

$$(m_1, \dots, 0, \dots, m_{i_2} + 1, \dots, m_d) = (m_1', \dots, m_{i_1}' + 1, \dots, 0, \dots, m_d') \quad (3.112a)$$

$$\text{con} \quad 1 \leq \sum m_j + 1 \leq k \quad \text{y} \quad 1 \leq \sum m_j' + 1 \leq k \quad (3.112b)$$

en contra de la hipótesis de que todos los puntos de S^* son distintos. Por tanto, el conjunto E consta de

$$|E| = d \binom{d+k-2}{d-1} \quad (3.113)$$

elementos.

Demostraremos ahora que cualquiera de estos puntos es igual a uno del conjunto

$$T = \{(n_1, n_2, \dots, n_d) \mid 0 \leq n_j, \sum n_j = k\} \quad (3.114)$$

En efecto, si fuese

$$(m_1, \dots, -1, \dots, m_d) = (n_1', n_2', \dots, n_d') \quad (3.115a)$$

$$\text{con} \quad 0 \leq \sum_{j \neq i} m_j \leq k-1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \sum n_j' < k \quad (3.115b)$$

sumando \vec{e}_i a ambos miembros, tendríamos

$$(m_1, \dots, 0, \dots, m_d) = (n_1', \dots, n_i' + 1, \dots, n_d') \quad (3.116a)$$

$$\text{con} \quad 0 \leq \sum m_j \leq k-1 \quad \text{y} \quad 0 < \sum n_j' + 1 \leq k \quad (3.116b)$$

en contradicción, una vez más, con la citada hipótesis inicial.

Además, según dicha suposición, T consta de

$$|T| = \binom{k+d-1}{d-1} \quad (3.117)$$

puntos todos ellos distintos. Por tanto, de (3.113) y (3.117) tendría que cumplirse

$$d \binom{k+d-2}{d-1} \leq \binom{k+d-1}{d-1} \quad (3.118)$$

desarrollando ambos números combinatorios y simplificando, se obtiene $kd \leq k+d-1$, es decir, $k \leq 1$.

3.4.2 Redes de grado 2

Cuando $d=n=2$, se puede demostrar⁽¹¹⁾ que, para cualquier M con $\det(M) \neq 0$, el conjunto C_0^{\rightarrow} (que puede no ser único) homólogo al del apartado 3.3.3, y cuya elección ha quedado justificada en la sección anterior, tiene, como en dicho apartado, forma de "L" o, como caso particular, forma rectangular.

Una "L", determinada por sus dimensiones l, h, x, y , (recordemos la notación empleada en la demostración del teorema 3.3.8), según figura 3.4.1, corresponde a la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -x & h \end{pmatrix}$, $\det(M) = lh - xy$. Ver figura 3.4.2.

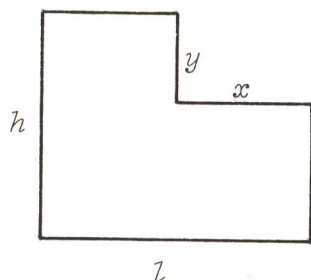


Fig. 3.4.1

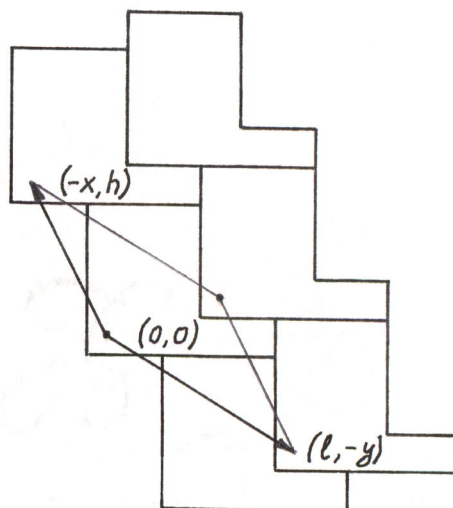


Fig. 3.4.2

En función de estas dimensiones, y a la vista de la figura 3.4.1, se obtienen fácilmente el diámetro y la distancia media del digrafo D_M que resultan ser:

(11) Ver apéndice A. También en [BS1], y en un contexto diferente, se demuestra este resultado para el caso en que A_M es cíclico.

$$k = \max\{h+1-y-2, h+1-x-2\} \quad (3.119)$$

$$y \quad \bar{k} = \frac{1}{N} \left[\left(\frac{1}{2}h - xy \right) (1+h-2) + \frac{1}{2}xy(x+y-2) \right] \quad (3.120)$$

Entonces, dado N , el problema se reduce a encontrar tales dimensiones, elementos de la matriz M , de manera que $\det(M)=N$ y se minimice (3.119) y/o (3.120).

Un tratamiento continuo del problema, tal como se hace en [FVY2], muestra que, al considerar l, h, x, y como variables reales en vez de enteros, la "matriz óptima" que minimiza simultáneamente k y \bar{k} es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} -x & 2x \\ 2x & -x \end{pmatrix} \quad (3.121)$$

lo que supone

$$N = 3x^2, \quad k_{\min} = \sqrt{3N} - 2 \quad \text{y} \quad \bar{k}_{\min} = \frac{5}{9}\sqrt{3N} - 1 \quad (3.122)$$

Por ejemplo, si $x=2$, $N=12$, se obtiene $M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

que corresponde a la "L" mostrada en la figura 3.4.3a y da lugar al digrafo de la figura 3.4.3b.

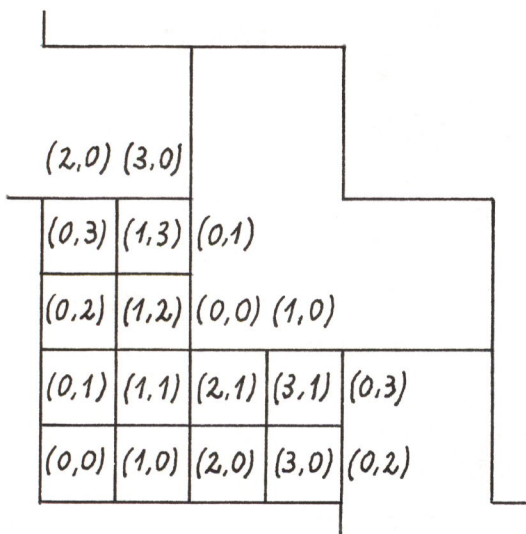


Fig. 3.4.3a

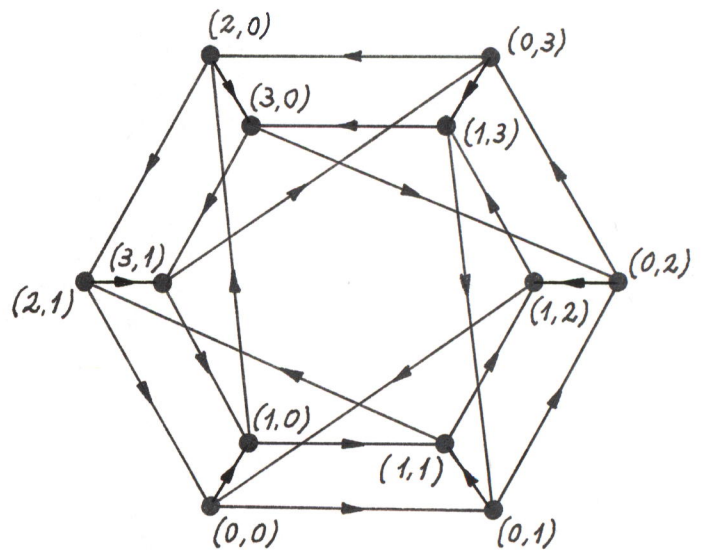


Fig. 3.4.3b

No obstante, el problema discreto resulta mucho más difícil. En este caso, ni el diámetro ni la distancia media entre nodos crecen siempre con N . Por ejemplo, es posible obtener "formas en L" ("baldosas") para $N=26$ ó $N=27$ con $k=7$, cuyas correspondientes matrices son:

$$M_{26} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{27} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad (3.123)$$

pero el caso $N=25$ requiere $k=8$:

$$M_{25} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad M_{25} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \quad (3.124)$$

(Ver |FVY2|).

Debido a ello, no conocemos ninguna expresión que permita calcular M_{opt} , y por tanto, k_{opt} y \bar{k}_{opt} , para cada número de vértices N .

3.4.3 Redes de paso fijo

Como hemos estudiado en el apartado 3.3.5, si el grupo A_M es cíclico existen $\phi(N)$ generadores lineales, cada uno de los cuales permite establecer un isomorfismo entre el sistema completo de residuos mod. M , S , y el conjunto de números $T = \{0, 1, \dots, N-1\}$ (isomorfismo entre los grupos A_M y A_N).

Así, sea M una matriz $n \times n$ entera, $N = \det(M)$, tal que A_M es cíclico, y sea \vec{p} un generador lineal de A_M . Mediante \vec{p} podemos definir un isomorfismo entre la red D_M y el digrafo que denotamos por D_M^* de la siguiente forma:

- a) Cada vértice $\vec{r} \in S$ de D_M se transforma en el vértice $\alpha \in T$ con $\alpha = \vec{r} \cdot \vec{p} \pmod{N}$ de D_M^* (3.125)

Por tanto, los vértices de D_M^* se direccionan con los

números $0, 1, \dots, N-1$.

b) Cada arco $[\vec{r}, \vec{r} + \vec{e}_i]$ de D_M se transforma en el arco

$$[\vec{r} \cdot \vec{p}, (\vec{r} + \vec{e}_i) \cdot \vec{p}] = [\alpha, \alpha + p_i] \text{ de } D_M^* \quad (3.126)$$

Por tanto, desde cada vértice $\alpha \in V(D_M^*)$ existen arcos hacia los vértices $\alpha + p_1, \dots, \alpha + p_n \pmod{N}$. De ahí el nombre de *redes de paso fijo*.

Tomando $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ como en el ejemplo que hemos venido siguiendo, y con el generador $\vec{p} = (1, 11)$ (ver figura 3.3.3), se obtiene la red que se muestra, junto con su "L" y el "embaldosamiento" a que da lugar, en la figura 3.4.4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12	13	0	1	2
10	11	12	13	0	1	2	3	4	5
13	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12	13	0
8	9	10	11	12	13	0	1	2	3
11	12	13	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

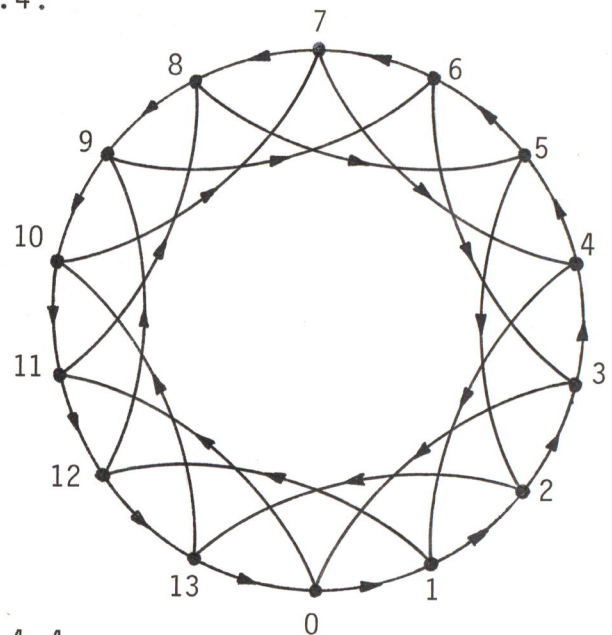


Fig. 3.4.4

Este tipo de redes se estudian para $n=2$ en |FVY2| y para $n \geq 2$ en |FYV1|. En el primer caso, el problema se descompone en dos partes:

1. Búsqueda de formas en "L" óptimas, es decir con diámetro y/o distancia media mínimos, tal como hemos discutido en el apartado anterior.
2. Obtención de generadores lineales para dichas "L's".

Como sabemos, dada "L" o su correspondiente $M = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -x & h \end{pmatrix}$, podemos hallar un generador lineal aplicando la fórmula (3.86), es decir

$$\vec{p} = N\vec{\mu}(M^T)^{-1} \quad (3.128)$$

donde

$$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} h & x \\ y & 1 \end{pmatrix}, \quad (\vec{\mu}, M^T) = 1 \quad (3.129)$$

($\vec{\mu}$ es cualquier generador lineal de M^T).

Pero ya hemos visto que una condición necesaria y suficiente para que exista $\vec{\mu}$, y por tanto \vec{p} , es que las dimensiones de la "L" cumplan el teorema 3.3.8, es decir

$$(M^T) = (M) = (1, h, x, y) = 1 \quad (3.130)$$

Esta condición impide la "construcción" de algunas "L's" interesantes. Por ejemplo, si $x > 1$, no existe generador lineal para la "baldosa" óptima $l = h = 2x = 2y$, $N = 3x^2$, $x \in \mathbb{Z}$, estudiada en el apartado anterior pues $(1, h, x, y) = x$.

En cambio, para "L's" con dimensiones

$$x = y, \quad l = 2x \pm 1 \quad y/\delta \quad h = 2y \pm 1 \quad (3.131)$$

que, para su número de vértices, son óptimas, existen generadores lineales de la forma $(1, p_2)$ [ó $(p_1, 1)$]. En efecto, basta tomar en (3.128)

$$\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2) = (\pm 1, \mp 2) \quad [\text{ó } \vec{\mu} = (\mp 2, \pm 1)] \quad (3.132)$$

No obstante, para todo N, tampoco conocemos en este caso una forma cerrada de expresar algún par (p_1, p_2) de "pasos óptimos" y, por tanto, el diámetro y/o la distancia media mínimos.

Por lo que respecta a estos últimos parámetros, en |FVY2| y |FYV1| se dan las siguientes cotas:

$$\lfloor \sqrt{3N} \rfloor - 1 \leq k \leq \lfloor \sqrt{3N} \rfloor \quad (3.133)$$

$$\frac{5}{9}\sqrt{3N} - 1 < \bar{k} < \frac{5}{9}\sqrt{3N} \quad (3.134)$$

donde los límites inferiores se derivan de (3.122) para todo valor de N , mientras que las cotas superiores han sido obtenidas para todos los valores de interés práctico ($N \leq 256$).

En dichos trabajos también se muestran tablas con las soluciones óptimas, obtenidas mediante un programa de ordenador, para múltiples valores de N , tanto para $n=2$, como para $n>2$.

A las redes obtenidas en el caso comentado, $n=2$, se las llama también "*estructuras de doble lazo*". Para ellas, en |FVY2| se dan también tablas comparativas entre las soluciones óptimas y las propuestas anteriormente |L3|, |WLW1|, |GKG1| y |RG1|.

Un hecho a resaltar en estas topologías es que, para todos los mencionados valores de N de interés práctico, existe un generador lineal óptimo con $p_1 = 1$. Las dos primeras excepciones se producen con $N = 378$ y 450 . En el primer caso se obtiene $\vec{p} = (2,161)$, $k = 33$ y $\bar{k} = 17,833$ y en el segundo $\vec{p} = (2,185)$, $k = 35$ y $\bar{k} = 19,5$.

3.5 ALMACENAMIENTO DE DATOS EN MEMORIAS PARALELAS

3.5.1 Introducción

En la sección 1.1 ya comentamos como la teoría de las congruencias en Z^n tiene varias aplicaciones en la Ciencia de la Computación. Acabamos de estudiar con detalle una de ellas: la obtención de "redes de pasos conmutativos", entre las que se encuentran las importantes topologías que hemos llamado "redes de paso fijo". Según se explicó en el apartado 1.4.5, el problema que se plantea en estas configuraciones es equivalente al estudiado en [S2], que consiste en establecer interconexiones entre diferentes registros para reordenar de forma óptima (es decir, a bajo costo y alta velocidad) las componentes de ciertos vectores llamados "p-ordenados". La resolución de este problema puede considerarse así como otra de las aplicaciones de la teoría mencionada.

Finalmente, en esta sección comentaremos brevemente una tercera aplicación relacionada con el almacenamiento de datos en memorias paralelas.

Muchos de los cálculos relativos a matrices y/o vectores implican el realizar las mismas secuencias de operaciones con datos independientes. Estos algoritmos se pueden ejecutar rápidamente en multiprocesadores del tipo SIMD ("single-instruction-multiple-data") tales como el Illiac IV. Como su mismo nombre indica, estos sistemas permiten ejecutar simultáneamente las mismas operaciones con distintos datos. Básicamente, están constituidos por una unidad de control, un conjunto de procesadores y memorias, y una red de interconexión entre unos y otras (ver capítulo V). Por simplicidad, se supone que las memorias son independientes y que cada una de ellas permite *una* lectura o escritura de datos en cada ciclo de memoria.

3.5.2 Definiciones y planteamiento del problema

El funcionamiento efectivo de los sistemas SIMD depende en gran medida de la posibilidad de almacenar los elementos de las matrices en las memorias de manera que al leerse los datos se eviten los conflictos producidas en ellas. Más concretamente, dada una matriz de datos y un conjunto de "partes deseadas" de la matriz (por ejemplo, filas o columnas) nos preguntamos como almacenar dicha matriz de manera que estas partes (necesarias en el cálculo realizado) puedan ser extraídas o leídas en un ciclo de memoria. Esto es, de manera que todos los datos de cualquiera de ellas estén almacenados en diferentes módulos de memoria $|S1|$.

En el estudio matemático del problema, se supone que las matrices son infinitas en todas direcciones $|S1|$, de manera que cada punto de Z^2 representa un elemento de la matriz. Además, tal como en $|S1|$, necesitamos definir los siguientes conceptos:

Un *esquema de ordenación* ("skewing scheme") es una función $S: Z^2 \rightarrow W$ con $W = \{0,1,\dots,N-1\}$, $N =$ número de memorias, donde $S(i,j) = h$ significa que el elemento a_{ij} de la matriz se almacena en el módulo de memoria $h \in W$.

Una *plantilla de datos* ("data template"), T , de tamaño M , es un conjunto formado por M puntos de Z^2 incluido el origen. Un ejemplo de una plantilla de datos, $T(\vec{v})$, $\vec{v} \in Z^2$, es el conjunto de vectores obtenido al sumar \vec{v} a todos los vectores de T . (Notar la analogía con el conjunto $C_a^{\vec{v}}$ del apartado 3.3.3). Físicamente, estos dos últimos conceptos se corresponden con lo que hemos llamado "partes deseadas" de la matriz.

Finalmente, decimos que un esquema de ordenación es *válido* para un cierto conjunto $\{T_1, \dots, T_r\}$ de plantillas de datos si cualquier par de elementos de la matriz almacenados en el mismo

módulo de memoria, no pertenecen a ningún ejemplo de cualquier plantilla de datos bajo consideración.

Por tanto, el problema consiste precisamente en hallar, si existen, esquemas de ordenación para determinados conjuntos de plantillas de datos, necesarios para la ejecución de los algoritmos de cálculo.

3.5.3 Algunos resultados básicos, congruencias en Z^2

En una máquina SIMD con P procesadores, el tamaño máximo de una plantilla de datos es P. Además, cuando $P=N$ se consigue optimizar la utilización de procesadores y memorias.

Teorema 3.5.1:

Dados un sistema SIMD con $P=N$ y una plantilla de datos de tamaño N, existe un esquema de ordenación válido para esta plantilla si y sólo si la figura formada por N cuadrados unitarios con centros los puntos de la plantilla *tesela el plano mediante traslaciones*. (Ver demostración en [S1]).

A partir de este teorema ya podemos ver como aplicar la teoría de congruencias en Z^2 a la obtención de esquemas de ordenación válidos para determinadas plantillas de datos. En efecto, según el apartado 3.3.3, todo sistema completo de residuos módulo M "tesela" periódicamente el plano mediante traslaciones, por tanto, dada una plantilla de datos de tamaño N, tenemos que hallar una matriz M tal que los puntos de Z^2 que forman la plantilla representen a todos los elementos de A_M . Entonces, el esquema de ordenación se construye asignando a cada una de las clases residuales un número distinto del 0 al N-1 (número del módulo de memoria). O sea:

$$S(\vec{v}) = S(\vec{u}) \iff \vec{v} \equiv \vec{u} \pmod{M} \quad (3.135)$$

En $|S1|$ se estudian los dos siguientes esquemas de ordenación de interés práctico, pues permiten disponer de una regla para almacenar los elementos de la matriz en la memoria:

Un esquema de ordenación *periódico con periodo N* es aquel que cumple

$$S(i,j) = S(i \pm k_1 N, j \pm k_2 N) \quad \forall i, j \in Z^2 \text{ y } k_1, k_2 \in Z \quad (3.136)$$

Naturalmente, en este caso, la información necesaria de que debemos disponer para manejar los datos ocupa un "cuadrado" de $N \times N$ registros.

Cuando N es muy grande (p.e. ≥ 1000), en $|S1|$ se propone usar un esquema de ordenación *lineal*. En este, existen constantes a y b tales que

$$S(i,j) = ai + bj \pmod N \quad (3.137)$$

En $|S1|$ el autor se pregunta para que clases de plantillas de datos, la existencia de esquemas de ordenación válidos supone la existencia de esquemas periódicos válidos, y si estos existen, que condiciones deben cumplirse para que también existan esquemas lineales válidos.

Como hemos dicho, nosotros proponemos usar esquemas de ordenación "*biperiódicos*" con periodo M , basados en los sistemas completos de residuos módulo M . Por el corolario 3.3.1, un esquema de periodo M es periódico según (3.136) con periodo $N = \det(M)$. Sin embargo, ahora la única información necesaria para la lectura/escritura de datos es la contenida en N registros, que definirá la correspondencia entre los módulos de memoria y los puntos del sistema completo de residuos, más 4 registros para la matriz M .

Por otra parte, en este caso es evidente cual es la condición que debe cumplir M para que exista un esquema de ordenación

lineal válido: el grupo A_M debe ser cíclico, es decir debe tener algún generador lineal. Pero, según el teorema 3.3.9, esto se cumple si y sólo si

$$(M) = 1 \quad (3.138)$$

CAPÍTULO IV

EL METODO DE DESDOBLAMIENTO DE NUDOS

4.1 INTRODUCCION

Siguiendo con el estudio de las redes de camino dedicado unidireccional, modeladas mediante digrafos con pequeño diámetro y distancia media, en este capítulo presentamos un nuevo método para la obtención de tales topologías que permite, en muchos casos, obtener configuraciones óptimas. Asimismo, dicho método, del que demostraremos su equivalencia con la noción de "grafo línea", resulta ser aplicable a la construcción de otros conjuntos de digrafos propuestos anteriormente.

4.1.1 Algunos resultados previos

Tal como se referencia en [III1], pueden encontrarse estudios relacionados con el problema (P1), propuesto en el apartado 1.5.1, en [A1], [E1], [F1] y [K1]. En cuanto a (P2), en [W1] se estudian ciertos grafos dirigidos con N vértices y grado d , demostrando que los valores mínimos de k y \bar{k} son ambos del orden de $d(N)^{1/d}$.

Siguiendo con el problema (P2), en [TS1], los autores aplican su "algoritmo de búsqueda local" (local search algorithm) para la búsqueda de grafos dirigidos de grados 2 y 3 minimizando el diámetro o la distancia media [TS1, pp.540-541] pero, como los mismos autores citan, el algoritmo es impracticable para valores grandes del número de vértices N ($N > 150$). En este mismo artículo también se citan ciertos grafos dirigidos de grado 2, con buen comportamiento por lo que respecta a k y \bar{k} , obtenidos a partir de ligeras modificaciones de los grafos MTS ("Multi-tree structured networks") propuestos por Arden y Lee en [AL1].

Por otra parte, en [III1], M.Imase y M.Itoh presentan un algoritmo simple para, dados d y N cualesquiera, $1 < d < N-1$, construir un grafo d -diregular con N vértices cuya distancia media está próxima al límite mínimo y su diámetro k es $\lceil \log_d N \rceil$, valor que resulta ser, como máximo, una unidad mayor que el límite inferior (1.15). Dicho algoritmo produce el grafo dirigido (en este caso, pseudodigrafo pues siempre contiene autolazos) $D = (V, A)$ con conjunto de vértices

$$V = \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \quad (4.1)$$

y conjunto de arcos

$$A = \{[x, y] \mid y = f_i(x) = dx + i \pmod{N}, i=0, 1, \dots, d-1\} \quad (4.2)$$

donde las f_i representan las funciones de adyacencia introducidas en el apartado (2.2.1).

Así, por ejemplo, para $N=8$ y $d=2$ se obtiene el digrafo de la figura 4.1.1, en la cual se ha dibujado dos veces cada vértice para poner de manifiesto la ley de formación. Este mismo digrafo se muestra, en forma convencional, en la figura 4.1.2.

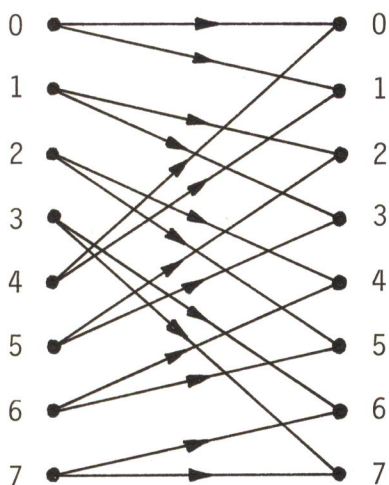


Fig. 4.1.1

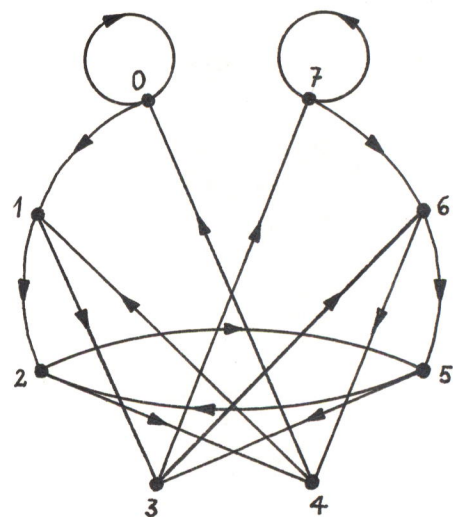


Fig. 4.1.2