UNIVERSIDAD POLITECNICA DE BARCELONA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE
INGENIEROS DE TELECOMUNICACION

APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFOS AL DISEÑO DE REDES DE INTERCONEXION DE MULTIPROCESADORES

Tesis Doctoral presentada por:
MIGUEL ANGEL FIOL MORA

Departamento de Matemáticas
Barcelona, 1982

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE BARCELONA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFOS AL DISEÑO DE REDES DE INTERCONEXION DE MULTIPROCESADORES

MIGUEL ANGEL FIOL MORA

Tesis Doctoral presentada a la
Universidad Politécnica de Barcelona
para la obtención del título de
Doctor Ingeniero de Telecomunicación.

Director de Tesis:
Dr. JOSE LUIS ANDRES YEBRA

Barcelona, Septiembre de 1982.

Mi agradecimiento a todas aquellas personas sin cuya ayuda este trabajo no hubiera sido posible. En particular, han resultado inestimables las ideas, comentarios y sugerencias de los profesores Mateo Valero, Tomás Lang, Ignacio Alegre y, especialmente, de mi director de tesis José L.A. Yebra.

Barcelona M.F.

Septiembre 1982.

I N D I C E

CAPÍTULO I

GRAFOS Y REDES DE INTERCONEXION

1.1 INTRODUCCION

Todo sistema físico en el que exista una *relación binaria* entre ciertos objetos puede modelarse mediante un grafo, estructura matemática que, como sabemos, está formada por un conjunto de puntos (llamados vértices o nudos) y de líneas que los enlazan.

Debido a ello, y a su simplicidad intrínseca, la teoría de grafos, íntimamente ligada con la teoría combinatoria, se aplica actualmente en multitud de problemas pertenecientes a áreas tan diversas como la Ingeniería Eléctrica y Civil, Ciencias de la Computación, Linguística, Genética, Psicología, Física, Química, etc., sin olvidar sus relaciones con otras ramas de la Matemática.

Más concretamente, y a modo de ejemplos, basta citar su aplicación a la formulación y resolución de redes eléctricas, cuyas bases fueron establecidas por Kirchhoff en 1847, y al estudio de los llamados "problemas de optimización" que se plantean generalmente en Economía e Investigación Operativa, tales como el del "itinerario del viajante de comercio" y el que dió lugar al método PERT.

El tema central de este trabajo es el estudio de diversas aplicaciones de la teoría de grafos a la Arquitectura de Computadores, en particular al *diseño y evaluación de redes de interconexión para sistemas multiprocesadores.*

Como veremos en la sección 1.4, los multiprocesadores son sistemas informáticos en los que existen varias unidades de proceso capaces de ejecutar tareas de forma simultánea, lo que redunda en una mayor velocidad de cálculo. Parte muy importante de tales sistemas son las redes de interconexión que permiten una adecuada comunicación entre los procesadores, y que pueden modelarse mediante grafos.

En este primer capítulo haremos un repaso de todos los conceptos fundamentales que usamos posteriormente. Así, las dos secciones que siguen están dedicadas a recordar la terminología básica de los grafos y digrafos. La sección 1.4 trata de las redes de interconexión, su clasificación, características principales, y un breve repaso de algunas topologías propuestas anteriormente. Terminamos el capítulo ofreciendo dos versiones distintas de un problema básico concerniente a dichas redes, y sobre el cual se dan unos primeros resultados que nos fijan ciertos límites teóricos (cotas de Moore).

En cuanto al temario que sigue, y en una primera clasificación, los capítulos II, III y IV están dirigidos principalmente a la obtención de redes con pequeño "diámetro" (ver secc. 1.2) lo que, físicamente, se traduce en una mayor "proximidad" entre los procesadores y, por tanto, mayor rapidez en sus comunicaciones. En cambio, el capítulo V trata un problema diferente: el de minimizar el número de conexiones entre procesadores, buses y memorias de un sistema "multibus", con el fin de abaratar el coste de la red.

Concretando un poco más, en el capítulo II se presenta una metodología general para obtener redes de interconexión. A partir de ésta, se clasifican algunas de las soluciones propuestas anteriormente y, finalmente, se aplica el método a un caso particular obteniéndose varias topologías interesantes.

La idea central del capítulo III es la de "congruencia en Z^n", cuya necesidad se justifica, en nuestro caso, en la sección 3.1. Este concepto, junto con el de "divisibilidad en Z^n" sobre el que está basado, se desarrollan en las secciones 3.2 y 3.3. Aunque su aplicación en la Ciencia de la Computación es variada, hacemos especial hincapié en la obtención de los grafos dirigidos que llamamos "de pasos conmutativos", y que resultan especialmente aptos para modelar los sistemas conocidos como "redes locales" (apartado 1.4.5).

En el capítulo IV se estudia un método ("del desdoblamiento de nudos") que permite obtener, recursivamente y a partir de grafos muy simples, familias de redes con creciente número de vértices y diámetro muy cercano o igual a la cota mínima (apartado 1.5.3). Esto las hace aptas para sistemas informáticos con elevado número de procesadores.

Finalmente, y como ya hemos comentado, en el capítulo V se trata un problema de "ahorro de conexiones" en un sistema multiprocesador con red de interconexión tipo multibus. En este, varios procesadores comparten distintas unidades de memoria a las que acceden a través de buses, y el problema consiste en reducir al máximo el número de conexiones procesadores-buses y buses-memorias. El resultado central de este capítulo es una ligera modificación del conocido "teorema de Hall" |B2|, |B3|, |H1|(sección 5.1). Esta variante se demuestra mediante un proceso constructivo en la sección 5.2, y su aplicación a la resolución del problema, junto con otras cuestiones relacionadas, se desarrollan en las secciones siguientes.

1.2 GRAFOS

En esta sección y la siguiente repasaremos brevemente algunos de los conceptos y notaciones básicas relacionadas con la teoría de grafos[1].

Así, $G = G(V,E) = (V,E)$ es un *grafo* con conjuntos $V = V(G)$ y $E = E(G)$ de *vértices* y *líneas* respectivamente. Una línea $e \in E \subset V \times V$ de la forma $\{x,y\}$ "une" los vértices x e y, y será denotada por (x,y), par no ordenado, o $xy = yx$. En este caso decimos que los vértices x e y son *adyacentes*. Dos líneas se llaman *adyacentes* si tienen un vértice en común e *independientes* en caso contrario.

Los cardinales de los conjuntos V y E son el *orden* , $|G| = |V|$ o número de vértices, y el *tamaño*, $e(G) = |E|$ o número de líneas del grafo G.

$G = (V,E)$ es *isomorfo* a $G' = (V',E')$, lo que denotamos por $G = G'$, si existe una correspondencia biunívoca $\phi : V \longrightarrow V'$ tal que $xy \in E$ sii $\phi(x)\phi(y) \in E'$.

El grafo $G'(V',E')$ es un *subgrafo* de $G(V,E)$, lo que se expresa $G' \subset G$, si $V' \subset V$ y $E' \subset E$. Si $W \subset V$, el grafo *inducido por W*, $G[W]$, es el subgrafo de G formado por todos los vértices de W más las líneas que los unen. En cambio,

$$G - W = G[V-W] \qquad (1.1)$$

es el subgrafo de G obtenido suprimiendo los vértices de W y todas las líneas incidentes en ellos. Análogamente, si $E' \subset E(G)$;

$$G - E' = (V(G), E(G)-E') \qquad (1.2)$$

---

(1) En general, la terminología empleada es la misma que la usada en |B2|, |B3|, |H1| o |F1|.

En particular, si $E' = \{e\}$, escribiremos

$$G - \{e\} = G - e \qquad (1.3)$$

Un subgrafo especialmente considerado en el capítulo V es el llamado *1-factor*. Está formado por un conjunto de líneas independientes que contienen todos los vértices de G. Obviamente, G puede tener un 1-factor sólo si es de orden par.

El *grafo dual* de $G(V,E)$, $\bar{G}(V,\bar{E})$, tiene los mismos vértices que G pero una línea $xy \in \bar{E}$ si y sólo si $xy \notin E$. Es decir, los vértices *x* e *y* son adyacentes en $\bar{G}$ sii no lo son en G.

Si x es un vértice de G, $x \in G$,

$$\Gamma(x) = \Gamma_G(x) \qquad (1.4)$$

representa el conjunto de vértices de G adyacentes a x. Análogamente, si $x \in H = G[W]$, donde $W \subset V$, $\Gamma_H(x)$ es el conjunto de vértices de H adyacentes a x, o sea:

$$\Gamma_H(x) = \{y \in H \mid xy \in E(H)\} = \Gamma_G(x) \cap W \qquad (1.5)$$

De la misma forma, si $A \subset V$ y $H \subset G$,

$$\Gamma_H(A) \qquad (1.6)$$

denota el conjunto de vértices de H - A adyacentes a, al menos, un vértice de A. En particular, escribimos

$$\Gamma(A) = \Gamma_G(A) \qquad (1.7)$$

A los cardinales de los conjuntos anteriores los llamamos *grados*. Así, el grado de $x \in V$, $d(x) = |\Gamma(x)|$ es el número de vértices de G adyacentes a x. De forma análoga,

$$d_H(x) = |\Gamma_H(x)| \qquad (1.8)$$

con $H \subset G$ y

$$d_H(A) = |\Gamma_H(A)| \qquad (1.9)$$

con $A \subset V(G)$.

Un grafo G se dice *regular de grado d* o *d-regular* si todos sus vértices tienen grado d.

El *grafo completo*, K^n, tiene n nudos y $\binom{n}{2}$ líneas, es decir, existe una línea entre cualquier par de vértices.

Un *sendero* ("trail") o *tren de líneas*, τ, de longitud l en G, denotado por $\tau = x_0 x_1 \ldots x_l = \tau[x_0 - x_l] = x_0 - x_l$, es una secuencia de vértices y líneas de la forma $x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \ldots, e_l, x_l$ con todas las líneas $e_i = x_{i-1}x_i$, $0 < i \leq l$, distintas. Un *camino* $\mu = \mu[x_0 - x_l]$ es un tren de líneas con todos los vértices distintos.

Un *circuito* [*ciclo*] es un sendero [camino] cuyos vértices inicial y final (vértices *terminales*) coinciden: $x_0 = x_l$.

Existen múltiples definiciones equivalentes para el concepto de árbol |H1, cap.4|. Daremos aquí la que está basada sobre la noción de camino, a saber: G es un *árbol* si cualquier par de sus vértices están unidos por un solo camino. Un *árbol generador* ("spanning tree") de G es aquel que es subgrafo de G y contiene a todos sus vértices.

La *distancia* entre dos vértices $x, y \in V(G)$, denotada por $d_G(x,y) = d(x,y)$, es la mínima longitud de un camino x-y. Si no existe ningún camino de esta clase, se escribe: $d(x,y) = \infty$. Así, un grafo g es *conexo* si $\forall x,y \in V(G)$, $d(x,y) < \infty$.

Dos parámetros relacionados con la distancia son el *diámetro*, k, y la *distancia media* entre vértices, $\bar{k}$, que se definen por

$$k = \max_{x,y \in V}\{d(x,y)\} \tag{1.10}$$

$$\bar{k} = \frac{1}{N^2}\sum_{x,y \in V} d(x,y) \tag{1.11}$$

donde $N = |V|$.

Un tema muy estudiado dentro de la teoría de grafos es el de las "coloraciones" |H1|, |B3|. Así, el más famoso problema no resuelto en dicha disciplina fué, hasta 1976 en que K.Appel, W. Haken y J.Koch dieron con su solución, la llamada "Conjetura del Mapa de Cuatro Colores" (4CC), ahora llamada "Teorema de los Cuatro Colores (4TC).

En el apartado 2.2.2 usaremos dos de las nociones básicas en el desarrollo de dicha rama: las de "vértice-" y "línea-coloración" |F1|.

Un grafo G es *vértice-n-coloreable* [*línea-n-coloreable*] si es posible asignar a cada uno de sus vértices [líneas] uno de entre n colores de manera que vértices [líneas] adyacentes tengan colores distintos.

1.3 DIGRAFOS

El concepto de *grafo dirigido* o *digrafo* deriva directamente del de grafo sin más que exigir que las líneas, ahora llamadas *arcos*, sean *pares ordenados* de vértices. Por tanto, la mayor parte de los conceptos y terminología introducidos en la sección anterior tienen una directa generalización en ésta. Debido a ello, nos limitaremos ahora a repasar las nociones básicas propias de los grafos dirigidos.

Así, representamos por $D = D(V,A) = (V,A)$ un digrafo con conjunto de vértices $V = V(D)$ y de arcos $A = A(D)$. Un arco, a, o par ordenado de vértices, se denota por $[u,v]$ ó $uv \neq vu$ con $u,v \in V$.

Un *autolazo* es un arco de la forma $[u,u]$, y dos *arcos paralelos* (con los mismos vértices terminales) se pueden distinguir mediante subíndices, p.e. $[u,v]_1$ y $[u,v]_2$.

En general, y como en el caso de grafos no dirigidos, adoptamos la terminología estantard, ver p.e. |B1|, |D1| o |H1|, aunque, al igual que en |B1|,(y sobre todo por lo que se refiere al contenido del capítulo IV), hacemos la siguiente excepción:

Lo que nosotros llamamos "digrafos" pueden ser, en realidad, *"pseudodigrafos"*. Esto significa que, en general, permitimos la presencia de autolazos y arcos paralelos.

Si $[u,v] \in A$, decimos que existe un arco *desde u hacia v*. Como sabemos, esto se representa gráficamente por una flecha dirigida hacia v y situada en la línea que une estos dos vértices.

Si $x \in V(D)$, $d^+(x) = od(x)$ representa el *grado de salida* de x, número de vértices adyacentes desde x, y $d^-(x) = id(x)$ el *grado de entrada* o número de vértices adyacentes hacia x.

D es un digrafo *d-regular* o *grafo d-diregular* si $d^+(x) = d^-(x) = d \quad \forall x \in V(D)$.

Evidentemente, en un digrafo, todos los caminos son "unidireccionales" pero, aparte de esta diferencia, todos los conceptos relacionados con el de camino son análogos a sus correspondientes en los grafos. Así, en D, la distancia entre dos vértices $u,v \in V(D)$ se denota igualmente por $d(u,v)$ o $d_D(u,v)$ (aunque ahora no tiene por que ser $d(u,v) = d(v,u)$), y el diámetro k y la distancia media $\bar{k}$ vienen dados igualmente por las expresiones (2.10) y (2.11).

Como veremos, en este trabajo sólo consideramos digrafos *fuertemente conexos*; es decir que, dados $x,y \in V$ cualesquiera, siempre existe un camino de *x* a *y* y un camino de *y* a *x* ($d(x,y) < \infty$ y $d(y,x) < \infty$).