

---

## CAPITULO 1

### PROCESADO DE ARRAYS Y MUESTREO ALEATORIO

---

#### INTRODUCCIÓN

El objetivo de este primer capítulo es el incremento de la directividad o resolución de un array, la cual depende del tamaño total de la apertura y no del número de sensores que lo constituyen. En consecuencia, el tamaño de un array vendrá fijado por la resolución requerida, mientras que el número de sensores se elegirá de forma que sea el mínimo posible a fin de reducir los costes de implementación y el acoplamiento mutuo entre ellos. El acoplamiento entre sensores próximos aparece debido a la radiación y a las corrientes de propagación superficiales del propio array y de los elementos que constituyen la red de alimentación. La principal consecuencia que produce el acoplamiento mutuo es una distorsión del diagrama de radiación. La reducción de esta distorsión se consigue separando los elementos del array, de forma que para un array con longitud fija esta solución se traduce en una disminución del número de sensores.

Los arrays utilizados habitualmente son los uniformes o periódicos que se caracterizan por una localización equiespaciada de los sensores. Estos arrays presentan propiedades que resultan ventajosas en cuanto a la sencillez de procesado, el cual ha sido extensamente estudiado. No obstante, los arrays periódicos presentan un límite superior para el espaciado entre sensores igual a la mitad de la longitud de onda a la frecuencia portadora. Esta limitación viene impuesta por la aparición de lóbulos de difracción que resultan de espaciados mayores. Los lóbulos de difracción presentan un problema de ambigüedad entre diferentes direcciones espaciales, de manera que el array responde de forma idéntica a fuentes incidentes desde esas direcciones. Este problema puede ser considerablemente grave en un escenario con señales interferentes radiando sobre el array. Gracias a las técnicas de procesado de arrays, el efecto de las señales interferentes podrá controlarse diseñando el diagrama de radiación del array con nulos en las direcciones de incidencia de las interferencias; sin embargo, no será posible cancelar aquellas señales interferentes que radien desde direcciones en las que el array presente lóbulos de difracción. Con el

fin de evitar este inconveniente se ha propuesto el uso de arrays con distribución no uniforme o aperiódica de los sensores. Las posiciones de los elementos de un array aperiódico pueden obtenerse de forma determinista (arrays no uniformes: Subsección 1.2.2) o aleatoria (arrays aleatorios: Subsección 1.2.3). En cualquier caso, estos arrays no presentan lóbulos de difracción en sus diagramas de radiación, pero pueden presentar un elevado nivel de lóbulos laterales, los cuales enfocan a direcciones no deseadas con el consiguiente empeoramiento del comportamiento del array frente a ruido.

En este capítulo se propone el procesado de arrays con aleatorización de las frecuencias de las señales incidentes en el array. Este procesado permitirá que arrays con un número determinado de sensores, distribuidos periódica o aperiódicamente a lo largo de una apertura, generen un diagrama de radiación sin lóbulos de difracción, con un nivel reducido de lóbulos secundarios y con resolución superior a la que se conseguiría con un array uniforme con los sensores separados la mitad de la longitud de onda.

La organización de este capítulo es la siguiente: en primer lugar, en la Sección 1.1, se revisa el teorema de muestreo en el dominio temporal y las técnicas de muestreo aleatorio que permitirán la supresión del aliasing temporal, tanto para señales deterministas como para procesos estocásticos; a continuación, en la Sección 1.2, se define el teorema de muestreo espacial que será útil en la caracterización de los arrays e interpretación de los lóbulos de difracción o aliasing espacial y se estudian los distintos tipos de arrays existentes según la distribución de sus sensores: arrays uniformes, no uniformes y aleatorios; finalmente, en la Sección 1.3 se introduce la aleatorización de la frecuencia de la señal transmitida como alternativa a la distribución aleatoria de sensores en el array.

## 1.1 MUESTREO DE SEÑAL EN EL DOMINIO TEMPORAL

### 1.1.1 Señales Deterministas

Una señal muestreada uniformemente puede interpretarse como el producto de la señal continua  $x(t)$  por la función de muestreo uniforme ideal de señal, la cual se representa en la Figura 1.1 y se define a partir de la función delta de Dirac como el siguiente sumatorio:

$$m_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_m) \quad (1.1)$$

resultando la señal muestreada:

$$x_{\delta}(t) = x(t) m_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_m) \delta(t-kT_m) \quad (1.2)$$

El contenido espectral de esta señal muestreada uniformemente, siendo  $x(t)$  una señal determinista de energía finita, se obtiene a partir de la transformada de Fourier, la cual resulta ser una señal periódica en frecuencia cuyo periodo es la frecuencia de muestreo  $f_m = 1/T_m$ :

$$X_{\delta}(f) = f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-nf_m) \quad (1.3)$$

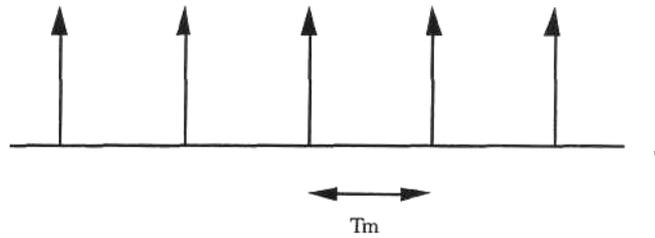


Figura 1.1 Función de muestreo uniforme ideal.

La transformada de Fourier de la señal muestreada  $X_{\delta}(f)$  es un conjunto de réplicas de la transformada de Fourier de la señal original a una distancia igual a la frecuencia de muestreo  $f_m$ . En consecuencia, el espectro original de la señal  $x(t)$  se puede recuperar exactamente a partir del espectro  $X_{\delta}(f)$ , únicamente si la frecuencia máxima de la señal es igual o inferior a la mitad de la frecuencia de muestreo. En caso contrario aparece un efecto de aliasing debido al solapamiento entre los espectros repetidos. Este importante resultado, conocido como el *teorema del muestreo uniforme o teorema de Nyquist para señales deterministas* [Proakis-94], establece que una señal de banda limitada sin componentes frecuenciales para  $|f| \geq W$ , puede reconstruirse completamente a partir de las muestras uniformemente espaciadas en tiempo con periodo  $T_m \leq 1/2W$ , utilizando la fórmula de interpolación:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2W'T_m x(kT_m) \text{sinc}(2W'(t-kT_m)) \quad (1.4)$$

siendo  $W$  el ancho de banda del filtro ideal supuesto en la reconstrucción, el cual debe satisfacer:

$$W \leq W' \leq \frac{1}{T_m} - W \quad (1.5)$$

Si se generaliza la función de muestreo (1.1) para el caso de muestreo de señal no necesariamente uniforme se obtiene:

$$m_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_k) \quad (1.6)$$

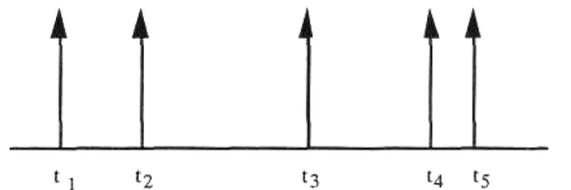


Figura 1.2 Función de muestreo no uniforme ideal.

El espectro de la señal muestreada en los instantes  $t_k$ , sea cual sea su distribución, es igual a:

$$X_{\delta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_k) \exp(-j2\pi ft) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) \exp(-j2\pi ft_k) \quad (1.7)$$

Si el muestreo se realiza de forma aleatoria, el valor esperado del espectro de la señal muestreada será:

$$E[X_{\delta}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) E \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_k) \right] \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1.8)$$

Según esta expresión, la estimación del espectro de la señal original será no sesgada, siempre y cuando, el valor esperado de la función de muestreo sea constante. Sólo en este caso, el valor esperado del espectro coincidirá con el espectro de la señal original, evitándose así el aliasing. El valor esperado de la función de muestreo es igual a la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria instantes de muestreo:

$$E \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \delta(t-t_k) = f(t) \quad (1.9)$$

En consecuencia, si  $f(t) = \text{cte}$ , la estimación del espectro será no sesgada. Esta condición implica que la probabilidad de tener una muestra de señal en cualquier instante de tiempo debe ser la misma. Tras este análisis, puede concluirse que la introducción deliberada de aleatorización en el proceso de muestreo puede ser de gran utilidad para muestrear señales deterministas de banda ilimitada, evitando los errores debidos al aliasing que presentaría el muestreo uniforme.

Las secuencias de los instantes de muestreo aleatorio pueden considerarse como procesos de puntos, es decir, conjuntos de puntos  $t_k$  en el eje temporal. Las características de distintos procesos de puntos aleatorios y su utilidad para el muestreo han sido estudiadas en la literatura, la cual ha sido revisada recientemente en [Bilinskis-92]. Los dos tipos de muestreo aleatorio más utilizados son: el muestreo periódico con perturbación "Periodic Sampling with Jitter" y el muestreo aleatorio aditivo "Additive Random Sampling".

En el primer caso, los instantes de muestreo se obtienen a partir de los instantes equiespaciados según la ecuación (1.10) donde las variables aleatorias  $\tau_k$  son de media nula.:

$$t_k = kT + \tau_k \quad (1.10)$$

Utilizando este procedimiento, sólo se conseguirá una función de densidad de probabilidad constante si cada una de las variables aleatorias  $\tau_k$  está uniformemente distribuida en el intervalo de tiempo  $kT \pm T/2$ ; de esta forma, todos los valores instantáneos de la señal serán muestreados con idéntica probabilidad, desapareciendo los errores debidos al aliasing. No obstante, esta condición implica que los intervalos de tiempo entre muestras pueden llegar a ser muy pequeños, aunque la frecuencia media de muestreo sea baja, apareciendo por tanto problemas técnicos en la implementación del circuito muestreador "Sample and Hold" (S/H).

En el caso del muestreo aleatorio aditivo los instantes de muestreo vienen dados por la ecuación:

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k \quad (1.11)$$

donde los intervalos  $\tau_k$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con función de densidad de probabilidad  $f_{\tau}(t)$ . La probabilidad de tener una muestra en el instante  $t_k$ , por proceder este instante de una suma de variables aleatorias, vendrá caracterizada por una función de densidad de probabilidad resultante de la

convolución de orden  $k$  de  $f_r(t)$  consigo misma. En [Shapiro-60] se demuestra que, bajo ciertas condiciones de  $f_r(t)$ , este esquema de muestreo no presenta aliasing. En particular, si los instantes de muestreo  $t_k$  se definen como un proceso de puntos de Poisson, el espectro de la señal continua podrá estimarse sin errores de aliasing a partir del espectro de la señal muestreada.

*Demostración 1.1*

Sea la función de muestreo  $m_\delta(t)$  un tren de impulsos de Poisson [Papoulis-84], donde los instantes de muestreo  $t_k$  (1.6) vienen definidos por un proceso de puntos de Poisson tal que el número de puntos comprendidos en un intervalo de tiempo  $t_a$  es igual a una variable aleatoria de Poisson con parámetro  $\lambda t_a$ :

$$P(n(t_a) = k) = e^{-\lambda t_a} \frac{(\lambda t_a)^k}{k!} \tag{1.12}$$

El valor medio de esta función de muestreo es constante e igual a la densidad media de puntos  $\lambda$ :

$$E[m_\delta(t)] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_k)\right] = \lambda \tag{1.13}$$

y su covarianza es igual a:

$$C_{m\delta}(t_1, t_2) = \lambda \delta(t_1 - t_2) \tag{1.14}$$

Un estimador no sesgado del espectro de la señal continua a partir de sus muestras se define como:

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) m_\delta(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) \exp(-j2\pi ft_k) \tag{1.15}$$

Resultando el valor esperado del espectro estimado idéntico a la transformada de Fourier de la señal continua:

$$E[\hat{X}(f)] = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_k)\right] \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \tag{1.16}$$

La varianza de la estimación, siendo  $x(t)$  una señal de energía media finita, es igual a la relación entre la energía de la señal original y la densidad media de puntos:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) x^*(t_2) \lambda \delta(t_1 - t_2) \exp(-j2\pi f(t_1 - t_2)) dt_1 dt_2 = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t_1)|^2 dt_1 = \frac{E}{\lambda} \tag{1.17}$$

□

En conclusión, el estimador descrito para señales muestreadas con un proceso de puntos de Poisson es no sesgado y presenta una varianza tanto menor cuanto mayor sea el valor de la densidad media de puntos. Por tanto, podrá realizarse el muestreo aleatorio de una señal generando los instantes de muestreo a partir del proceso de puntos de Poisson con una frecuencia de muestreo media inferior al límite establecido por el teorema de Nyquist

sin que aparezcan errores de aliasing en la estimación del espectro. No obstante, debe asumirse que cuanto menor sea esta frecuencia media mayor será la varianza de la estimación espectral.

### 1.1.2 Procesos Estocásticos

En el entorno de comunicaciones es habitual el tratar con procesos aleatorios tanto para la caracterización de las fuentes de información como para la caracterización del ruido del canal de comunicaciones. Por este motivo, se desarrolla a continuación el teorema de muestreo para procesos estocásticos.

Suponiendo un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio  $x(t)$ , con autocorrelación  $R_x(\tau)$  y densidad espectral de potencia  $S_x(f)$ , se define el proceso aleatorio discreto  $x_\delta(t)$  como el conjunto de muestras del proceso

continuo, normalmente obtenidas a partir de muestreo uniforme:

$$x_\delta(t) = x(t) m_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_m) \delta(t-kT_m) \quad (1.18)$$

La autocorrelación del proceso discreto  $R_\delta(T)$  es igual al conjunto de las muestras de la autocorrelación del proceso continuo  $x(t)$ :

$$R_{x_\delta}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(kT_m) \delta(t-kT_m) \quad (1.19)$$

La densidad espectral de potencia de este proceso estocástico muestreado uniformemente se obtiene a partir de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación discreta:

$$S_{x_\delta}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{x_\delta}(kT_m) \exp(-j2\pi f k T_m) \quad (1.20)$$

Nuevamente, al igual que en el caso de señales deterministas, el contenido espectral del proceso muestreado resulta definido por una señal periódica en frecuencia cuyo periodo es la frecuencia de muestreo  $f_m = 1/T_m$ :

$$S_{x_\delta}(f) = f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(f - n f_m) \quad (1.21)$$

En consecuencia, a partir de la densidad espectral de potencia del proceso muestreado podrá recuperarse la densidad espectral de potencia del proceso continuo, sólo si ésta es nula para frecuencias superiores a la mitad de la frecuencia de muestreo. Esta conclusión define el *teorema del muestreo uniforme o teorema de Nyquist para procesos estocásticos* [Proakis-94], el cual establece que un proceso de banda limitada, cuya función de densidad espectral de potencia sea nula para  $|f| \geq W$ , puede describirse en el sentido del error cuadrático medio, a partir de las muestras uniformemente espaciadas en tiempo, con periodo  $T_m \leq 1/2W$ :

$$E \left[ \left| x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_m) \text{sinc}(2W(t-kT_m)) \right|^2 \right] = 0 \quad (1.22)$$

donde se ha particularizado  $T_m = 1/2W$ .

Si el proceso estocástico  $x(t)$  es muestreado en puntos no equiespaciados, la estimación espectral del proceso discreto se realizará a partir de las muestras resultantes de la función de autocorrelación del proceso muestreado:

$$\hat{S}_{x\delta}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{x\delta}(t_k) \exp(-j2\pi f t_k) \quad (1.23)$$

Suponiendo que el proceso  $x(t)$  y el proceso de puntos de muestreo son independientes, la autocorrelación del proceso discreto es igual al producto de las autocorrelaciones de ambos procesos:

$$R_{x\delta}(\tau) = R_x(\tau) R_\delta(\tau) \quad (1.24)$$

De forma que la estimación del espectro (1.23) puede expresarse como sigue:

$$\hat{S}_{x\delta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) R_\delta(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad (1.25)$$

Un esquema de muestreo libre de aliasing será aquel que permita obtener una estimación consistente de la densidad espectral de potencia sin ambigüedad a partir de las muestras del proceso, aún suponiendo que el proceso no sea de banda limitada.

En [Masry-76], [Masry-78(1)] y [Masry-78(2)] se realiza un estudio detallado de las condiciones que debe cumplir un esquema de muestreo de procesos estocásticos que permita una estimación espectral consistente libre de aliasing a partir del proceso discreto resultante. En particular, dichos trabajos demuestran que la estimación de la densidad espectral de potencia a partir de las muestras tomadas según un proceso de puntos de Poisson no presenta errores de aliasing y es consistente en el sentido del error cuadrático medio.

### *Demostración 1.2*

La función de autocorrelación del proceso de puntos de Poisson es [Papoulis-84]:

$$R_\delta(\tau) = \lambda^2 + \lambda \delta(\tau) \quad (1.26)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión de la estimación de la densidad espectral de potencia del proceso discreto (1.25) se obtiene:

$$\hat{S}_{x\delta}(f) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau + \lambda R_x(0) = \lambda^2 S_x(f) + \lambda R_x(0) \quad (1.27)$$

Por tanto, el espectro del proceso continuo puede estimarse a partir de la densidad espectral de potencia estimada del proceso discreto y de la estimación de la función de autocorrelación en el origen o potencia del proceso:

$$S_{x,N}(f) = \frac{1}{\lambda^2} \hat{S}_{x\delta,N}(f) - \frac{1}{\lambda} \hat{R}_{x,N}(0) \quad (1.28)$$

siendo  $N$  el número de muestras disponibles.

En [Masry-78(2)] se proponen las siguientes estimaciones  $\hat{R}_{x,N}(0)$  y  $\hat{S}_{x\delta,N}(f)$ , consistentes en el sentido del error cuadrático medio:

$$\hat{R}_{x,N}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |x\delta(t_k)|^2 \tag{1.29}$$

$$\hat{S}_{x\delta,N}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_N(f-v) \hat{I}_N(v) dv \tag{1.30}$$

donde  $W_N(f)$  es una ventana espectral e  $\hat{I}_N(f)$  es el periodograma:

$$\hat{I}_N(f) = \frac{\lambda}{2\pi N} \left| \sum_{k=1}^N x\delta(t_k) \exp(-j2\pi f t_k) \right|^2 \tag{1.31}$$

□

En conclusión, la introducción deliberada de una adecuada aleatorización en el proceso de muestreo evitará los errores de aliasing que inevitablemente aparecen en el muestreo uniforme, tanto de señales deterministas como de procesos estocásticos de banda no limitada. Cabe destacar que la elección del proceso de puntos de Poisson es suficiente pero no necesaria, pudiendo encontrarse otras distribuciones que supriman igualmente el aliasing.

### 1.2 MUESTREO DE SEÑAL EN EL DOMINIO ESPACIAL: ARRAYS DE SENSORES

Una señal espacio-temporal puede escribirse como  $s(\mathbf{x},t)$ , donde  $\mathbf{x}$  es el vector de posición igual a la triple variable espacial  $(x, y, z)$ .

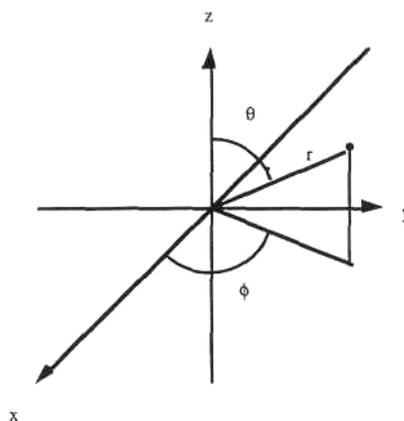


Figura 1.3. Representación de los ejes cartesianos  $x, y, z$ , junto con las coordenadas esféricas:  $r$  (distancia al origen),  $\phi$  (azimuth),  $\theta$  (elevación).

La transformada de Fourier de esta señal en el dominio espacial puede definirse como:

$$S(\mathbf{k},t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{x},t) \exp(j\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{1.32}$$

donde, para una onda plana progresiva,  $k = (k_x, k_y, k_z)$  es el vector número de onda que representa dos tipos de información: su magnitud  $|k| = 2\pi/\lambda$ , expresa el número de ciclos (en radianes) por metro, siendo por tanto una variable de frecuencia espacial; mientras que el vector unitario  $k_u = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ , indica la dirección de propagación de la onda progresiva, siendo  $\theta$  y  $\phi$  los ángulos de elevación y azimuth, respectivamente, que se definen en el sistema de coordenadas utilizado en la representación espacial de una señal (Figura 1.3).

Al muestrear espacialmente una señal función de una única dimensión espacial y del tiempo  $s(x,t)$ , se obtiene una secuencia de señales temporales  $s_m(t) = s(md,t)$ , donde  $d$  es el intervalo entre muestras espaciales. A fin de definir el *teorema del muestreo espacial* [Johnson-93], se particulariza la señal en un determinado instante de tiempo  $t_0$ , siendo  $s(x,t_0)$  una función continua espacialmente. Este teorema, equivalente al teorema de Nyquist para muestreo temporal, establece que si la señal  $s(x,t_0)$  no presenta componentes de frecuencia espacial  $|k| > k_0$ , ésta podrá recuperarse a partir del conjunto de muestras periódicas  $s_m(t_0)$  siempre y cuando el intervalo de muestreo sea  $d \leq \pi/k_0$

Este teorema se deriva de la definición, a partir de (1.32), de la transformada de Fourier en el dominio espacial para señales discretas donde, por simplicidad, se ha denotado  $s(md,t_0) = s(md)$ :

$$S_{\delta}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(md) \exp(jkmd) \quad (1.33)$$

Si el muestreo espacial se realiza de forma periódica, el espectro espacial resultante será periódico en  $k$  con periodo  $2\pi/d$ :

$$S_{\delta}(k) = \frac{1}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(k - n \frac{2\pi}{d}\right) \quad (1.34)$$

Por tanto, si el espectro de la señal continua es de banda limitada, sin componentes a frecuencias espaciales  $|k| \leq \pi/d$ , no se producirá solapamiento entre las versiones desplazadas del espectro continuo, de forma que se podrá recuperar  $S(k)$  a partir de  $S_{\delta}(k)$  sin errores de aliasing.

El muestreo periódico de señales en una dimensión espacial puede extenderse fácilmente al caso de señales multidimensionales, aplicando el teorema de muestreo derivado para una dimensión a cada una de las dimensiones. En el caso más general de una señal continua tridimensional  $s(x,y,z)$  sin componentes frecuenciales fuera del espacio definido por  $|k_x| \leq k_{x0}$ ,  $|k_y| \leq k_{y0}$ ,  $|k_z| \leq k_{z0}$ , el muestreo puede realizarse uniformemente en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  con periodos  $d_x \leq \pi/k_{z0}$ ,  $d_y \leq \pi/k_{y0}$  y  $d_z \leq \pi/k_{z0}$  respectivamente, sin pérdida de información. La transformada de Fourier tridimensional de la señal discreta resultante será una función periódica en cada una de las frecuencias espaciales:

$$S_{\delta}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{d_x d_y d_z} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(k_x - l \frac{2\pi}{d_x}, k_y - m \frac{2\pi}{d_y}, k_z - n \frac{2\pi}{d_z}\right) \quad (1.35)$$

Tras el análisis del teorema de muestreo espacial y aplicando los resultados obtenidos para el muestreo aleatorio en el dominio temporal se procede al estudio de los distintos tipos de arrays de sensores según las características del muestreo espacial realizado.

En términos de procesado de señal una apertura continua puede verse como una ventana con una determinada ponderación, a través de la cual se observa el campo de ondas en un espacio finito. En consecuencia, las ondas que se transmiten desde las fuentes a la apertura son función tanto del tiempo como del espacio o posición de la apertura. El efecto que tiene la apertura sobre la señal espacial es equivalente al observado al medir una señal en el dominio temporal sólo durante un periodo de observación finito. Una apertura es un sistema de comunicación conceptualmente más simple que un array de sensores al estar compuesto de una sola unidad. Sin embargo, no siempre es apropiada su utilización, por ejemplo, en ciertas aplicaciones donde el tamaño de apertura requerido es considerable puede presentar problemas de ubicación. Una alternativa a estos problemas es la utilización de arrays de antenas, los cuales pueden considerarse como una versión discreta de las aperturas continuas.

En un gran número de aplicaciones, los arrays compuestos de sensores individuales muestrean el campo de ondas en posiciones discretas. Por ejemplo, en exploración sísmológica se utilizan arrays de geófonos para registrar las ondas acústicas de baja frecuencia que permiten determinar la estructura del subsuelo. De forma similar, en aplicaciones sonar se emplean arrays de hidrófonos y en aplicaciones acústicas arrays de micrófonos.

Los sensores del array pueden posicionarse de forma periódica o aperiódica. En este último caso las posiciones podrán seleccionarse de forma determinista o según una determinada distribución aleatoria.

### 1.2.1 Arrays Uniformes

La forma más habitual de muestrear una apertura es uniformemente, es decir, colocando los sensores del array equiespaciados a lo largo de la apertura. El análisis de este tipo de arrays es relativamente simple, pudiéndose obtener fácilmente la señal a su salida.

A continuación se analizan las medidas del campo de ondas realizadas por un array formado por  $M$  sensores ideales, localizados en los puntos  $\mathbf{x}_m = [x_m, y_m, z_m]$ . El espectro espacial de la señal discreta recibida en el array, se define a partir de la señal recibida en cada sensor  $s_m(t)$ , afectada por su correspondiente peso  $w_m$ :

$$Y(\mathbf{k}, t) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m s_m(t) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_m) \tag{1.36}$$

donde  $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]$  es el vector número de onda de la señal incidente.

Este espectro puede expresarse como la convolución circular entre el espectro espacial del campo de ondas muestreado en el dominio espacial  $S_\delta(\mathbf{l}, t)$ , y el factor de array o transformada de Fourier del vector de pesos del array  $W(\mathbf{k})$ . En el caso de muestreo espacial periódico con periodo  $\mathbf{d} = [d_x, d_y, d_z]$ , tanto el espectro espacial como el factor de array serán periódicos en  $\mathbf{k}$  con periodo  $\mathbf{k}_m = [2\pi/d_x, 2\pi/d_y, 2\pi/d_z]$ :

$$Y(\mathbf{k}, t) = \frac{d_x d_y d_z}{(2\pi)^3} \int_{-\mathbf{k}_m/2}^{\mathbf{k}_m/2} S_\delta(\mathbf{l}, t) W(\mathbf{k}-\mathbf{l}) d\mathbf{l} \tag{1.37}$$

donde:

$$S_{\delta}(\mathbf{k}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_m(t) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_m) \quad (1.38)$$

$$W(\mathbf{k}) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_m) \quad (1.39)$$

El conjunto de valores  $w_m$  puede interpretarse como una apertura discreta que pondera el campo de ondas muestreado espacialmente, consistente en un tren de  $M$  deltas localizadas en las posiciones de los sensores:

$$w(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \quad (1.40)$$

Sustituyendo la expresión (1.35) que define el espectro espacial de una señal muestreada uniformemente a partir del espectro de la señal continua, en la ecuación (1.37), se obtiene:

$$Y(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\mathbf{k}_m/2}^{\mathbf{k}_m/2} \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} S(\mathbf{l} - \mathbf{n} * \mathbf{k}_m, t) W(\mathbf{k} - \mathbf{l}) d\mathbf{l} \quad (1.41)$$

donde, por simplicidad en la notación, se ha introducido el vector  $\mathbf{n} = [1, m, n]$ , siendo '\*' el producto componente a componente entre dos vectores.  $S(\mathbf{k}, t)$  es el espectro espacial del campo de ondas incidente, continuo espacial y temporalmente.

En consecuencia, la señal a la salida del array es igual a una versión enventanada de la señal incidente a través de la función  $W(\mathbf{k})$ , al igual que sucede con la señal a la salida de una apertura continua. La diferencia aparece en el sumatorio de réplicas desplazadas del espectro  $S(\mathbf{k}, t)$ , el cual puede producir errores de aliasing. Si el campo de ondas incidente está espacialmente limitado tal que  $S(\mathbf{k}, t) = 0$  para  $|\mathbf{k}| \geq \mathbf{k}_m/2$ , sólo uno de los términos del sumatorio contribuye al espectro. Bajo esta condición, derivada del teorema del muestreo espacial expuesto anteriormente, no aparecerán errores de aliasing espacial, siendo la señal obtenida a la salida del array idéntica a la que se hubiese obtenido a la salida de una apertura continua de ventana  $w(\mathbf{x})$ . Sin embargo, si esta condición no se cumple, la energía de la señal a frecuencias espaciales mayores de  $\mathbf{k}_m/2$  aparecerá en el sumatorio a frecuencias espaciales en el rango  $-\mathbf{k}_m/2 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{k}_m/2$ .

Los errores de aliasing que se producen cuando se muestrea a frecuencias espaciales inferiores a la determinada por el teorema de muestreo, pueden interpretarse directamente a partir del factor de array  $W(\mathbf{k})$ . Para ello se define la región visible como los valores reales que puede tomar la frecuencia espacial o número de onda. Recordando la expresión de  $\mathbf{k}$  en función de los ángulos de incidencia  $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda [\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta]$  (Figura 1.3), se tiene que  $|\mathbf{k}| \leq 2\pi/\lambda$ , para cualquier dirección de incidencia. Si la separación entre los sensores de un array uniforme es  $\mathbf{d} \geq [\lambda/2, \lambda/2, \lambda/2]$ , la región visible ocupa más de un periodo del factor de array  $W(\mathbf{k})$ , presentando lóbulos principales espúreos conocidos como lóbulos de difracción. La consecuencia de estos lóbulos de difracción es la ambigüedad existente entre las señales incidentes desde direcciones correspondientes a los lóbulos de difracción y las correspondientes al lóbulo principal. En la Figura 1.4 se ha representado el factor de

array correspondiente a una distribución lineal y equiespaciada de nueve sensores en función del número de onda. La región visible indicada a trazo semipunteado se refiere a una separación entre sensores igual a la mitad de la longitud de onda, pudiendo observarse los lóbulos de difracción que aparecerían para espaciados mayores.

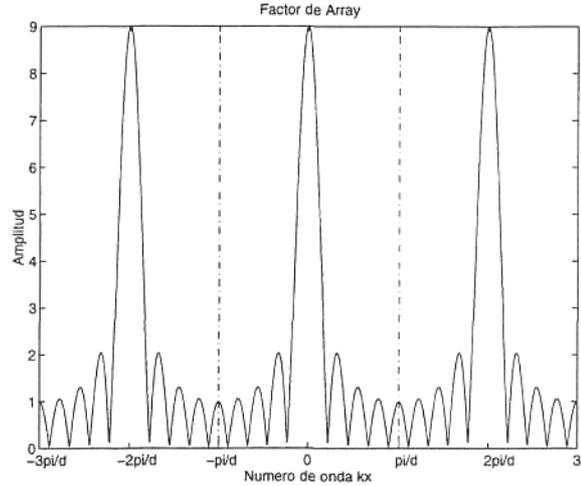


Figura 1.4. Factor de array  $W(k)$  correspondiente a un array lineal de 9 sensores. La región visible señalada a trazo semipunteado corresponde al caso de separación entre sensores igual a  $\lambda/2$ .

En el entorno de comunicaciones es habitual la necesidad de caracterizar campos de ondas aleatorios incidentes sobre un array de  $M$  sensores. En este caso, debe realizarse una estimación de la función de autocorrelación espacio-temporal de la señal incidente  $R_s(\chi, \tau)$  a partir de las muestras obtenidas por los sensores del array  $y_m(t) = w_m s_m(\mathbf{x}_m, t)$ , considerando la señal estacionaria en tiempo y en espacio. Se define la matriz de autocorrelación espacio-temporal  $\mathbf{R}_y(\mathbf{x})$ , en la cual cada uno de sus elementos viene definido por la correlación cruzada de las señales recibidas en dos de los sensores:

$$R_{ij}(\tau) = E[y_i(t) y_j^*(t+\tau)] = w_i w_j^* R_s(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, \tau) \tag{1.42}$$

La separación entre las localizaciones de cada par de sensores  $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$ , es el parámetro que define las posiciones de muestreo de la función de autocorrelación de la señal incidente.

A fin de evaluar los posibles errores de aliasing que puede presentar un array, resulta interesante obtener un promedio de la autocorrelación espacio-temporal sobre todos los valores obtenidos con sensores separados por la misma distancia. Para ello se define la función de co-array discreta:

$$c(\chi) = \sum_{(i,j) \in v(\chi)} w_i w_j^* \tag{1.43}$$

$v(\chi)$  denota el conjunto de índices  $(i,j)$  tal que  $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i = \chi$ . El número de términos sumados en el co-array para cada valor de  $\chi$  puede variar desde 0, cuando no exista ningún par de sensores separados a esa distancia particular, hasta  $M$ , número de sensores del array. Obviamente, el número de sumandos del co-array para  $\chi = 0$  es siempre  $M$ . La función de co-array es igual a la transformada inversa de Fourier del módulo al cuadrado del factor de array  $|W(\mathbf{k})|^2$  conocido como diagrama de radiación:

$$|W(\mathbf{k})|^2 = \sum_{\chi} c(\chi) \exp(j\mathbf{k} \cdot \chi) \quad (1.44)$$

La nueva definición de la autocorrelación espacial a partir del promedio en el dominio espacial es equivalente al valor esperado de la función de autocorrelación espacio-temporal estimada a partir del sumatorio de  $y_i(t) y_j^*(t + \tau)$  para todos los posibles valores de  $\chi$ :

$$R_y(\chi, \tau) = E \left[ \sum_{(i,j) \in v(\chi)} y_i(t) y_j^*(t + \tau) \right] = c(\chi) R_s(\chi, \tau) \quad (1.45)$$

La expresión anterior recuerda a la ecuación (1.24), obtenida para la estimación de la autocorrelación de un proceso aleatorio muestreado en el dominio temporal. Esta expresión era igual al producto de la autocorrelación del proceso continuo por la autocorrelación del proceso de puntos de muestreo. La autocorrelación estimada en el caso de muestreo espacial (1.45), es igual al producto de la función de autocorrelación espacio-temporal de la señal incidente por la función de co-array o autocorrelación del proceso de puntos espaciales  $w(\mathbf{x})$ . En consecuencia, la autocorrelación de un proceso muestreado espacialmente es igual a la autocorrelación espacio-temporal de la señal incidente, muestreada y enventanada espacialmente por la función de co-array. Por tanto, según sea el muestreo espacial realizado por la función de co-array, el array podrá presentar aliasing espacial al estimar la densidad espectral de potencia espacial o transformada de Fourier de la función de autocorrelación. La densidad espectral de potencia espacial será periódica siempre y cuando sea periódico el diagrama de radiación del array. Esta periodicidad aparece debida a la regularidad de la función de co-array, refiriéndose la regularidad al espaciado entre sus muestras. Para arrays lineales, la función de co-array será regular o irregular dependiendo de si los sensores están situados regular o irregularmente. Sin embargo, un array regular planar o tridimensional puede presentar una función de co-array irregular [Johnson-93], siendo por tanto su Transformada de Fourier no periódica. En el caso de arrays con función de co-array regular o uniforme, la separación entre las muestras del co-array debe ser menor o igual a la mitad de la longitud de onda a fin de satisfacer el teorema de muestreo espacial que asegura la no presencia de errores de aliasing. En caso contrario, aparecerán lóbulos de difracción en  $|W(\mathbf{k})|^2$ .

### 1.2.2 Arrays no Uniformes

Los arrays no uniformes suelen utilizarse para reducir el número de elementos del array requerido en una distribución uniforme para obtener un diagrama de radiación determinado.

A partir de la expresión del factor de array (1.39), éste puede interpretarse como la transformada de Fourier espacial de una función de apertura  $w(\mathbf{x})$ , formada por un conjunto de  $M$  impulsos localizados en las posiciones de los sensores o puntos de muestreo espacial  $\mathbf{x}_m$ :

$$w(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \quad (1.46)$$

En general, cuando las posiciones de los sensores se seleccionan de forma no periódica, el factor de array resultante  $W(\mathbf{k})$ , no presentará periodicidad y por tanto, no aparecerá el problema de los lóbulos de difracción. De esta forma, podrá reducirse el número de sensores del array, manteniendo el tamaño de la apertura necesario para

obtener una determinada resolución. Diferentes criterios para el diseño de la geometría de arrays no uniformes han sido propuestos. Básicamente puede establecerse la siguiente división general:

#### Arrays Reducidos "Sparse Arrays"

Este tipo de arrays consiste en la selección de un subconjunto de las posiciones potenciales de los elementos de un array equiespaciado de forma que se obtenga la función de co-array deseada. Un array reducido puede producir un co-array completo con muestras equiespaciadas la mitad de la longitud de onda, evitándose así el aliasing. La función de co-array obtenida a partir de un array reducido puede ser no-redundante o redundante. En el primer caso, el número de sumandos de la función de co-array toma valores igual a uno para todo  $\chi$ , excepto para el origen. En el caso de co-arrays redundantes, el número de sumandos será superior a uno para algunos intervalos espaciales  $\chi$ , sacrificándose así algunas de las muestras potenciales del co-array, lo cual equivale a una apertura inferior.

En [Pillai-89], se propone el diseño de los arrays reducidos de mínima redundancia a partir de las secuencias de Carathéodory. Para un número dado de sensores  $M$  tal que el conjunto de sus posiciones, normalizadas a  $\lambda/2$ , forme una secuencia de Carathéodory de longitud  $M$ , se obtiene una función de autocorrelación  $R_y(\chi)$  para  $N+1$  valores distintos de  $\chi$ , donde  $N \leq M(M-1)/2$ . A partir de estos valores puede considerarse la matriz de autocorrelación aumentada  $\mathbf{R}_y$ , que será idéntica a la que se obtendría con un array uniforme de  $N+1$  sensores. En conclusión, las secuencias de Carathéodory proporcionan las posiciones de los sensores de los arrays reducidos de forma que la función de co-array sea de mínima redundancia o equivalentemente, proporcionan la distribución de un número determinado de sensores de forma que produzcan la apertura máxima sin lóbulos de difracción.

La reducción del número de sensores implica una reducción del número de grados de libertad del array que se traducirá en una distorsión del factor de array. El efecto dominante de la localización no periódica de los sensores en el array aparece en los lóbulos laterales. Por consiguiente, distintos procedimientos para el diseño de la geometría del array reducido se basan en la minimización del nivel de lóbulo secundario para un número determinado de sensores y una resolución dada [Malloy-84] y [Jarske-88].

#### Arrays no Periódicos

Dentro del grupo de arrays no periódicos se incluyen todos aquellos arrays en los cuales las posiciones de los sensores se obtienen según cierto algoritmo de optimización, sin partir de las posiciones de un array uniforme. Recientemente, se ha propuesto la utilización del algoritmo "*Simulated Annealing*" para su utilización en el diseño de arrays no uniformes [Murino-95]. Este algoritmo consiste en la introducción de una pequeña perturbación aleatoria en cada iteración sobre la configuración actual del array, hasta encontrar la configuración que produzca un mínimo en cierta función de coste analítica. La función de coste se seleccionará según el criterio a optimizar en el diseño del array: mínimo nivel de lóbulo lateral o mínimo número de elementos que permita la obtención de un determinado factor de array.

### 1.2.3 Arrays Aleatorios

En los arrays aleatorios las posiciones de los sensores se eligen según cierta función de densidad de probabilidad. El factor de array resultante será por tanto una variable aleatoria que podrá describirse estadísticamente. La ausencia de lóbulos de difracción es una consecuencia directa de la no periodicidad de las muestras espaciales tomadas por los sensores. Al igual que en el caso de los arrays no periódicos, el tamaño de la apertura determinará la resolución del array, mientras que el nivel de lóbulo lateral dependerá fuertemente del número de sensores del array. En consecuencia, la principal consideración en la caracterización de los arrays aleatorios será la amplitud relativa de los lóbulos secundarios frente al lóbulo principal.

Dos tipos diferentes de arrays aleatorios han sido descritos en la literatura:

#### Arrays Totalmente Aleatorios "Totally Arrays"

En los arrays totalmente aleatorios [Steinberg-76] y [Johnson-93], los sensores se distribuyen independientemente a lo largo de cierta apertura predefinida según determinada función de densidad de probabilidad  $p_x(\mathbf{x})$ . La expresión para el factor de array es igual a la obtenida en (1.39), siendo en este caso una función de las variables aleatorias  $\mathbf{x}_m$ , posiciones de los  $M$  sensores que forman el array:

$$W(\mathbf{k}) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_m) \quad (1.47)$$

El valor esperado del factor de array resulta:

$$E[W(\mathbf{k})] = \sum_{m=0}^{M-1} w_m E[\exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_m)] = \Phi_x(\mathbf{k}) \sum_{m=0}^{M-1} w_m \quad (1.48)$$

donde el valor esperado del factor de fase introducido por el posicionamiento aleatorio de un sensor es igual a la función característica de la variable aleatoria que gobierna las posiciones de los sensores. La función característica de una variable aleatoria es la transformada de Fourier de su función de densidad de probabilidad:

$$E[\exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_m)] = \Phi_x(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(\mathbf{x}) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.49)$$

En consecuencia, el valor esperado del factor de array resultante es igual a la función de enventanado de una apertura continua con excitación igual a la función de densidad de probabilidad de la localización de los sensores. A fin de ilustrar esta relación, en la Figura 1.5 a) se muestra el valor esperado, normalizado a su valor máximo, del factor de array de una apertura lineal de longitud cuatro veces la longitud de onda, con los sensores localizados aleatoriamente con distribución uniforme. Este factor de array, independientemente del número de sensores considerados, coincide con el correspondiente a una apertura continua con excitación uniforme.

Como se ha visto anteriormente, en el entorno de comunicaciones el parámetro de interés de la apertura no es tanto el factor de array como el módulo al cuadrado de éste, o diagrama de radiación. El valor esperado del diagrama de radiación depende también de la función característica del posicionamiento de los sensores. A partir de la ecuación (1.44):

$$E[|W(\mathbf{k})|^2] = \sum_{\chi} c(\chi) E[\exp(j\mathbf{k}\cdot\chi)] = \sum_{\chi} c(\chi) \Phi_{\chi}(\mathbf{k}) \tag{1.50}$$

donde  $\chi$  es la variable aleatoria que representa la separación entre las posiciones de cada par de sensores. Dado que  $\chi = x_i - x_j$  para  $\chi \neq 0$ , es la diferencia entre dos variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, su función característica es igual al módulo al cuadrado de la función característica de las posiciones de los sensores:

$$E[|W(\mathbf{k})|^2] = c(0) + |\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{k})|^2 \sum_{\chi \neq 0} c(\chi) \tag{1.51}$$

El primer término de esta expresión, igual al valor de la función de co-array para  $\chi = 0$ , será el mínimo valor esperado del nivel de lóbulo secundario del diagrama de radiación. El segundo término es proporcional al diagrama de radiación de la apertura continua correspondiente a una excitación igual a la función de densidad de probabilidad de las posiciones de los sensores. Dado que el máximo de la función característica resulta ser igual a uno, se deduce que la relación nivel de lóbulo lateral a nivel de lóbulo principal es igual a la relación entre la función de co-array para  $\chi = 0$  y el sumatorio de la función de co-array para todo  $\chi$ . Claramente, el número de sensores del array aleatorio y no sus posiciones determina el nivel esperado de lóbulo secundario en el diagrama de radiación. Así, en la Figura 1.5 b) puede observarse el menor nivel de lóbulo lateral que presenta el valor esperado del diagrama de radiación del array aleatorio con nueve sensores, a trazo discontinuo, frente al mismo con cuatro sensores, a trazo continuo.

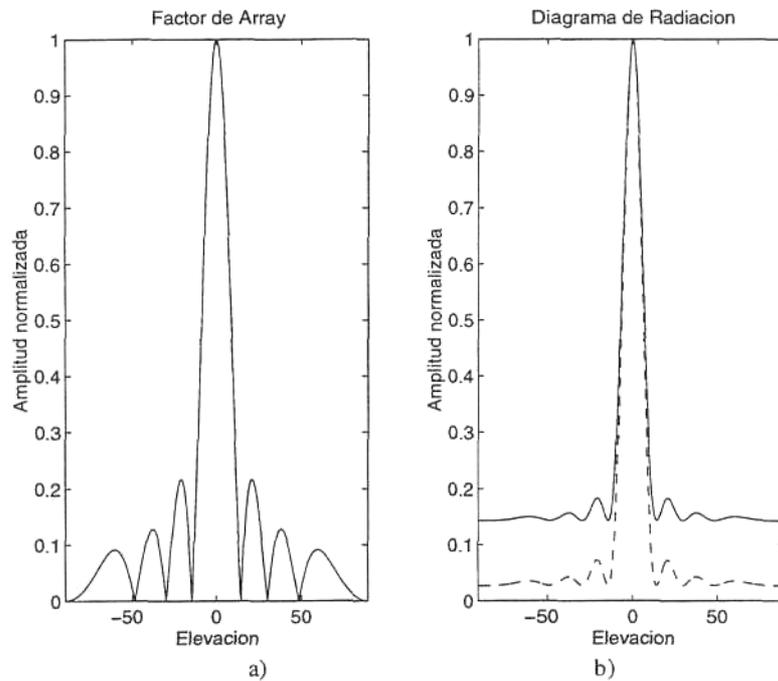


Figura 1.5. Representación de los valores esperados del factor de array (a) y del diagrama de radiación (b) normalizados al valor máximo y en función del ángulo de elevación (para un array lineal en el eje  $x$ :  $k_x = 2\pi/\lambda \sin\theta$ ). El array considerado ha sido un array lineal totalmente aleatorio de longitud  $4\lambda$  con distribución uniforme de los sensores, todos ellos con ponderación igual a la unidad. Trazo continuo (4 sensores), trazo semipunteado (9 sensores).

A partir de los valores esperados del factor de array y del diagrama de radiación, puede obtenerse la varianza del factor de array:

$$\sigma^2 = E[|W(\mathbf{k})|^2] - |E[W(\mathbf{k})]|^2 = c(0) (1 - |\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{k})|^2) \quad (1.52)$$

Esta expresión de la varianza es prácticamente igual a cero para el lóbulo principal, ya que para valores de frecuencia espacial próximos al lóbulo principal, la función característica es prácticamente igual a uno. Sin embargo, en la zona de los lóbulos laterales, la varianza del factor de array puede aumentar considerablemente, siendo el valor máximo igual a la función de co-array evaluada en cero.

El cálculo de la varianza del diagrama de radiación es complejo. Una expresión simplificada de esta varianza para el caso de un array con idéntica ponderación de sus sensores puede obtenerse en [Johnson-93]. Las conclusiones derivadas para el diagrama de radiación son equivalentes a las derivadas para el factor de array, tanto para el lóbulo principal como para los lóbulos secundarios: la varianza en el pico del lóbulo principal es nula; mientras que en la zona de lóbulos laterales puede tomar un valor elevado. En consecuencia, la utilización de un array aleatorio conlleva el control de sus lóbulos secundarios.

Un método de reducción del nivel de los lóbulos laterales de un array aleatorio, propuesto en [Steinberg-83], es la utilización de diversidad espacial o frecuencial. Por una parte, la diversidad espacial o diversidad en el posicionamiento de los sensores requiere que la localización de los sensores sea variable; entonces, el valor esperado del diagrama de radiación puede obtenerse como promedio de los diagramas de radiación resultantes para las diferentes distribuciones de los sensores en el array. La diversidad espacial es posible cuando cada elemento se sitúa en una plataforma o vehículo diferente, de forma que cada sensor pueda tener un movimiento independiente del resto. Una ilustración de este tipo de escenarios puede ser un gran array de radar, donde cada elemento se localiza en un barco distinto. Otra posibilidad para la obtención de diversidad espacial es la construcción de un array con un número elevado de sensores próximos entre sí y equidistantes, de los cuales sólo se activa un grupo reducido, que se selecciona aleatoriamente en cada instante. Por otra parte, la diversidad frecuencial es posible cuando la señal recibida en el array proviene de una fuente de banda ancha. La combinación de las distintas componentes frecuenciales puede realizarse de forma coherente o incoherente: en la combinación coherente se realiza un promedio de las respuestas del array a cada una de las componentes frecuenciales que constituyen la banda de la señal; mientras que en la combinación incoherente, de implementación más práctica que la coherente, la señal transmitida es inherentemente de banda estrecha pero se transmite secuencialmente a distintas frecuencias, realizándose un promedio sobre los diagramas de radiación obtenidos en cada instante. El análisis de los resultados con ambos tipos de diversidad frecuencial realizado en [Steinberg-83] muestra resultados similares, aunque es importante remarcar que únicamente ha sido considerado el comportamiento asintótico de arrays de gran longitud con elevado número de elementos.

#### Arrays Parcialmente Aleatorios "Binned Arrays"

En los arrays parcialmente aleatorios [Hendricks-91], la apertura se divide en zonas no solapadas de la misma longitud. Cada sensor se distribuye independientemente en una de las zonas según cierta función de distribución definida a lo largo de la subapertura. Los diagramas de radiación obtenidos con este tipo de arrays

presentan la particularidad de tener una zona de transición entre la zona de frecuencias espaciales correspondientes al lóbulo principal y la zona de los lóbulos secundarios caóticos propios de los arrays totalmente aleatorios. En esta zona, los lóbulos laterales aparecen fuertemente suprimidos frente a los de los arrays totalmente aleatorios como puede observarse en la Figura 1.6. En ésta se han representado los diagramas de radiación obtenidos con una apertura de longitud cuatro veces la longitud de onda con distintas localizaciones para los cuatro sensores que conforman el array. En ambas figuras se ha utilizado una distribución uniforme de los sensores, en la figura a) esta distribución era totalmente aleatoria, mientras que en la figura b) se consideró parcialmente aleatoria. La razón del menor nivel de lóbulos laterales para los arrays parcialmente aleatorios es que la varianza obtenida con éstos se mantiene a un valor inferior para frecuencias espaciales más alejadas del lóbulo principal que en el caso de los arrays totalmente aleatorios.

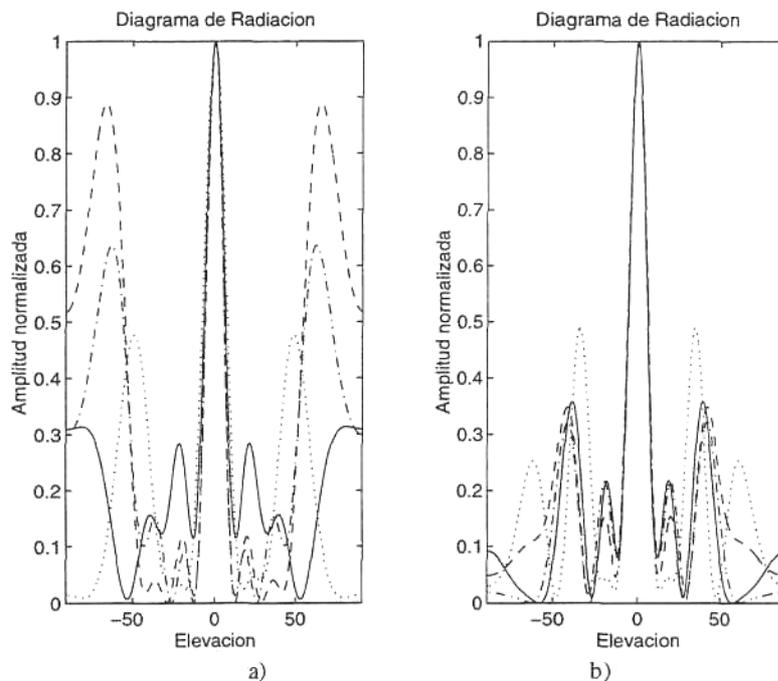


Figura 1.6. Diagramas de radiación obtenidos con un array lineal de longitud  $4\lambda$  con 4 sensores distribuidos uniformemente a lo largo de toda la apertura (a) y con cada sensor distribuido uniformemente en una subapertura de longitud  $\lambda$  (b). La representación ha sido realizada en función del ángulo de elevación (para un array lineal en el eje  $x$ :  $k_x = 2\pi/\lambda \sin\theta$ ).

Los arrays parcialmente aleatorios pueden utilizarse como modelo en numerosas situaciones, en que los sensores son previamente distribuidos en determinados puntos de una rejilla uniforme o no uniforme, pero se les permite un desplazamiento aleatorio dentro de cada subapertura o "bin". Un ejemplo de este tipo de arrays es el formado por boyas sónicas, las cuales son lanzadas al agua desde aviones con escaso control de las posiciones sobre la apertura. Este caso de muestreo espacial es equivalente al definido anteriormente, en la Subsección 1.1.1, como muestreo periódico con perturbación en el dominio temporal.

Al igual que en el caso de arrays totalmente aleatorios, con este tipo de arrays sigue siendo importante el control del nivel de lóbulo secundario para frecuencias espaciales alejadas del lóbulo principal. En [Bar-Ness-84]

se propone la reducción de los lóbulos laterales en ciertas direcciones a partir del diseño de los pesos de ponderación del array, imponiendo nulos en el factor de array medio y minimizando la varianza. El problema que presenta este diseño es la pérdida de grados de libertad del array debido a las restricciones impuestas. Recientemente, en [Páez-94], se ha presentado la supresión promedio de lóbulos de difracción conseguida con arrays aleatorios con diversidad espacial. En esta referencia se compara el comportamiento obtenido con distintos esquemas de distribución aleatoria de los sensores: arrays totalmente aleatorios con distribución uniforme, arrays parcialmente aleatorios con muestreo periódico con perturbación alrededor de una rejilla uniforme y arrays parcialmente aleatorios con muestreo aleatorio aditivo,  $x_m = x_{m_i} + \beta_m$ , donde los incrementos  $\beta_m$  son variables aleatorias tridimensionales, independientes e idénticamente distribuidas. Nuevamente, al igual que ocurría en el dominio temporal, el mejor comportamiento se obtiene con el muestreo aleatorio aditivo.

### 1.3 PROCESADO DE ARRAYS CON ALEATORIZACION FRECUENCIAL

En esta sección se propone una alternativa a los arrays aleatorios que permite aumentar la resolución de un array sin incrementar el número de sensores, evitando la aparición de lóbulos de difracción y manteniendo el control del nivel de lóbulos laterales. Esta alternativa consiste en la introducción de aleatorización frecuencial al procesado de arrays modificando la frecuencia de la señal a transmitir, considerada ésta de banda estrecha [Nájar-(2)]. Esta aleatorización es posible utilizando la modulación de saltos frecuenciales "Frequency Hopping" (FH), la cual se estudiará con detalle en el siguiente capítulo.

A pesar de la similitud entre la implementación de esta técnica y la de la diversidad frecuencial incoherente propuesta en [Steinberg-83] y referenciada en la sección anterior, es importante notar el carácter marcadamente diferente entre ambos métodos. La diversidad frecuencial incoherente consistía en el promedio de los diagramas de radiación obtenidos para distintas frecuencias con un array con distribución aleatoria de sus sensores. Este promedio, que derivaba en una reducción del nivel de los lóbulos secundarios, no proporcionaba una estimación del valor esperado del diagrama de radiación para un array aleatorio definido en (1.50), ya que, siendo las variables aleatorias las posiciones de cada uno de los sensores del array, se promediaban los diagramas de radiación para las distintas frecuencias consideradas. En consecuencia, no se establecía relación alguna entre el comportamiento esperado de un array aleatorio con diversidad frecuencial y el de una apertura continua. Sin embargo, la aleatorización frecuencial propuesta en esta sección para su aplicación al procesado de arrays se basa en la elección de una distribución de frecuencias adecuada para la obtención del valor esperado del diagrama de radiación requerido, considerando deterministas las posiciones de los sensores.

Para el análisis del comportamiento del array con aleatorización frecuencial resulta conveniente expresar el diagrama de radiación en función de la longitud de onda de la señal incidente, siendo el vector número de onda  $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda \mathbf{k}_u$ . A partir de la frecuencia espacial normalizada  $\mathbf{k}_u = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ , queda definido el diagrama de radiación para los distintos ángulos de elevación y azimuth (Figura 1.3):

$$|W(\theta, \phi)|^2 = \sum_{\chi} c(\chi) \exp(j2\pi \mathbf{k}_u \cdot \frac{\chi}{\lambda}) \quad (1.53)$$

Si se considera la separación entre las localizaciones de cada par de sensores  $\chi$ , normalizada a la longitud de onda, ésta será una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad vendrá definida por la función de densidad de probabilidad de la frecuencia de la señal incidente. En consecuencia, el efecto de la aleatorización frecuencial del procesado de arrays es equivalente al posicionamiento aleatorio de los sensores.

El valor esperado del diagrama de radiación, a partir de la expresión (1.50), es igual a:

$$E[|W(\theta, \phi)|^2] = \sum_{\chi} c(\chi) \Phi_{\chi/\lambda}(\mathbf{k}_u) \quad (1.54)$$

donde la función característica de la variable aleatoria separación entre los sensores virtuales  $\Phi_{\chi/\lambda}$ , es igual a la función característica de la variable aleatoria frecuencia de la señal transmitida  $\Phi_{\chi/c}$ , siendo  $c$  la velocidad de propagación. El valor esperado del diagrama de radiación es igual al sumatorio de estas funciones características, las cuales dependen de cada valor de separación posible entre los sensores reales  $\chi$ .

La función de densidad de probabilidad para la frecuencia de transmisión se elegirá según la apertura continua que se quiera simular, de forma que la función característica de la variable aleatoria frecuencia de transmisión sea proporcional al cuadrado de la función de enventanado de la apertura continua. Por ejemplo, una aproximación del diagrama de radiación de una apertura continua lineal con excitación uniforme se obtendría con un array aleatorio con diversidad espacial, con los sensores distribuidos uniformemente a lo largo de toda la apertura (Figura 1.7 a); mientras que otra aproximación del mismo diagrama de radiación puede obtenerse con un array lineal uniforme aplicando aleatorización frecuencial. El valor esperado del diagrama de radiación obtenido en este caso es una suma de las distintas funciones características de las separaciones entre sensores virtuales (separaciones entre los sensores reales normalizadas a  $\lambda$ ), para cada valor distinto de  $\chi$  (separación entre los sensores reales). Cada uno de estos sumandos viene ponderado por la función de co-array evaluada en  $\chi$ . Dado que el valor máximo de la función de co-array se tiene para  $\chi = d$ , siendo  $d$  la separación entre elementos adyacentes, el sumando predominante en la expresión será el obtenido para  $\chi = d$ . Por tanto, una aproximación del valor esperado del diagrama de radiación puede expresarse como:

$$E[|W(\theta, \phi)|^2] \approx c(0) + c(d) \Phi_{d/c}(\mathbf{k}_u) \quad (1.55)$$

Esta expresión es similar a la obtenida para un array aleatorio en (1.51), si se asocia la función característica  $\Phi_{d/c}(\mathbf{k}_u)$  al módulo al cuadrado de la función característica de las posiciones de los sensores  $|\Phi_x(\mathbf{k})|^2$ . En consecuencia, a fin de obtener un diagrama de radiación medio equivalente al de una apertura continua con excitación uniforme, se aleatorizará la frecuencia de la señal transmitida con una función de densidad de probabilidad triangular (figura 1.7 b). El valor esperado del diagrama de radiación se estima como un promedio de los diagramas de radiación obtenidos transmitiendo la señal a distintas frecuencias, es decir, modulando la señal con la modulación de saltos frecuenciales. Este promedio puede interpretarse como el promedio de los diagramas de radiación obtenidos con las distintas aperturas de sensores virtuales resultantes de los saltos frecuenciales. Por tanto, la aleatorización frecuencial del procesado de arrays puede definirse como una técnica, fácilmente implementable, alternativa a la diversidad espacial en arrays aleatorios.

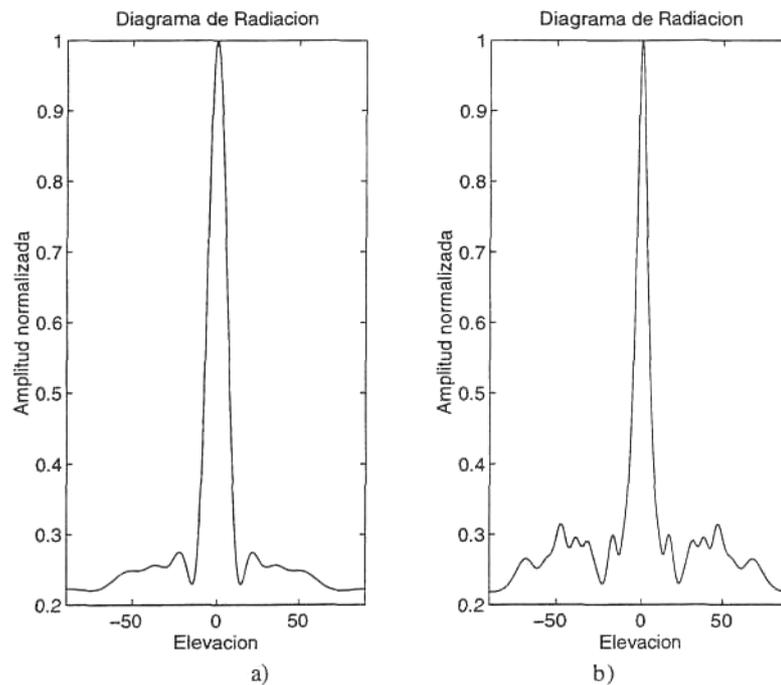


Figura 1.7. Diagramas de radiación promedio estimados considerando un array aleatorio con diversidad espacial (a) y un array uniforme con aleatorización frecuencial (b). En ambos casos se considera una apertura lineal de longitud  $4\lambda$  muestreada con 4 sensores. En el primer caso, los sensores se distribuyen uniformemente a lo largo de toda la apertura, considerando para la estimación del valor esperado del diagrama 100 distribuciones diferentes de los sensores. En el segundo caso, los sensores se posicionan equiespaciadamente y la frecuencia de la señal incidente se considera aleatoria con distribución triangular. El promedio ha sido realizado con los diagramas de radiación obtenidos para 100 frecuencias distintas.

### CONCLUSIONES

La técnica de aleatorización frecuencial presentada en este capítulo, introducida al procesamiento de arrays mediante la aplicación de la modulación de saltos frecuenciales, permite incrementar la directividad de un array, constituido por un determinado número de sensores, evitando la aparición de lóbulos de difracción y manteniendo el control de los lóbulos laterales en el valor esperado de su diagrama de radiación. Para concluir este capítulo es importante destacar que las aplicaciones susceptibles de utilización de esta técnica serán aquellas en las que resulte interesante la evaluación de su comportamiento promedio. Un ejemplo de estas aplicaciones son los sistemas de comunicaciones dotados de codificación de canal, en los cuales, la redundancia introducida para la corrección de errores puede transmitirse a diferentes frecuencias, resultando la señal recibida afectada por el diagrama de radiación medio.

No obstante, en una aplicación real, la posible presencia de señales interferentes independientes a cada una de las frecuencias obliga a la redefinición del criterio de diseño del diagrama de radiación de un array, debiendo éste enfocarse a la dirección de incidencia de la señal deseada, minimizando la contribución del ruido y de las interferencias presentes en cada salto frecuencial. Es decir, el criterio de optimización del vector de pesos utilizado

para la ponderación de los distintos sensores del array será la maximización adaptativa de la relación señal a ruido más interferencias "Signal plus Interference plus Noise" (SINR) a la salida del array en cada uno de los saltos frecuenciales, de forma que el comportamiento instantáneo del sistema sea óptimo; así, el valor esperado del diagrama de radiación del array será también óptimo. En consecuencia, el objeto de los siguientes capítulos será el diseño de un conformador de haz adaptativo de máxima SINR para la recepción de señales con modulación FH.