

## 1.4 REDES DE INTERCONEXION

### 1.4.1 Multiprocesadores

Los avances tecnológicos en el campo de la integración a muy gran escala (VLSI) ha tenido un gran impacto en el diseño de sistemas computadores. Dos ejemplos concretos son los sistemas multiprocesadores y el desarrollo de las llamadas redes locales.

Un *sistema multiprocesador* puede definirse brevemente [V1] como aquel formado por varios procesadores que se comunican entre sí a través de módulos de memoria compartidos, y que permite obtener paralelismo en la ejecución de las tareas o programas que le son asignados.

Problema fundamental en el diseño de tales sistemas es la *forma de interconectar* los procesadores con los módulos de memoria. Existen diferentes soluciones que son, básicamente, función de la tecnología subyacente, del número de procesadores y del grado de comunicación necesitada entre ellos. Así, y en una primera clasificación, los sistemas pueden tener un solo nivel de memoria (los procesadores acceden a cualquier posición de memoria en el mismo tiempo) o varios (cada procesador accede a diferentes partes de la memoria con diferente costo).

Los primeros pueden considerarse como sistemas "*fuertemente acoplados*" [AL1] en los que las unidades de memoria son compartidas directamente por los procesadores. En cambio, los segundos son sistemas "*débilmente acoplados*" (llamados en [AL1] multicomputadores) pues cada procesador, con su correspondiente memoria local intercambia mensajes con los otros pares procesador-memoria y, entonces, las memorias sólo se comparten en el sentido de que los mensajes pueden ser enviados a o transmitidos desde otros computadores (es decir, pares proc.-mem.).

Normalmente, los sistemas tienen tantos más niveles de memoria (menos acoplados) cuanto mayor es el número de procesadores.

Ya hemos dicho que uno de los objetivos de los sistemas multiprocesadores es el de poder ejecutar los algoritmos de una forma paralela o concurrente. Otros objetivos son  $|V1|$ :

1. Aumentar la velocidad de cálculo.
2. Fiabilidad, es decir posibilidad de que el sistema funcione de forma degradada (p.e. en el caso de que un procesador o un enlace de la red queden fuera de servicio).
3. Modularidad, o posibilidad de variar el número de procesadores y de recursos en general (memorias, periféricos, etc.) según las necesidades.
4. Optimización en el uso de los recursos.

#### *1.4.2 Topologías de interconexión: características principales y clasificación.*

Hemos citado detalladamente los objetivos anteriores por cuanto influyen de forma decisiva en los requerimientos impuestos a las redes de interconexión.

Como sabemos, estas se modelan mediante grafos, dirigidos o no, cuyos vértices representan procesadores, memorias o buses, y sus líneas (o arcos) enlaces o conexiones entre ellos.

Para elevado número de procesadores, los principales requerimientos exigidos a la topología del sistema son los siguientes:

1. Valor constante y reducido del grado de cada vértice (en el caso de digrafos suponemos que ambos grados, de entrada y de salida, son iguales) a fin de minimizar el costo hardware-software de la comunicación.

2. Diámetro y distancia media entre vértices mínimos.
3. Existencia de algoritmos eficientes y sencillos de encaminamiento de los mensajes a través del sistema.
4. Tráfico uniforme, es decir, idéntica probabilidad de ocupación de cualquier enlace.
5. Fiabilidad frente a posibles fallos de algunas conexiones.
6. Modularidad en la estructura: posibilidad de añadir nuevos procesadores sin tener que redefinir los nudos o enlaces anteriores y a un costo constante.

Como ya hemos dicho, en este trabajo vamos a prestar una especial atención al punto (2). Los parámetros referidos en él, diámetro y distancia media, corresponden físicamente al número máximo y medio respectivamente de "buffers" o enlaces que debe atravesar un mensaje para alcanzar su destino. Interesa que dichos parámetros sean mínimos porque los "interfaces" situados en cada vértice (procesador), encargados del "buffering" y encaminamiento de los mensajes, son sistemas muy fiables y, además, la densidad de tráfico suele ser baja  $|TS1|$ , de manera que, salvo en el caso improbable de fallo, *se encaminan los mensajes por el camino más corto*; esto es, de forma que la comunicación entre dos vértices sufra el menor retraso posible.

En  $|SMM1|$  se divide a las topologías de interconexión en las siguientes clases (ver también  $|FS2|$ ):

1. *Redes multietapa*, en las que los procesadores están conectados a las memorias a través de una red de líneas e interruptores.
2. *Redes de camino dedicado*, en las que los procesadores están conectados a las memorias o entre sí por enlaces

directos. A su vez, y según el carácter de dichos enlaces, estas redes pueden ser *unidireccionales* o *bidireccionales*.

3. *Redes de camino compartido*, en las que los procesadores comparten un medio de comunicación, p.e. un conjunto de buses.

En el capítulo siguiente estudiaremos la forma de obtener redes de camino dedicado y compartido.

#### 1.4.3 *Redes con enlaces bidireccionales*

Evidentemente, el carácter uni- o bi-direccional de los enlaces determina el tipo de grafo, dirigido o no, capaz de modelar la red. Por lo que se refiere a grafos no dirigidos, algunas de las topologías propuestas últimamente son:

- El p-Cubo [SB1] (1977) que no es sino una de las múltiples estructuras construidas a partir del producto cartesiano de p grafos [H1].
- La red Multiárbol Estructurado [AL1] (1978).
- El CCC ("Cube Connected Cycle") [PV1] (1979) que es una variante muy versátil del p-Cubo.
- Las redes "Snowflake" y "Dense Snowflake" [FS1] (1980).
- Redes tipo Lente y las Lentes Multietapa [FS2] (1981), que estudiaremos con detalle en la sección 2.3.
- Red Hiperárbol [GS1] (1981), topología que combina la fácil expandibilidad de las estructuras en árbol con la compactidad del p-Cubo.
- El Grafo de Moebius de orden n [LS1] (1982), red trivalente (3-regular) con  $N = 2^n$  vértices y diámetro  $k = \frac{3}{2} \log_2 N + O(1)$  muy cercano a la cota mínima (1.13).

Todas ellas pueden considerarse como redes de camino dedicado, salvo las tipo lente que son, como veremos, de camino compartido.

#### 1.4.4 *Redes con enlaces unidireccionales*

Las redes con caminos unidireccionales, modeladas mediante digrafos, tienen una serie de ventajas frente a las de tipo bidireccional. Principalmente, en lo que se refiere a la complejidad de los "interfaces" (permiten puertas diferenciadas de entrada y salida), control de tráfico y algoritmos de encaminamiento.

Por otra parte, y según el criterio (1) del apartado 1.4.2, en estas redes también se tiende a exigir regularidad en el grado de los vértices, ya que ello facilita el diseño de los "interfaces" y la expandibilidad del sistema entre otras razones.

Por todo lo anterior, últimamente se ha dedicado un interés especial al estudio de los grafos diregulares con elevado número de vértices y pequeño diámetro (ver capítulo IV). Algunas topologías interesantes propuestas recientemente se citan en el apartado 4.1.1.

#### 1.4.5 *Redes locales*

Los grafos dirigidos del apartado anterior son especialmente aptos para modelar los otros sistemas citados al comienzo de esta sección, es decir las redes locales.

Una *red local* es un sistema constituido por varios ordenadores situados a corta distancia (< 2-3 kms.) y caracterizado porque los diversos nudos de la red se comunican a muy alta velocidad (> 1 Mbit/s.) y bajo costo.

Uno de los problemas fundamentales que se plantean en el

diseño de tales sistemas es precisamente la elección de la red de interconexión. Varias soluciones [T2] han sido propuestas e implementadas. Dos de ellas son las llamadas topologías de bus y de lazo. El ejemplo más simple de estas últimas es la topología *en anillo*, en la que cada procesador está conectado al siguiente formando así un ciclo unidireccional. Para mejorar la fiabilidad y el ancho de banda de la comunicación de esta estructura se han propuesto diferentes métodos. Básicamente, en todos ellos se dobla el número de enlaces de manera que todos los nudos quedan con grado de entrada y de salida igual a dos. Estas topologías se conocen con el nombre genérico de *DDL CN* ("Distributed Double Loop Computer Networks"). En [FVY2] y [FYV1] se resumen las configuraciones de este tipo sucesivamente propuestas (junto con el diámetro y la distancia media obtenidos en cada caso) y que son:

1. *DDL CN* (Wolf y Liu [L3], [WLW1]), en la que cada nudo  $i$  se conecta hacia los nudos  $(i+1) \bmod N$  e  $(i-1) \bmod N$  ( $N$  = número de vértices).
2. "Daisy-chain loop" (Grnarov [GKG1]), donde cada nudo  $i$  se conecta hacia los nudos  $(i+1) \bmod N$  e  $(i-2) \bmod N$ .
3. "Optimal loop" (Raghavendra y Gerla [RG1]), en la que cada nudo  $i$  se conecta hacia los nudos  $(i+1) \bmod N$  e  $(i-h) \bmod N$ , y se determina  $h$  con el fin de optimizar el diámetro y la distancia media obteniéndose  $h = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ .

Como se demuestra en [FVY2] y [FYV1], la elección de esta  $h$  es buena en general, pero no la óptima para cada  $N$ .

4. Finalmente, en los referidos trabajos [FVY2] y [FYV1] se plantea el problema en un contexto más general,

estableciéndose arcos desde el vértice  $i$  hacia los vértices  $(i+a) \bmod N$  e  $(i+b) \bmod N$ , donde  $a$  y  $b$  son variables a determinar para optimizar como antes el diámetro y la distancia media.

Una característica muy interesante de este planteamiento es que ahora el problema es equivalente al planteado en  $|S2|$ , consistente en "descifrar vectores  $p$ -ordenados con dos interconexiones  $k$ -separadas".

A estas últimas topologías, que llamamos "de paso fijo", las estudiaremos con detalle en el apartado 3.4.3.

## 1.5 COTAS DE MOORE

### 1.5.1 Dos problemas básicos

Por lo estudiado en la sección 1.4, parámetros básicos en el estudio de nuestros grafos, tanto dirigidos como no dirigidos, son el grado  $d$ , diámetro  $k$ , distancia media  $\bar{k}$  y número de vértices  $N$ .

Evidentemente, estos parámetros están relacionados, y, p.e., la especificación de  $d$  y  $k$  determina, dentro de ciertos límites, el valor de  $N$ . Esto suele expresarse como  $N = f(d, k)$ . Así, en un ciclo unidireccional [bidireccional],  $d=1$  [ $d=2$ ] y  $N = k+1$  [ $N = 2k$  ó  $2k+1$ ] y en el hipercubo  $d=k$  y  $N = 2^k$  [AL1].

Por lo que respecta a obtener redes con pequeño diámetro, y desde el punto de vista de la teoría de grafos, el problema que se plantea comprende dos aspectos diferentes:

- (P1) Dados el grado  $d$  y el diámetro  $k$ , hallar (di)grafos  $d$ -regulares con diámetro  $k$  y máximo número de vértices.
- (P2) Dados  $d$  y  $N$ , construir (di)grafos  $d$ -regulares con  $N$  vértices que minimicen el diámetro  $k$  y/o la distancia media  $\bar{k}$ .

### 1.5.2 Grafos de Moore

Considerando el árbol generador formado a partir de cualquier vértice  $v \in V$ , es fácil dar ciertas cotas para los parámetros referidos en (P1) y (P2). En efecto, si  $G$  es un grafo  $d$ -regular con diámetro  $k$ , y haciendo un recuento de los vértices de dicho árbol, (ver p.e. [AL1] ó [TS1]) resulta que  $N = |V(G)|$  debe cumplir:



$$N \leq 1 + d + d(d-1) + \dots + d(d-1)^{k-1} = \frac{d(d-1)^k - 2}{d-2}, \quad d > 2 \quad (1.12)$$

de donde despejando y tomando logaritmos, se obtiene

$$k \geq \log_{d-1} \left\lceil \frac{N(d-2) + 2}{d} \right\rceil \quad (1.13)$$

Notar que, aunque en la discusión precedente hemos supuesto  $G$   $d$ -regular, las expresiones (1.12) y (1.13) se aplican también a cualquier grafo que cumpla  $d(v) \leq d \quad \forall v \in V(G)$ .

Los grafos que cumplen (1.12) con el signo de igualdad se llaman *grafos (no dirigidos) de Moore  $(d,k)$*  (UMG's). Se ha probado, [BI1], [F2] y [HS1] que los grafos de Moore sólo existen para unos pocos valores de  $d$  y  $k$ . Así, para  $d > 2$ , sólo son posibles los grafos  $(3,2)$ , *grafo de Petersen*, y  $(7,2)$  (y quizá también  $(57,2)$ ).

Al  $N_{\max}$  dado por (1.12), también denotado por  $f_{\text{Moore}}(d,k)$ , se le llama *cota de Moore*.

### 1.5.3 Digrafos de Moore

A partir de un digrafo cualquiera  $D = (V,A)$  con  $d^+(v) \leq d$  y  $d^-(v) \leq d \quad \forall v \in V(D)$ , un razonamiento análogo al seguido en el apartado anterior permite llegar a las siguientes expresiones para el número de vértices y el diámetro:

$$N \leq 1 + d + \dots + d^k = \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1} \quad (1.14)$$

$$k \geq 1 = \lceil \log_d \{N(d-1) + 1\} \rceil - 1 \quad (1.15)$$

Además, en este caso, y razonando análogamente sobre un árbol generador de  $D$ , se obtiene también una cota para la distancia media  $|III|$  que resulta:

$$\bar{k} \geq 1 - \frac{d^{l+1} - d^l - d + 1}{N(d-1)^2} \quad (1.16)$$

Igualmente, a los digrafos que alcanzan la *cota de Moore* dada por (1.14) se les llama *grafos dirigidos de Moore*  $(d,k)$  (DMG's). Se ha probado [T1] que no existen DMG's  $(d,k)$  para valores no triviales de  $d$  y  $k$  ( $d > 1$ ,  $k > 1$ ).

## CAPÍTULO II

### OBTENCION DE GRAFOS Y DIGRAFOS

## 2.1 INTRODUCCION

### *2.1.1 Un método general para la obtención de redes de interconexión*

En la sección 1.4 hemos visto como, atendiendo a su estructura, las redes de interconexión para sistemas multiprocesadores pueden clasificarse en tres grupos generales: las de camino dedicado unidireccional y bidireccional, y las de camino compartido.

Además, sabemos que todas estas configuraciones pueden modelarse mediante grafos dirigidos (como veremos, todo grafo no dirigido es isomorfo a un digrafo).

En este capítulo vamos a estudiar una nueva metodología general para el diseño de tales redes basada en los dos puntos siguientes:

1. Numeración o rotulación conveniente de los procesadores y/o buses (es decir, direccionamiento de los nodos de la red).
2. Estudio de condiciones de adyacencia entre procesadores de forma que la topología obtenida cumpla óptimamente con determinadas características preestablecidas (recordar los criterios enumerados en el apartado 1.4.2).

Estas condiciones vendrán determinadas por las "funciones de adyacencia", definidas sobre todo  $V$  y que, a su vez, determinan el conjunto de líneas,  $E$ , o el de arcos,  $A$ .

Como veremos, esta metodología de diseño es muy útil para obtener tanto redes de caminos dedicados o privados (conexiones directas entre nodos de la red) uni- o bi-direccionales, así como de caminos compartidos (conexiones a través de buses generales).

## 2.2 BASE TEORICA

## 2.2.1 Obtención de grafos dirigidos

Para obtener un grafo  $d$ -diregular,  $D = (V, A)$  según la metodología explicada en la sección 2.1, notemos que  $A$ , conjunto formado por  $d|V|$  arcos, puede considerarse como un conjunto  $\vec{F}$  formado por  $d$  funciones  $f_i: V \rightarrow V$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ . Razonando a la inversa, podemos construir un grafo  $d$ -diregular si:

- 1º) Definimos el conjunto  $V$  (identificando sus elementos)
- 2º) Establecemos  $d$  funciones  $f_1, \dots, f_d: V \rightarrow V$

Ambos puntos están estrechamente relacionados pues, según como rotulemos los vértices de  $V$ , será más o menos fácil elegir adecuadamente las funciones  $f_i$ .

Evidentemente, en este caso, dicha elección debe ser tal que asegure la regularidad de  $D$ , o sea  $d^+(v) = d^-(v) = d \quad \forall v \in V$ .

Notar además que, como el dominio de definición de cada  $f_i$  es todo  $V$ , de cada vértice  $v$  se pasa a los vértices adyacentes aplicando las mismas funciones  $f_1, f_2, \dots, f_d$ . Ver figura 2.2.1.

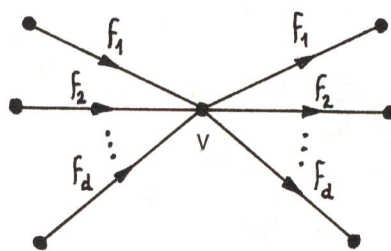


Fig. 2.2.1

Si todas las funciones  $f_i$  conmutan entre sí, es decir  $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, d$ , se obtienen grafos como los estudiados en el capítulo III. Es interesante resaltar que, en este caso, y como veremos en dicho capítulo, existe un isomorfismo entre las redes obtenidas y determinadas formas geométricas que "em

baldosan" periódicamente el espacio  $R^d$  (ver |FVY2| y |FYV1|).

### 2.2.2 Obtención de grafos no dirigidos

2.2.2a) Para obtener, de forma similar, un grafo  $G$  (no dirigido), la elección del conjunto  $\vec{F}$  es más restrictiva. En efecto,  $G=(V,E)$  puede verse como un grafo dirigido  $D=(V,A)$  en donde cada línea  $(u,v) \in E$  da lugar a dos arcos  $[u,v]$  y  $[v,u]$ . Por tanto, si queremos que las funciones  $f_i$  apliquen también a todo  $V$ ,  $\vec{F} = F$  tiene que ser de la forma:

$$F = \{f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}, \dots, f_{\frac{d}{2}}, f_{\frac{d}{2}}^{-1}\} \quad \text{si } d \text{ es par} \quad (2.1a)$$

y

$$F = \{f_1, f_1^{-1}, \dots, f_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}, f_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}^{-1}, g, g^{-1}\} \quad \text{si } d \text{ es impar} \quad (2.1b)$$

Con lo que, en cada vértice  $v$ , y supuesto  $d$  impar, tenemos ahora la situación que mostramos en la figura 2.2.2.

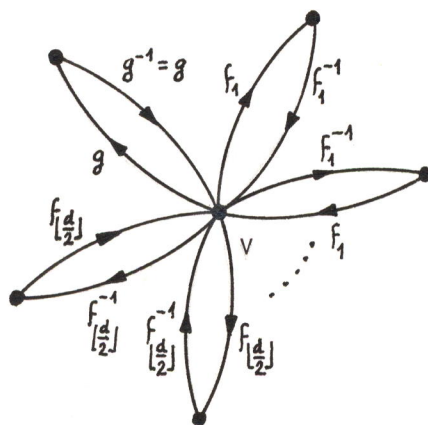


Fig. 2.2.2

De este tipo, con  $d=3$ , son los grafos de Moebius |LS1| y el "Cube Connected Cycle" |PV1| citados anteriormente.

Por otra parte, es evidente que, dado un grafo cualquiera  $G$   $d$ -regular con  $d$  par [ $d$  impar], puede construirse de la forma indicada si y sólo si es posible colorear las líneas de  $G$  con los "colores"  $1, 2, \dots, \frac{d}{2}$  [ $1, 2, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lceil \frac{d}{2} \rceil$ ] de manera que en cada vérti

ce incidan exactamente dos líneas de cada color [salvo el color  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  que incida sólo una vez]. (Se supone  $f_i \neq f_j \forall i \neq j$ ).

2.2.2b) Otra posibilidad para obtener grafos no dirigidos con número par de vértices es descomponer el conjunto  $V$  en otros dos disjuntos:  $V_1$  y  $V_2$ , de manera que  $|V_1| = |V_2| = |V|/2$ . Así, distinguimos entre dos clases de vértices, lo que permite definir el conjunto de funciones,  $F$ , de la siguiente forma:  $F = F_1 \cup F_2$ ,

$$F_1 = \{f_i, i=1, \dots, d \mid f_i: V_1 \longrightarrow V_2\} \quad (2.2a)$$

$$F_2 = \{f_i^{-1}, i=1, \dots, d \mid f_i^{-1}: V_2 \longrightarrow V_1\} \quad (2.2b)$$

Es decir que desde los vértices de  $V_1$  alcanzamos los de  $V_2$  con las funciones  $f_i$  y viceversa con las funciones  $f_i^{-1}$ . Representando los vértices de  $V_1$  con puntos negros y los de  $V_2$  con puntos blancos, tenemos ahora la situación de la figura 2.2.3.

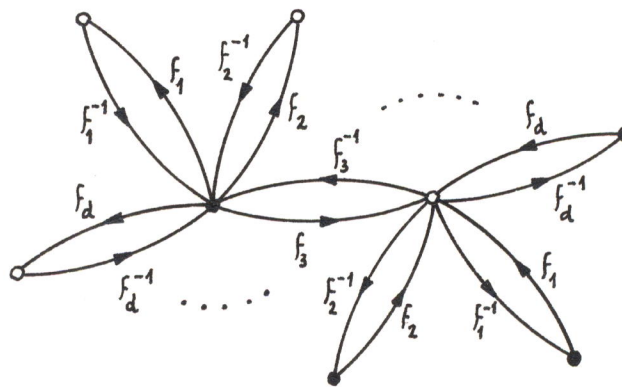


Fig. 2.2.3

Aunque los autores no lo citan expresamente, las importantes topologías denominadas "lentes completadas" propuestas en [FS2] pueden modelarse con este tipo de representación. También pertenecen a este grupo, en el caso en que  $d=3$  y las  $f_i$ 's conmutan entre sí, las estructuras denominadas "Chordal Ring Networks" [AL2] que, además, son también isomorfas a ciertos embaldosamientos pe