

Finalmente, en [AYF1] se propone una generalización del algoritmo anterior que, para múltiples valores de N , permite obtener digrafos con diámetro igual a la cota mínima (1.15). Por ejemplo, en dicho artículo se muestran grafos d -diregulares con conjunto de vértices idéntico a (4.1), $N = (d+1)d^s$, $s \geq 1$, y conjunto de arcos

$$A = \{ [x,y] \mid y = f_i(x) = -dx + i \pmod{N}, i=1,2,\dots,d \} \quad (4.3)$$

lo que, se demuestra, da lugar a un diámetro $k = s+1$.

Más adelante veremos que estos mismos grafos pueden obtenerse también aplicando el método que estudiamos a continuación.

4.2 EL METODO DE DESDOBLAMIENTO

En esta sección comprobaremos que, a partir de digrafos elementales con muy pocos vértices y, por tanto, con pequeño diámetro, es posible obtener digrafos con diámetro igual al mínimo. El método usado para ello, que nosotros llamamos de *desdoblamiento*, construye cada grafo a partir del anterior multiplicando por d el número de vértices. Dicho método, que en la sección 4.3 generalizamos a cualquier tipo de grafos dirigidos, se basa en el siguiente resultado.

Teorema 4.2.1:

Sea $D = (V,A)$ un digrafo regular de grado $d > 1$ con N vértices, diámetro k y distancia media \bar{k} . Entonces existe un digrafo $D^* = (V^*,A^*)$ con dN vértices tal que:

$$k^* = k + 1 \quad (4.4)$$

$$\bar{k}^* < \bar{k} + 1 \quad (4.5)$$

donde k^* y \bar{k}^* denotan respectivamente el diámetro y la distancia media en D^* .

Demostración:

Denotemos con $1, 2, \dots, N$ los vértices de D . Construimos D^* en la forma siguiente: cada vértice $i \in V$ se transforma en un conjunto de vértices $C_i = \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ pertenecientes a D^* . Entonces, si i es adyacente hacia j en D , elegimos un vértice cualquiera de C_j que no haya sido elegido antes, p.e. j_h , $1 \leq h \leq d$, y establecemos los d arcos $[i_1, j_h], [i_2, j_h], \dots, [i_d, j_h]$ que unen todos los vértices de C_i hacia j_h . Ver figura 4.2.1.

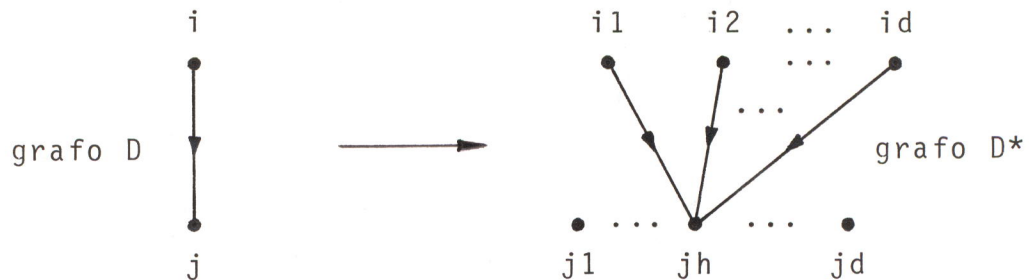


Fig. 4.2.1

Procedemos así con todos los arcos de A hasta completar D^* . Es fácil ver que el digrafo D^* así construido es regular de grado d . Antes de demostrar que su diámetro es $k+1$ veamos, además, que D^* es único, es decir que el digrafo obtenido no depende de las elecciones de h que se hagan en cada paso. En efecto, en la figura 4.2.2 puede apreciarse como, en realidad, todos los vértices de un determinado conjunto C_j son indistinguibles en cuanto a la estructura de D^* . En particular vemos como, en la construcción de D^* , elegir j_h y $j_{h'}$ en orden inverso al tomado antes equivale a intercambiar la posición de estos nudos en la figura lo que, evidentemente, no produce un grafo esencialmente distinto a D^* .

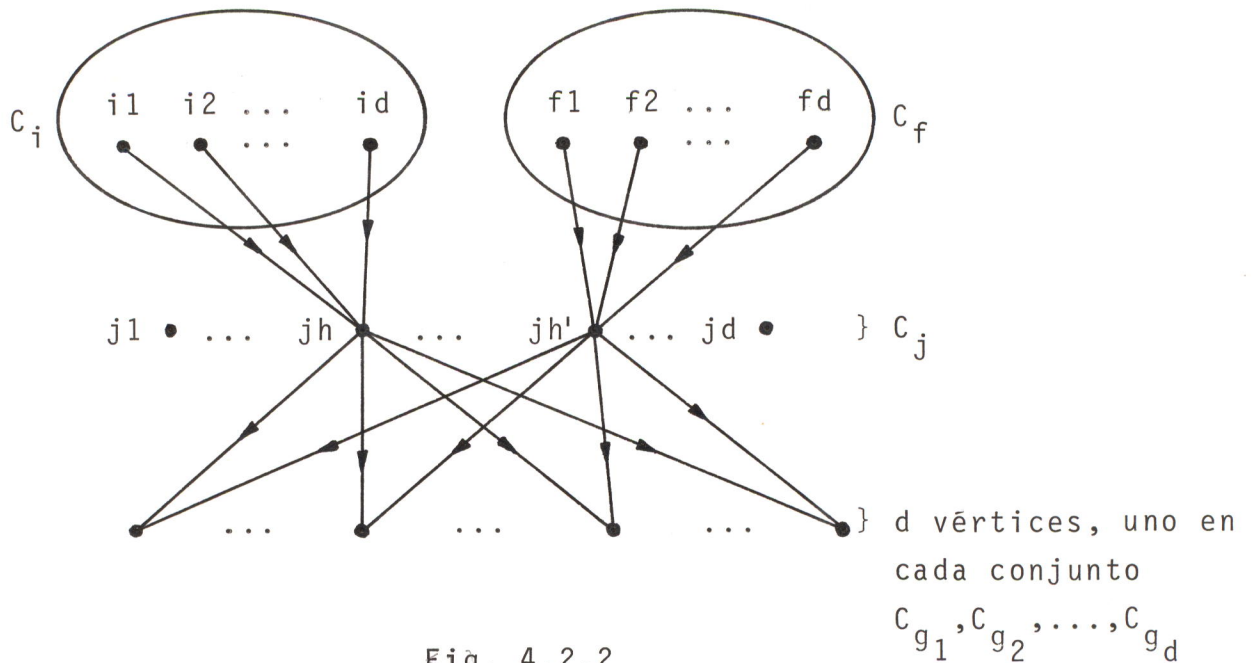


Fig. 4.2.2

En dicha figura se supone que, en D , j es adyacente hacia los d vértices g_1, g_2, \dots, g_d .

En cuanto al diámetro de D^* , sean $u_i \in C_i$ y $u_k \in C_k$ dos vértices distintos cualesquiera de V^* . Tal como ha sido construido D^* , existe un cierto conjunto $C_j \subset V^*$ tal que todos sus vértices son adyacentes hacia u_k . Por otra parte, se puede ir (de cualquier vértice) del conjunto C_i a (algún vértice de) cualquier conjunto C_j en el mismo número de pasos que se va de i a j en D . Esto es:

$$\forall u_i \in C_i, \exists u_j \in C_j \mid d_{D^*}(u_i, u_j) = d_D(i, j) \quad (4.6)$$

Entonces nos queda

$$d_{D^*}(u_i, u_k) = d_{D^*}(u_i, u_j) + 1 = d_D(i, j) + 1 \quad (4.7)$$

ya que sólo puede llegarse a u_k a través de (algún vértice de) C_j . Ello implica que $k^* = \max\{d_{D^*}\} \leq \max\{d_D\} + 1 = k + 1$.

Veamos ahora que podemos elegir u_i y u_k de manera que $d(u_i, u_k) = k + 1$. En efecto, nos basta tomar en (4.6) y (4.7) i y j de manera que $d(i, j) = k$, y de los d vértices adyacentes desde u_j

(distintos entre sí por la forma de construir D^*) elegir uno, u_k , distinto de u_j (recordar que $d > 1$).

Para demostrar (4.5), recordemos que, según (4.6), para cada par de vértices $i, j \in V$, $d(i, j) = 1$, existe $u_j \in C_j$ tal que $d(u_i, u_j) = 1$, siendo u_i cualquiera de los d vértices de C_i . Por otra parte, u_j es adyacente hacia un máximo de d vértices distintos de u_i . Por todo ello, una distancia 1 en D implica la existencia de un máximo de d^2 distancias $1+1$ en D^* , lo que nos permite escribir:

$$\bar{k}^* = \frac{1}{(dN)^2} \sum_{u, v \in V^*} d(u, v) < \frac{1}{(dN)^2} \left[d^2 \sum_{i, j \in V} \{d(i, j) + 1\} \right] = \bar{k} + 1 \quad (4.8)$$

En realidad, como veremos a continuación, es posible dar una fórmula exacta para \bar{k}^* . Si aquí hemos dado con prioridad la cota (4.5), deducible directamente de dicha fórmula, es por razón de su simplicidad.

Para obtener esta expresión exacta, al hacer el cómputo de todas las distancias en D^* tal como en (4.8), debemos considerar que, en general, alguno de los d vértices adyacentes desde u_j puede coincidir con algún $u_i \in C_i$. Esto ocurrirá si y sólo si alguno de los d vértices adyacentes desde j en D coincide con i , es decir si existe el arco $[j, i] \in A(D)$. Por tanto, en este caso, del posible máximo de d^2 distancias $1+1$ en D^* (implicadas por los vértices $i, j \in V(D)$, $d(i, j) = 1$) debemos descontar una. En el cómputo de todas las distancias efectuamos dicha resta tantas veces como pares de vértices adyacentes (arcos) existan en D . Entonces nos queda:

$$\bar{k}^* = \frac{1}{(dN)^2} \left[d^2 \sum_{i, j \in V} [d(i, j) + 1] - \sum_{[r, s] \in A} [d(r, s) + 1] \right] \quad (4.9)$$

Ahora, de (4.9), es inmediato obtener (4.8) o, si se conoce la longitud del ciclo mínimo en D , dar cotas mejores para \bar{k}^* .

Aplicando iterativamente el teorema 4.2.1 a partir del digrafo completo K^p (grafo con p vértices, regular de grado $p-1$, diámetro 1 y distancia media $(2/p^2)\binom{p}{2}$) se obtiene la familia de digrafos a la que nos hemos referido en el apartado 4.1.1, y cuyos miembros denotamos por $D_1^{p-1} = K^p$, $D_2^{p-1}, \dots, D_k^{p-1}, \dots$, donde D_k^{p-1} , construido al aplicar $k-1$ veces el teorema 3.1, tiene $N = p(p-1)^{k-1}$ vértices y diámetro k .

Notar que, según (4.14), el número máximo de vértices de un digrafo regular de grado $p-1$ y diámetro $k-1$ es:

$$N_{\max}^{(k-1)} = \frac{(p-1)^{k-1}}{p-2} < p(p-1)^{k-1}, \quad \forall p > 2, k \geq 1 \quad (4.10)$$

Por tanto, el diámetro obtenido para D_k^{p-1} es el mejor posible para su número de vértices.

En la figura 4.2.3 se muestran los tres primeros grafos obtenidos partiendo de K^3 ($d=2$). Para esta misma familia, y hasta D_8^2 ($N=384$), en la tabla 4.2.1 se da la distancia media, obtenida mediante ordenador a partir de la matriz de adyacencia. Comparar, sobre todo para $k > 4$, el valor de este parámetro con la cota (4.5)

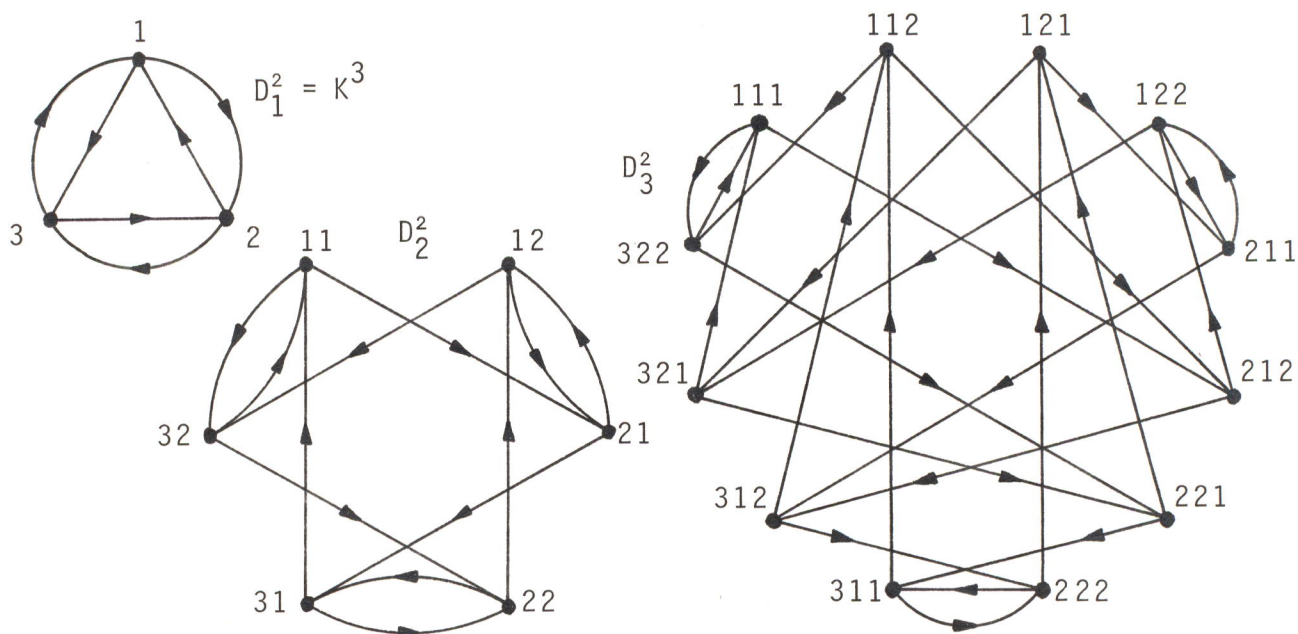


Fig. 4.2.3

Digrafo	N	k	\bar{k}
D_1^2	3	1	0.66667
D_2^2	6	2	1.33333
D_3^2	12	3	2.12500
D_4^2	24	4	2.98958
D_5^2	48	5	3.90365
D_6^2	96	6	4.85156
D_7^2	192	7	5.82047
D_8^2	384	8	6.80253

Tabla 4.2.1

Si el número de vértices es de la forma $N = d^m$, el método considerado permite también obtener los digrafos presentados en [III]. Basta con aplicar reiteradamente el teorema 4.2.1 partiendo ahora del grafo dirigido formado por un sólo vértice y d autolazos. Por ejemplo, si $d=2$, los cuatro primeros digrafos de la familia: $G_1^2, G_2^2, \dots, G_m^2, \dots$ son los mostrados en la figura 4.2.4. Nótese el isomorfismo existente entre G_4^2 y el grafo de la figura 4.1.2.

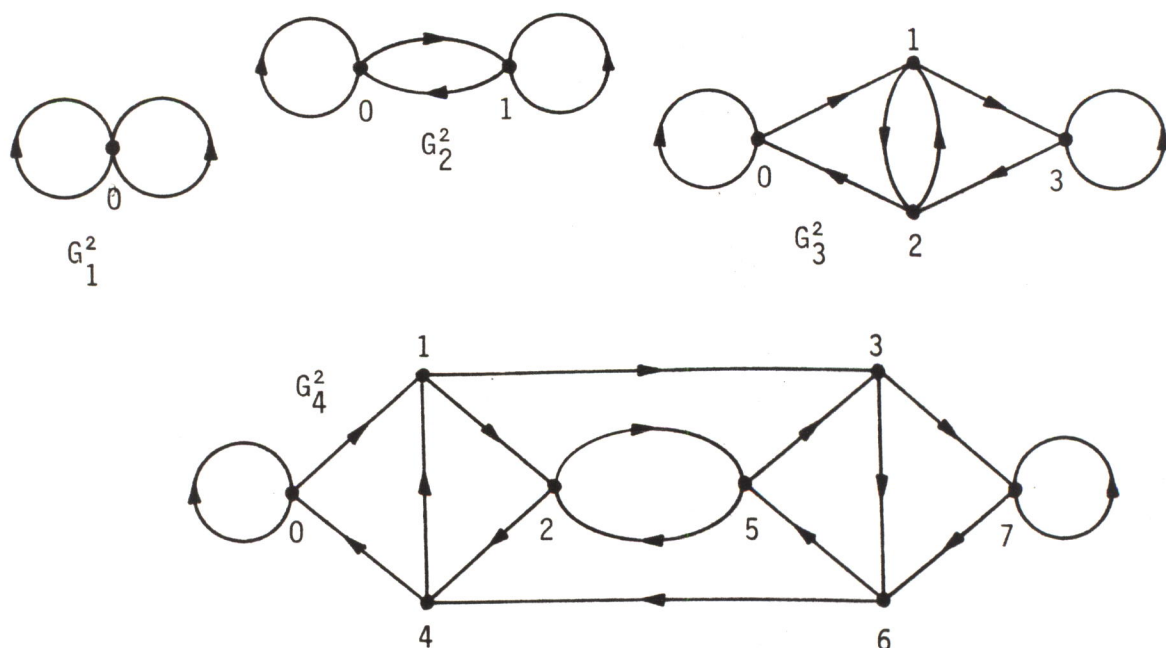


Fig. 4.2.4

4.3 GRAFOS LINEA

En el *digrafo línea*, $L(D)$, de un digrafo $D = (V, A)$ no vacío ($A \neq \emptyset$), cada vértice representa un arco de D , o sea: $V(L(D)) = \{\overline{uv} \mid [u, v] \in A(D)\}$ y \overline{uv} es adyacente hacia \overline{wz} en $L(D)$ si $v = w$ (el arco uv es adyacente hacia wz en D). Así, el número de vértices de $L(D)$ es:

$$N_L = |V(L(D))| = |A(D)| = \sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) \quad (4.11)$$

Evidentemente, $L(D)$ tiene un n -*ciclo* (n vértices distintos) si y sólo si D tiene un n -*circuito* (n arcos distintos). Debido a ello, y a que el digrafo línea de un camino de longitud l es un camino de longitud $l-1$, resulta que la secuencia de digrafos línea construidos iterativamente: $L(D)$, $L^2(D) = L(L(D))$, $L^3(D) = L(L^2(D))$, ... es infinita si y sólo si D contiene al menos un ciclo $|R1|$. Esto se cumple en todos los casos que nosotros consideramos (D fueretemente conexo).

Si $D = (V, A)$ es d -diregular, tiene $|V|$ vértices y $|A| = d|V|$ arcos. Por tanto, $L(D)$ tiene $d|V|$ vértices y $d^2|V|$ arcos, igual que el digrafo D^* obtenido según el método de la sección anterior. En realidad, ambos grafos son isomorfos, $D^* = L(D)$. Esto es inmediato si consideramos la correspondencia existente entre los vértices del conjunto $C_i = \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ en D^* y los del conjunto $D_i = \{\overline{j_1 i}, \overline{j_2 i}, \dots, \overline{j_d i}\}$ en $L(D)$ donde $j_h i \in A(D) \forall h = 1, 2, \dots, d$.

Lo anterior nos permite dar una versión más general del teorema 4.2.1. Enunciamos este resultado considerando sólo la condición sobre el diámetro del grafo obtenido y posteriormente discutiremos que pasa con la distancia media.

Teorema 4.3.1:

Sea $D = (V, A)$ un digrafo (no necesariamente regular) distinto de un ciclo y con diámetro k . Entonces, si k_L denota el diámetro de $L(D)$, se cumple:

$$k_L = k + 1 \quad (4.12)$$

(Si D fuese un ciclo, $L(D) = D$ y, por tanto, $k_L = k$).

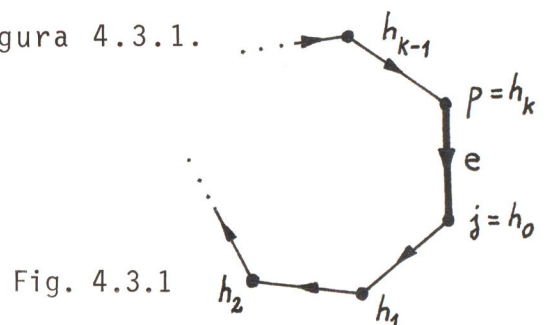
Demostración:

La primera parte de la demostración es análoga a la dada para el teorema 4.2.1 (recordar que $L(D) = D^*$). En efecto, ir del vértice $u = \overline{ij}$ al vértice $v = \overline{pq}$, $v \neq u$, en $L(D)$ equivale a ir del arco $[i, j]$ al arco $[p, q]$ en D ; pero el camino de longitud mínima cuyos arcos terminales son los anteriores contiene el camino mínimo entre los vértices j y p , de manera que la distancia entre u y v será $d_{L(D)}(u, v) = d_D(j, p) + 1$. Esto supone que $k_L = k + 1$ si al menos existen dos arcos *distintos*, $[i, j], [p, q] \in A(D)$ tales que $d(j, p) = k$, pero es fácil comprobar que esto es cierto si y sólo si existen dos vértices $j, p \in V(D)$ a distancia k tales que:

$$(a) \quad i \neq p \quad \text{y} \quad j \neq q \quad \text{con} \quad [i, j], [p, q] \in A(D) \quad (4.13a)$$

$$\text{o (b) } d^-(j) > 1 \quad \text{ó} \quad d^+(p) > 1. \quad (4.13b)$$

Veamos ahora que, si D no contiene tal par de vértices, entonces necesariamente es un ciclo. En efecto, escojamos como antes los vértices j, p de manera que $d(j, p) = k$ y supongamos que no se cumple ninguna de las condiciones (a) o (b). Esto implica $d^-(j) = d^+(p) = 1$ y sólo existe un arco e desde p hacia j , de forma que D contiene un ciclo C de longitud $k + 1$ formado por los vértices $h_0 = j, h_1, h_2, \dots, h_{k-1}, h_k = p$. Ver figura 4.3.1.



Ahora $D = C$ o, por ser D fuertemente conexo, existen al menos dos vértices $h_r \neq p$ y $h_s \neq j$ (no necesariamente distintos) tales que $d^+(h_r) > 1$ y $d^-(h_s) > 1$.

Sea t , $0 < t \leq k$, el menor número tal que $d^-(h_t) > 1$. Entonces se cumple:

$$d(h_t, h_{t-1}) = d(h_t, p) + d(p, h_{t-1}) = (k-t) + t = k \quad (4.14)$$

ya que, según hemos elegido h_t , para ir a h_{t-1} necesariamente debemos recorrer el camino $ph_0h_1 \dots h_{t-1}$ y, por otra parte, no puede ser $d(h_t, p) < k-t$ ya que entonces sería $d(j, p) \leq d(j, h_t) + d(h_t, p) < t + k - t = k$.

En resumen, $d^-(h_t) > 1$ y $d(h_t, h_{t-1}) = k$ en contradicción con la hipótesis inicial de que no existe tal par de vértices.

En cuanto a la expresión que da la distancia media del digrafo obtenido, se halla siguiendo un razonamiento análogo al usado en la sección 4.2, sólo que en términos de $L(D)$. Así, considerando ahora que cada distancia de valor $l = d(i, j)$ en D da lugar a $d^-(i)d^+(j)$ ó $d^-(i)d^+(j)-1$ distancias $l+1$ en $L(D)$, podemos escribir:

$$\bar{k}_L = \frac{1}{N_L^2} \left[\sum_{i, j \in V(D)} d^-(i)d^+(j)\{d(i, j)+1\} - \sum_{[r, s] \in A(D)} \{d(s, r)+1\} \right] \quad (4.15)$$

pero

$$N_L^2 = \left[\sum_{i \in V(D)} d^-(i) \right] \left[\sum_{j \in V(D)} d^+(j) \right] = \sum_{i, j \in V(D)} d^-(i)d^+(j) \quad (4.16)$$

y nos queda

$$\bar{k}_L = \frac{\sum_{i, j \in V} \beta(i, j)d(i, j)}{\sum_{i, j \in V} \beta(i, j)} + 1 - \delta \quad (4.17)$$

donde $\beta(i, j) = d^-(i)d^+(j)$ y $\delta = \frac{1}{N_L^2} \sum_{[r, s] \in A} \{d(s, r)+1\}$

expresión de la cual no es posible, en general, obtener una cota como (4.5) pues el primer sumando en (4.17) puede ser mayor que \bar{k} .

Según lo dicho anteriormente, cualquier ciclo de longitud n (n -ciclo) en D implica la existencia de un n -ciclo en $L(D)$. En particular, cualquier "dígono" (2-ciclo) contenido en D "reaparece" en $L(D)$. Este hecho resulta interesante a la hora de obtener grafos 2-diregulares con pequeño diámetro y arbitrario número de vértices. Ello se debe a que un dígono formado entre los dos vértices u y v puede "condensarse", tal como se muestra en la figura 4.3.2, en un sólo vértice w , obteniéndose así un grafo 2-diregular con igual o menor diámetro que el inicial y un vértice menos.

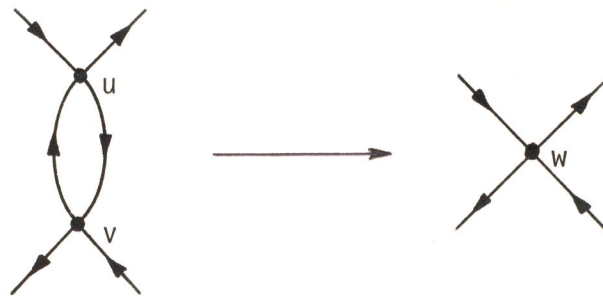


Fig. 4.3.2

Por ejemplo, a partir del digrafo D_3^2 con $N = 3 \cdot 2^3 = 24$ vértices y diámetro 3, es fácil obtener digrafos del mismo diámetro y número de vértices 23, 22 y 21.

CAPÍTULO V

REDUCCION DE CONEXIONES EN SISTEMAS MULTIBUS

5.1 INTRODUCCION

5.1.1 Un problema de minimización

Un sistema multiprocesador con memoria compartida y red de interconexión tipo multibus consta de p procesadores, n buses y m módulos de memoria con $p \geq n$, $m \geq n$. Los procesadores acceden a las memorias a través de los buses por lo que debemos establecer conexiones procesadores-buses y buses-memorias. En un momento dado, se producen $m' \leq m$ peticiones por parte de los procesadores para acceder a memorias distintas. Por tanto, y ya que cada conexión procesador-memoria necesita de un bus, si $m' \leq n$ se asignarán m' memorias y si $m' > n$ sólo podrán asignarse n memorias.

La primera red de conexión propuesta [AG1] fué unir todos los módulos de memoria y todos los procesadores a todos los buses, lo que supone un total de $n(m+p)$ conexiones. Ya que el coste de dicha red es tanto más elevado cuanto mayor es el número de buses, en [LV1] y [LVF1] se estudió hasta que punto esta interconexión es redundante, es decir, *cual es el número máximo de conexiones que pueden suprimirse sin que el sistema degrade*. Por esto último se entiende que, en todo caso, $p' \leq n$ procesadores cualesquiera puedan acceder a p' memorias cualesquiera.

En este capítulo tratamos en profundidad dicho problema, así como otros relacionados con él, planteándolo en términos de teoría de grafos. Esto posibilita el resolverlo mediante una ligera modificación del célebre "teorema de Hall" (teorema 5.1.1) que demostraremos con un método constructivo.

5.1.2 Fundamentos teóricos: el teorema de Hall

Un grafo *bipartito* o *bigrafo*, $G(X,E)$, es aquél cuyo conjunto de vértices está formado por dos conjuntos disjuntos, $X=U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, y cada línea de $E(G)$ une un vértice de U con un vértice de V . Un grafo *n-partito* se define análogamente con $X = \bigcup_n V_i$, $\bigcap_n V_i = \emptyset$. Debido al hecho de que en un grafo bipartito, $G(X,E) = G(U,V,E)$, un conjunto de líneas independientes aparea vértices de U con vértices de V , a dicho conjunto se le llama "*aparejamiento*" ("matching"). Supuesto $|U| \leq |V|$, un *aparejamiento completo de U a V* o conjunto completo de líneas independientes, es aquél que contiene $|U|$ líneas (o sea, todos los vértices de U). Si $|U| = |V|$, este concepto coincide con el de 1-factor citado en la sección 1.2.

Daremos ahora un importante resultado que caracteriza a los grafos bipartitos que contienen un aparejamiento completo. Se le conoce con el nombre de "teorema de Hall" y tiene aplicaciones en otras ramas de la matemática como en álgebra y análisis. Tal como se cita en [B3, p.54] "P.Hall lo demostró en 1935, y König y Egerváry probaron en 1931 un resultado equivalente, pero ambas versiones se siguen de forma inmediata del teorema de Menger, demostrado en 1927". (Terminología en pág. 6).

Teorema 5.1.1 (teor. de Hall):

Un grafo bipartito $G(X,E)$, $X = U \cup V$, contiene un aparejamiento completo desde U a V si y sólo si para todo $U' \subset U$ se cumple:

$$d(U') \geq |U'| \quad (5.1)$$

Demostración:

Existen múltiples demostraciones de este teorema (ver p. e. [B2], [B3] y [H1]). La demostración que damos aquí es debida a Rado, aunque nuestra versión es ligeramente distinta de las ofrecidas en [B1] y [H1]:

Que la condición es necesaria es evidente, estudiemos pues la suficiencia. Si G cumple (5.1) y para cualesquiera $u_i, u_j \in U$, $i \neq j$, $\Gamma(u_i) \cap \Gamma(u_j) = \emptyset$, es inmediato que G contiene un apareamiento completo. De lo contrario, existen al menos dos líneas de la forma $u_i v$ y $u_j v$ con $v \in V$. Demostraremos que podemos suprimir una de estas dos líneas de manera que el grafo resultante siga cumpliendo (5.1).

En efecto, de no ser así existirían dos subconjuntos $U_1, U_2 \subset U$ con $u_i \in U_1$ y $u_j \in U_2$ tales que $|\Gamma(U_1)| = |U_1|$ y $|\Gamma(U_2)| = |U_2|$, y donde u_i [u_j] sería el único vértice de U_1 [U_2] adyacente a v . Ver figura 5.1.1. Entonces tendríamos que el número de vértices adyacentes al mismo tiempo a U_1 y U_2 cumpliría la desigualdad:

$$\begin{aligned} |\Gamma(U_1) \cap \Gamma(U_2)| &\geq |\Gamma(U_1 - \{u_i\}) \cap \Gamma(U_2 - \{u_j\})| + 1 \\ &\geq |\Gamma(U_1 \cap U_2)| + 1 \geq |U_1 \cap U_2| + 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por otra parte, tendríamos:

$$\begin{aligned} |\Gamma(U_1 \cup U_2)| &= |\Gamma(U_1) \cup \Gamma(U_2)| = |\Gamma(U_1)| + |\Gamma(U_2)| - |\Gamma(U_1) \cap \Gamma(U_2)| \leq \\ &\leq |U_1| + |U_2| - |U_1 \cap U_2| - 1 = |U_1 \cup U_2| - 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

En contradicción con que, según (5.1), debería cumplirse:

$$|\Gamma(U_1 \cup U_2)| \geq |U_1 \cup U_2| = |U_1| + |U_2| - |U_1 \cap U_2| \quad (5.4)$$

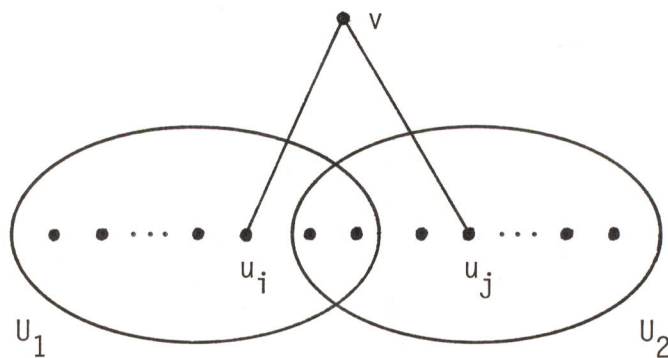


Fig. 5.1.1

Por tanto, procediendo inductivamente, todo vértice $v \in V$ tal que $d(v) \geq 2$ puede convertirse en un vértice de grado 1 sin que el grafo resultante deje de cumplir (5.1) lo que, junto con lo dicho al principio de la demostración, la completa.

5.2 EL PROBLEMA EQUIVALENTE EN TEORIA DE GRAFOS

5.2.1 Nomenclatura y planteamiento formal del problema

En términos de teoría de grafos, un sistema multiprocesador con red de interconexión multibus puede modelarse mediante un grafo tripartito, $G = G(X, E)$, con conjunto de vértices X , formado por los tres conjuntos disjuntos U, V, W que representan las memorias, buses y procesadores respectivamente, y conjunto de líneas E que representan las conexiones.

Como sabemos, los elementos de E pertenecen al conjunto $U \times V$ (conexiones entre memorias y buses) o a $V \times W$ (conexiones entre buses y procesadores). Entonces, los grafos inducidos $G[U, V]$ y $G[V, W]$, que también denotaremos por $G[U, V]$ y $G[V, W]$ son grafos bipartitos, mientras que $G[U, W] = G[U, W]$ es vacío en el sentido mencionado de que no tiene líneas.

Si $G[U, V] = K_{m, n}$ (bigrafo completo de $m \times n$ vértices) y $G[V, W] = K_{n, p}$, con $m = |U|$, $n = |V|$, $p = |W|$, diremos que G es *completo*, denotándolo por $G_{m, n, p}$ (seguimos suponiendo que $m \geq n$ y $p \geq n$). Este es el caso en que todas las memorias y todos los procesadores están conectados a todos los buses y, como ya hemos apuntado, entonces el tamaño de G es $e(G) = n(m+p)$.

En la figura 5.2.1 mostramos el grafo $G_{4, 2, 4}$. En ella se aprecia como los vértices $j \in V$ (buses) pueden considerarse como ele-