobre (2. 239), obteniéndose la formulación DTA–Gear para una alinealidad con una VC

$$[\mathbf{P}_{20}(T) + \mathbf{P}_{00}] \mathbf{x} + \mathbf{P}_{10}(T) \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2. 241)$$

La obtención del Jacobiano de este sistema de ecuaciones es inmediata una vez conocidas las matrices que intervienen en él y la derivada de $h(x)$

$$h'(x) = \mu(x^2 - 1). \quad (2. 242)$$

2.6.4 Comparación de resultados

Los sistemas de ecuaciones (2. 224), (2. 232), (2. 236) y (2. 241) han sido resueltos utilizando el método de Gauss–Newton con búsqueda cuadrática y cúbica en la dirección de Newton implementado por MATLAB^{®17}. Se ha realizado un barrido en el número de muestras y el orden de discretización con los valores $\mu=1$ y $\mu=2$. Los resultados obtenidos se pueden resumir del siguiente modo

- Los dos tipos de formulación con dos VC dan lugar a la misma solución, siendo el tiempo de cálculo algo superior en la formulación (2. 232) que en la (2. 236). En la Fig. 2. 30 se representan dos periodos de la forma de onda de las VC de esta formulación.

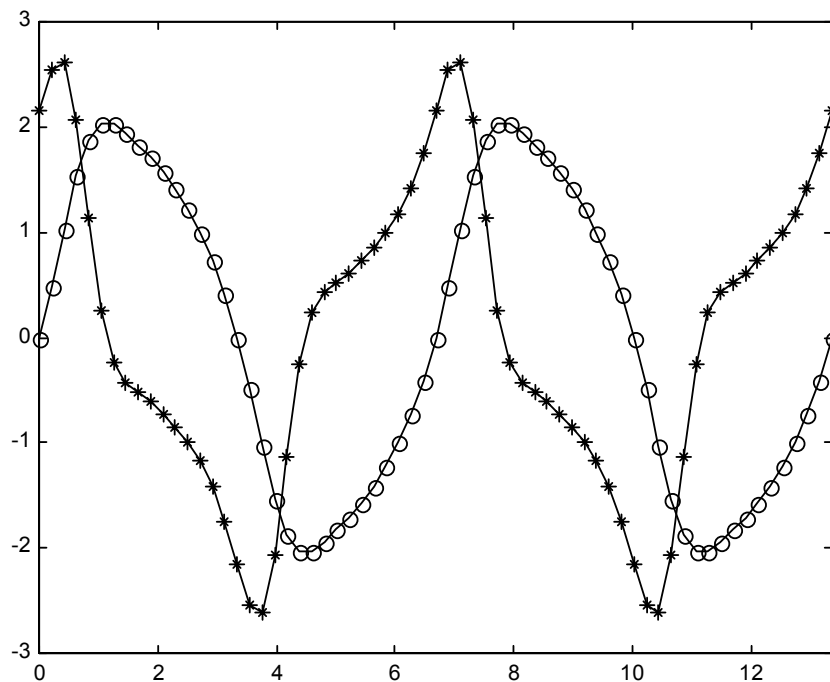


Fig. 2. 30. Solución del oscilador de Van der Pol con alinealidad controlada por dos VC, x_a (o) y x_b (*) con $\mu=1$ y $N=32$ muestras por VC ($T=6.6826$).

¹⁷ Este será el algoritmo iterativo de resolución utilizado en todas las simulaciones que se realicen en esta tesis, ya sea para resolver formulaciones DTA-Gear o HB.

- Las formulaciones con dos VC y con alinealidad dinámica dan lugar también a la misma solución, siendo el tiempo de cálculo unas tres veces inferior en esta última formulación. Esto se explica por el hecho que el número de muestras por VC es fijo en todas las comparaciones, con lo que en la formulación con dos VC el número de incógnitas es doble. Así, de ahora en adelante, sólo se compararán las formulaciones con alinealidad dinámica y estática con una VC.
- Las formulaciones con alinealidad dinámica y estática con una VC necesitan un tiempo de cálculo similar, algo menor en esta última formulación. Las soluciones obtenidas son distintas, convergiendo siempre más rápidamente la formulación con alinealidad estática que dinámica al aumentar el número de muestras o el orden de discretización. Esta convergencia para el periodo de oscilación se ilustra en las Fig. 2. 31 a Fig. 2. 34. Estos resultados completan los obtenidos en el capítulo 2.5 al comparar ambos tipos de formulaciones. Por otro lado, el valor del periodo T coincide con el valor obtenido utilizando HB en [Mar-90] en los cinco primeros dígitos significativos: $T(\mu=1)=6.6633$ y $T(\mu=2)=6.6299$.

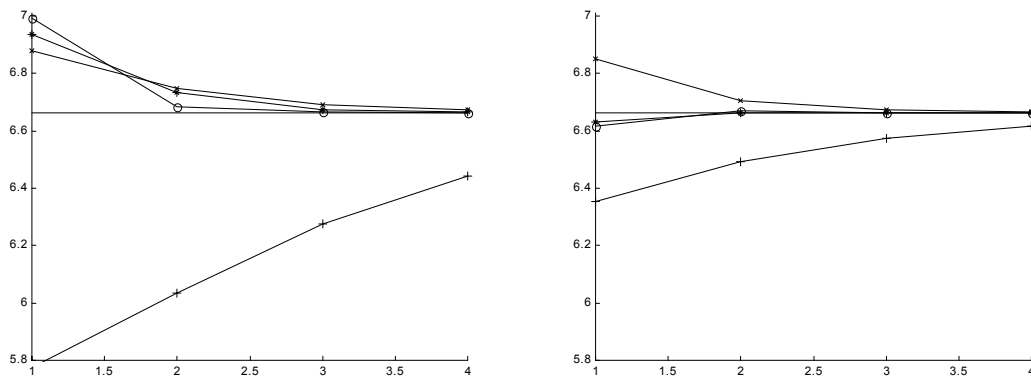


Fig. 2. 31. $\mu=1$. Evolución del periodo de oscilación T en función del orden de discretización g . Alinealidad dinámica (izq.) y estática (der.) con $N=16$ (+), $N=32$ (x), $N=64$ (*) y $N=128$ (o).

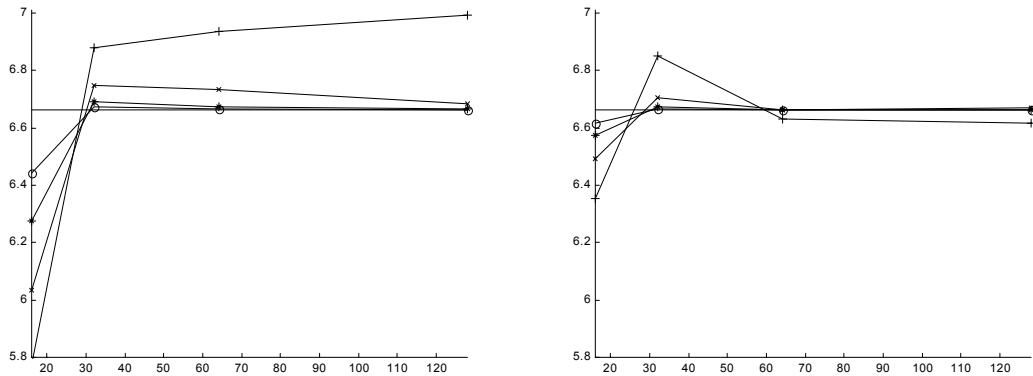


Fig. 2. 32. $\mu=1$. Evolución del periodo de oscilación T en función del número de muestras N .

Alinealidad dinámica (izq.) y estática (der.) con $g=1$ (+), $g=2$ (x), $g=3$ (*) y $g=4$ (o).

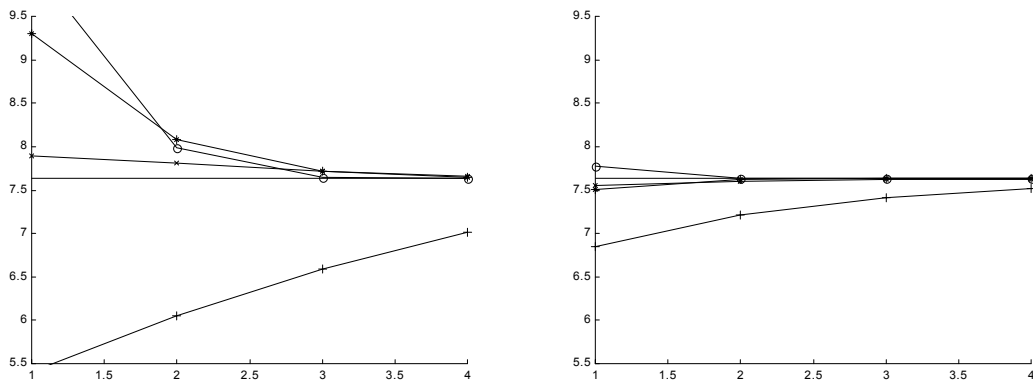


Fig. 2. 33. $\mu=2$. Evolución del periodo de oscilación T en función del orden de discretización g .

Alinealidad dinámica (izq.) y estática (der.) con $N=16$ (+), $N=32$ (x), $N=64$ (*) y $N=128$ (o).

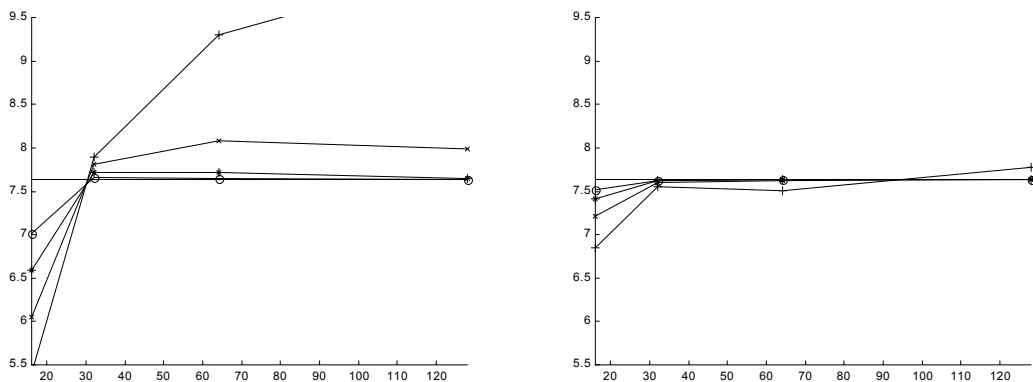


Fig. 2. 34. $\mu=2$. Evolución del periodo de oscilación T en función del número de muestras N .

Alinealidad dinámica (izq.) y estática (der.) con $g=1$ (+), $g=2$ (x), $g=3$ (*) y $g=4$ (o).

2.7 Análisis del circuito de Chua retardado

En esta sección se utilizará el método DTA–Gear para determinar el RP del circuito de Chua retardado (TDCC¹⁸). Este circuito es representativo del tipo de circuitos a los que aplica el método: circuitos no lineales autónomos con retardo. La formulación DTA–Gear que se obtendrá al estudiar el TDCC servirá de punto de partida en los capítulos en que éste se estudie nuevamente. En la Fig. 2.35 aparece una representación circuital de este circuito.

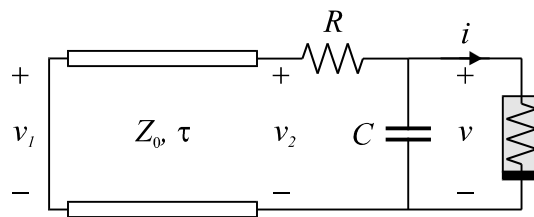


Fig. 2. 35. Circuito de Chua retardado (TDCC).

Los valores de los parámetros que aparecen en el circuito coinciden con [Hos-94], ya que en el siguiente capítulo se compararán los resultados de estudio de la estabilidad con esta referencia. El valor de estos parámetros es $Z_0=42/99$ k Ω , $\tau=50$ μ s, $C=10$ nF y $R=1.82$ k Ω ¹⁹. La característica $i-v$ de la alinealidad aparece representada en la Fig. 2. 36 con $v_a=1$ V, $v_b=8$ V, $m_0=-55/60$ mS, $m_1=-9/22$ mS y $m_2=10$ mS. Con el fin de evitar problemas numéricos que podrían aparecer al tratar con variables de distinto orden de magnitud, estos parámetros han sido normalizados con $R_0=1$ k Ω y $T_0=100$ μ s.

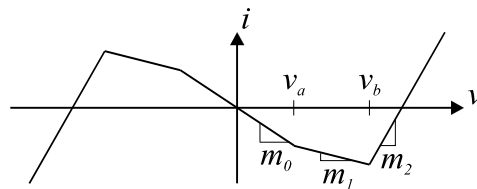


Fig. 2. 36. Característica $i-v$ lineal a tramos de la alinealidad del TDCC.

¹⁸ Acrónimo del anglicismo *Time Delayed Chua's Circuit*.

¹⁹ R se utilizará más adelante como parámetro en función del cual se estudian los cambios en el régimen de funcionamiento del TDCC.

2.7.1 El sistema de ecuaciones discretizado

La línea de transmisión cortocircuitada puede ser sustituida por la impedancia equivalente vista desde v_2

$$Z(s, e^{-2s\tau}) = Z_0 \frac{1 - e^{-2s\tau}}{1 + e^{-2s\tau}}. \quad (2.243)$$

En el método DTA–Gear la alinealidad es sustituida por una fuente de corriente controlada por tensión. Así, el TDCC admite la representación circuital de la Fig. 2.37.

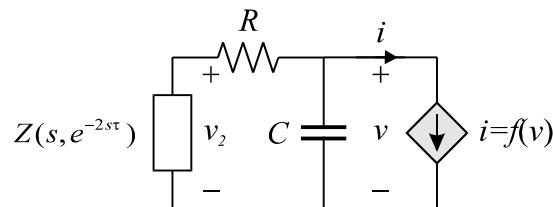


Fig. 2.37. Sustitución de la línea de transmisión por su impedancia equivalente y de la alinealidad por una fuente controlada en el TDCC.

Determinación de la VC

A partir de esta representación circuital obtenemos la ecuación de equilibrio

$$A(s, e^{-s\tau})V(s) + B_1(s, e^{-s\tau})F(V) = 0, \quad (2.244)$$

con

$$A(s, e^{-s\tau}) = 1 + e^{-2s\tau} + (R + Z_0)Cs + (R - Z_0)Cse^{-2s\tau}, \quad (2.245)$$

$$B_1(s, e^{-s\tau}) = (R + Z_0) + (R - Z_0)e^{-2s\tau}. \quad (2.246)$$

Esta ecuación puede ser discretizada utilizando los operadores derivada primera y retardo 2τ obteniéndose la formulación DTA–Gear

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{v} + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (2.247)$$

con

$$\mathbf{A}(T) = \mathbf{P}_{00} + \mathbf{P}_{02}(T) + (R + Z_0)C\mathbf{P}_{10}(T) + (R - Z_0)C\mathbf{P}_{12}(T), \quad (2. 248)$$

$$\mathbf{B}_1(T) = (R + Z_0)\mathbf{P}_{00} + (R - Z_0)\mathbf{P}_{02}(T). \quad (2. 249)$$

Nótese que para la construcción del sistema de ecuaciones únicamente es necesario el conocimiento de las matrices derivada $\mathbf{P}_{10}(T)$ y retardo $\mathbf{P}_{02}(T)$ a partir del número de muestras de la VC, el periodo de oscilación y el orden de discretización.

La inicialización del proceso iterativo de resolución de (2. 241) se realizará con $N=128$ muestras de una señal senoidal de periodo $T=5\tau$, utilizándose una discretización de Gear-2. Conocidos los parámetros del circuito y de la discretización, la matriz derivada se construye utilizando la Tabla II. 1:

$$\mathbf{P}_{10} = 25.6(\text{circ}(3, -4, 1, 0_3, \dots, 0_{127})^T). \quad (2. 250)$$

La construcción de la matriz retardo es algo más laboriosa. En primer lugar hay que determinar la distancia normalizada e_2 del retardo a la siguiente muestra q_2 . Con el valor de e_2 se determina el valor de los elementos con que se construirá la matriz utilizando la Tabla II.2:

$$\begin{bmatrix} d'_{20} \\ d'_{21} \\ d'_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.04 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.72 \\ 0.36 \\ -0.08 \end{bmatrix}. \quad (2. 251)$$

A partir de estos elementos y $q_2=51$ se construye la matriz retardo como

$$\mathbf{P}_{02} \cong \text{circ}(0_0, \dots, 0_{50}, 0.72, 0.36, -0.08, 0_{54}, \dots, 0_{127})^T. \quad (2. 252)$$

Cálculo del Jacobiano

El cálculo del Jacobiano del sistema de ecuaciones se construye utilizando las matrices derivada y retardo calculadas con anterioridad y sus derivadas respecto el periodo de oscilación. La derivada de la matriz derivada es inmediata pues se construye a partir de la matriz derivada multiplicada por un factor $-1/T$:

$$\dot{\mathbf{P}}_{10} = -10.24(\text{circ}(3, -4, 1, 0_3, \dots, 0_{127})^T). \quad (2.253)$$

Para el cálculo de la derivada de la matriz retardo es necesario construir con anterioridad la matriz \mathbf{Q}_2 utilizando $g=2$ y $q_2=51$:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 51 & 1 & 0 \\ 0 & 102 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.254)$$

Con esta matriz se calcula la derivada de cada uno de los elementos de la matriz retardo como

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_{20}' \\ \dot{d}_{21}' \\ \dot{d}_{22}' \end{bmatrix} = \frac{-1}{T} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.624 \\ -32.768 \\ 6.144 \end{bmatrix}. \quad (2.255)$$

A partir de estos elementos se construye la derivada de la matriz retardo como

$$\dot{\mathbf{P}}_{02} = \text{circ}(0_0, \dots, 0_{50}, 26.624, -32.768, 6.144, 0_{54}, \dots, 0_{127})^T. \quad (2.256)$$

Representación del plano de fase

La construcción del plano de fase se realiza con la VC v y la tensión en la entrada de la línea de transmisión v_2 . Así, la repetición del proceso de discretización para esta variable da lugar a

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{v}_2 + \mathbf{B}_3(T)\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (2.257)$$

con

$$\mathbf{B}_3(T) = Z_0 \mathbf{P}_{00} - Z_0 \mathbf{P}_{02}(T). \quad (2.258)$$

Una vez determinado el valor de v , la variable de salida v_2 se calcula de forma analítica a partir de

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}(T)^{-1} \mathbf{B}_3(T) \mathbf{f}(\mathbf{v}). \quad (2.259)$$

2.7.2 Resultados de análisis

El sistema de ecuaciones (2. 147) ha sido resuelto inicializando con $N=128$ muestras de una señal senoidal de amplitud $A=3$ V, periodo $T=5\tau$ y *offset* igual a uno de los puntos de equilibrio del circuito. Se ha realizado un barrido en el orden de discretización, observándose la siguiente evolución del periodo de oscilación: $T(g=1)=2.6430$, $T(g=2)=2.6482$, $T(g=3)=2.6503$ y $T(g=4)=2.6503$. En la siguiente figura se representa la forma de onda y el plano de fase v_2-v de la solución obtenida, comprobándose que se trata de una solución de periodo-1. En el capítulo 5.1 se utilizará el método DTA-Gear, incluyendo el estudio de la estabilidad de la solución, para determinar soluciones de periodo-2.

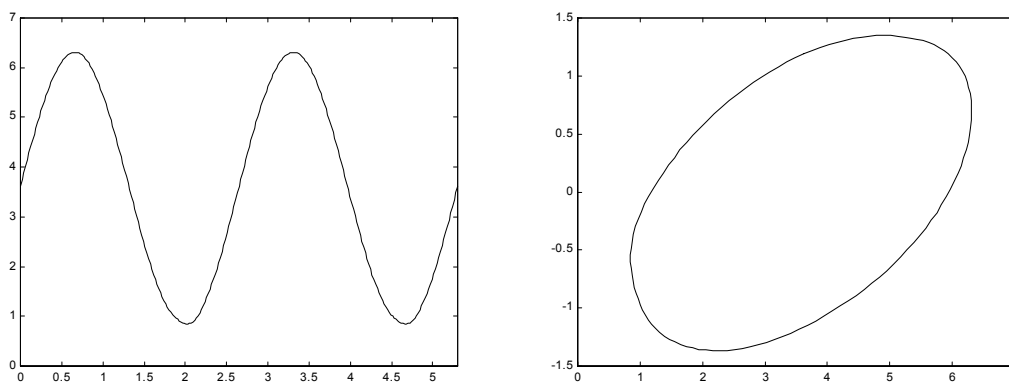


Fig. 2. 38. Solución de periodo-1 del TDCC con $N=128$, $R=1.82k\Omega$ y Gear-4. ($T=2.6503$).

Forma de onda v (izq.) y plano de fase v_2-v (der.)

2.8 Conclusiones

En este capítulo se ha descrito un nuevo método, denominado DTA–Gear para el análisis de circuitos no lineales autónomos que incorporen retardo. El método se basa en la discretización de los operadores derivada y retardo que aparecen en las ecuaciones de equilibrio. En esta discretización no se ha utilizado información proveniente de la periodicidad de la solución. Únicamente tras la discretización se considera la periodicidad de la solución para conseguir un sistema de ecuaciones algebraico. La discretización usada es tal que permite calcular la sensibilidad del sistema de ecuaciones respecto al periodo de oscilación, las muestras de las variables de control y los elementos del circuito, permitiendo la eficaz resolución del sistema de ecuaciones obtenido utilizando métodos globalmente convergentes basados en modificaciones del método de Newton, al tiempo que posibilita la resolución de problemas de optimización.

Nuevas expresiones para considerar alinealidades estáticas con más de una variable de control y alinealidades dinámicas han sido obtenidas en este capítulo. Aunque se ha demostrado que es posible prescindir de las alinealidades dinámicas, su utilización puede introducir un error de discretización distinto. Así, se han obtenido cotas de error para los distintos órdenes de discretización de los operadores derivada y retardo, obteniéndose expresiones analíticas que relacionan los errores cometidos en cada una de las distintas formulaciones para evaluar alinealidades: alinealidad dinámica *versus* derivada de alinealidad estática y retardo de alinealidad a partir de las muestras de la variable de control *versus* retardo de la alinealidad a partir de sus muestras. Estos resultados teóricos han sido validados mediante pruebas de simulación realizadas con funciones analíticas. En concreto, se ha demostrado que los operadores derivada y retardo aplicados sobre funciones senoidales introducen un error cualitativamente distinto (amplificación, atenuación, retardo o avance) según el orden de discretización utilizado, error que aumenta de forma lineal al aplicar repetidas veces el mismo operador. Asimismo, se ha comprobado que al considerar alinealidades polinómicas, la aproximación local de una variable de control como potencia inversa invierte los resultados obtenidos al trabajar con señales senoidales.

Finalmente, el método DTA–Gear se ha aplicado a la determinación del régimen permanente del oscilador de Van der Pol y del circuito de Chua retardado. En el primero de estos circuitos se ha realizado un barrido en el número de muestras y el orden de discretización para un modelo circuital con alinealidad dinámica y estática con una y dos variables de control. Los resultados de simulación confirman la mayor rapidez de convergencia del modelo circuital con alinealidad estática. El segundo de estos circuitos, representativo del tipo de circuitos a los que aplica el método DTA–Gear, ha sido estudiado para distintos órdenes de discretización, obteniéndose expresiones que serán utilizadas más adelante al estudiar en detalle este mismo circuito.

Existe la posibilidad que las soluciones obtenidas en estas simulaciones sean inestables, ya que no se ha incorporado ningún mecanismo que lo evite. Así, el siguiente problema que se aborda es la determinación de la estabilidad de las soluciones obtenidas utilizando el método directo DTA–Gear.