



Universitat de Girona

PROCESSOS CONVECTIUS EN UN SISTEMA AQUÀTIC NATURAL: L'ESTANY DE BANYOLES

Xavier SÁNCHEZ MARTÍN

ISBN: 978-84-691-5740-4
Dipòsit legal: GI-I024-2008

**PROCESSOS CONVECTIUS
EN UN
SISTEMA AQUÀTIC NATURAL.**

L'estany de Banyoles.

Xavier Sanchez Martin

Tesi doctoral dirigida per la Dra. Elena Roget i Armengol

**Departament de Física
Universitat de Girona**

**Departament de Física
Universitat de Girona**

**PROCESSOS CONVECTIUS
EN UN
SISTEMA AQUÀTIC NATURAL.
L'estany de Banyoles.**

Memòria presentada per optar al grau de doctor.

**Aquest treball s'ha realitzat en el marc del Programa de Doctorat de
Medi Ambient dins l'itinerari de Física Ambiental a la Universitat de
Girona.**

**Treball realitzat per Xavier Sanchez Martin,
sota la direcció de la Dra. Elena Roget i Armengol.**

Doctorant

Directora

Xavier Sanchez Martin

Elena Roget i Armengol

Girona, 14 de Març del 2008

A la Mariona

“L’aspecte més trist de la vida actual és que la ciència guanya en coneixement més ràpidament que la societat en saviesa”

Isaac Asimov.

AGRAÏMENTS:

A la Nin, que sempre m'ha recolzat en els molts moments durs que té el camí de la recerca. A la Mariona, que ha estat una part important de la meva motivació. Crec que tots els que som pares hem pensat o desitjat en algun moment que la nostra feina pogués revertir en aconseguir un món futur millor que l'actual. A la Elena, la meva directora de tesi, per confiar sempre en mi, per la seva dedicació i entusiasme, per la seva paciència, i per tantes altres coses que li he d'agrair i no sé pas com. A en Miguel, el meu pare, de qui he heretat o millor dit m'ha difós el tarannà científic. A la Maria Luisa, la meva mare, que m'ha ensenyat a ser autoexigent. A la meva "sister" que, a la infantesa, em va adreçar cap a la ciència. A la resta de companys i col·laboradors del departament de Física, a en Jesús, la Marianna, la Lluïsa, en Manuel, i tots els altres. I com no, no oblidó el recolzament incondicional que sempre he rebut de les amistats gironines, amb especial menció d'en Pep, la Eli, en Michael, la Laura, la Rouse i en Pepone.

Girona

Març del 2008

ÍNDIX

INTRODUCCIÓ	10
CAPÍTOL 1. TURBULÈNCIA.	16
1.1. INTRODUCCIÓ	16
1.2. EQUACIONS DETERMINISTES DEL FLUID	20
1.3. APROXIMACIÓ ESTADÍSTICA A LES EQUACIONS DELS FLUXOS TURBULENTS	22
1.4. TURBULÈNCIA HOMOGÈNIA I ESPECTRES TRIDIMENSIONALS	28
1.5. EVOLUCIÓ TEMPORAL DELS ESPECTRES TRIDIMENSIONALS EN CONDICIONS D'HOMOGENEÏTAT	31
1.6. EL RANG D'EQUILIBRI UNIVERSAL	34
1.6.1. ESPECTRE TRIDIMENSIONAL DE L'ENERGIA	36
1.6.2. ESPECTRE TRIDIMENSIONAL DE L'ESCALAR	38
1.7. TURBULÈNCIA ISÒTROPA. ESPECTRES UNIDIMENSIONALS	41
1.8. ESPECTRE DEL CISALLAMENT I DEL GRADIENT DE L'ESCALAR	46
1.9. BIBLIOGRAFIA	48
CAPÍTOL 2. CONVECCIÓ.	50
2.1. INTRODUCCIÓ	50
2.2. EQUACIONS GENERALS PER A L'ESTUDI DE LA CONVECCIÓ ENTRE DUES CAPES	54
2.3. ESTUDI DE L'ESTABILITAT LINEAL. TIPUS D'INESTABILITATS	58
2.4. CONVECCIÓ DE RAYLEIGH-BÉNARD (RB)	65
2.5. MODELS DE FLUX TÈRMIC PER CONVECCIÓ DE RB TURBULENTA	69
2.6. DOBLE DIFUSIÓ EN RÈGIM DIFUSIU (DDR)D	73
2.7. MODELS DE FLUX TÈRMIC PER CONVECCIÓ DDRD	77
2.8. BIBLIOGRAFIA	83
CAPÍTOL 3. DADES DE MICROESTRUCTURA.	88
3.1. INTRODUCCIÓ	88
3.2. DESCRIPCIÓ DE L'INSTRUMENTAL	89
3.2.1. SENSOR DE CISALLAMENT DE MICROESTRUCTURA	91
3.2.2. SENSOR DE TEMPERATURA DE RESPOSTA RÀPIDA	93
3.2.3. ALTRES MESURES DE VARIABLES TURBULENTES	94
3.2.4. MESURES DE PETITA ESCALA DE LA TERBOLESA	95
3.3. OBTENCIÓ DE L'ESPECTRE UNIDIMENSIONAL A PARTIR DE LES MESURES. ESPECTRES UNIVERSALS	97
3.3.1. L'ESPECTRE DEL CISALLAMENT	98
3.3.2. L'ESPECTRE UNIDIMENSIONAL D'UN CAMP ESCALAR	102
3.4. AJUST DE L'ESPECTRE EXPERIMENTAL A UN MODEL TEÒRIC: ESTIMACIÓ DE LA MÀXIMA VERSEMBLANÇA (EMV)	104
3.5. ESCALES ESPACIALS I ESTRUCTURA DE LA TURBULÈNCIA	109
3.5.1. L'ESCALA DE THORPE	110
3.5.2. ANÀLISI MULTIESCALAR AMB ONDETES	112
3.6. BIBLIOGRAFIA	115

<u>CAPÍTOL 4. DINÀMICA CONVECTIVA I FLUX DE CALOR AL FONDS DE L'ESTANY DE BANYOLES.</u>	120
4.1. INTRODUCCIÓ	121
4.2. DINÀMICA DE PLOMALLS CONVECTIUS A LA SURGÈNCIA BI	123
4.2.1. FLUX TÈRMIC A LA LUTOCLINA	125
4.2.2. EL PLOMALL TÈRMIC	131
4.3. DINÀMICA TRIPLE DIFUSIVA SOBRE UN LLIT FLUÏDITZAT CALENT	136
4.3.1. EL PERFIL DE LA DENSITAT	140
4.3.2. LES INTERFÍCIES DIFUSIVES DE LA TEMPERATURA	142
4.3.2.1. El nombre de Rayleigh tèrmic a les interfícies	142
4.3.2.2. Fluxos tèrmics	145
4.3.3. LES CAPES CONVECTIVES	146
4.3.3.1. Les escales turbulentes	146
4.3.3.2. Els fluxos turbulents	150
4.3.3.3. Velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta	152
4.3.4. VALIDACIÓ DELS MODELS DEL FLUX TÈRMIC	153
4.4. BIBLIOGRAFIA	159
<u>RECOPILCIÓ I POSSIBLES LÍNIES DE FUTUR</u>	164
RESUM	164
RESULTATS	173
POSSIBLES LÍNIES DE FUTUR	175
<u>APÈNDIX A. PROPIETATS D'UNA SUSPENSIO DE PARTÍCULES.</u>	178
A.1. PROPIETATS DE LA SUSPENSIO CONSIDERADA EN AQUEST TREBALL	179
A.2. EQUACIO DE TRANSPORT DE LES PARTÍCULES	181
A.3. LLITS FLUÏDITZATS	183
A.4. BIBLIOGRAFIA	184
<u>APÈNDIX B. TURBULÈNCIA HOMOGÈNIA.</u>	186
B.1. PROPIETATS GENERALS DE L'HOMOGENEÏTAT ESTADÍSTICA	186
B.2. EVOLUCIO TEMPORAL DE L'ESPECTRE DE L'ESCALAR	190
B.3. EVOLUCIO TEMPORAL DE L'ESPECTRE DE L'ENERGIA	194
B.4. ISOTROPIA. ESPECTRES UNIDIMENSIONALS	195
B.5. BIBLIOGRAFIA	198
<u>APÈNDIX C. SISTEMA DINÀMIC DE LORENZ.</u>	200
C.1. SISTEMA DINÀMIC DE LORENZ	200
C.3. BIBLIOGRAFIA	205

INTRODUCCIÓ

En aquesta tesi s'aborda l'estudi de la turbulència convectiva, a partir d'un treball experimental realitzat a l'estany de Banyoles. Més concretament, els objectius s'emmarquen en dues categories diferents. En la primera, es pretén sistematitzar el marc teòric-conceptual de la turbulència i més concretament de la turbulència convectiva, el qual es troba molt dispers a la bibliografia i sovint enfocat des de perspectives prou diverses. Dins aquest primer objectiu també es pretén sistematitzar tot un conjunt d'eines experimentals de tractament de dades que ens permetran obtenir els valors de les velocitats de dissipació de l'energia cinètica turbulenta i de la variància de temperatura de forma automàtica y obtenir els fluxos turbulents. També volem abordar la caracterització del les escales turbulentes, pel que treballarem amb l'escala de Thorpe i utilitzarem l'anàlisi d'ondetes del senyal de microestructura tèrmica. Dins la segona categoria d'objectius, aquests aplicats directament a l'estany de Banyoles, es pretén aplicar els conceptes desenvolupats al primer objectiu en dos sistemes convectius, un de tipus plomall i l'altre del tipus multidifusiu. Dins aquest context, en els dos primers capítols es presenta teòricament com s'obtenen els fluxos turbulents i s'introdueixen els fenòmens convectius, i en el tercer i quart capítols es descriuen tot un conjunt d'eines d'anàlisi experimental que ens serviran per a l'estudi del cas concret de la convecció al fons de l'estany de Banyoles.

En el capítol 1 es recopila el marc conceptual actual en què entenem la turbulència en els fluids en general i per al cas estadísticament homogeni. Tot i la natura caòtica dels fluxos turbulents, la presumpció d'homogeneïtat ens permetrà disposar d'un conjunt d'eines estadístiques, com els espectres tridimensionals, i els unidimensionals, els quals en condicions d'isotropia local prenen formes universals. Així, es recopila i es desenvolupa el formalisme matemàtic al voltant dels espectres, tant el corresponent al camp de velocitats com el corresponent als diferents camps escalars que afecten la densitat —com la temperatura o les concentracions—. Per evitar una càrrega matemàtica excessiva per a una lectura àgil d'aquest treball, una part de les demostracions s'ha derivat cap a l'apèndix B, tot i que les demostracions corresponents a la variació temporal de l'espectre de l'escalar en condicions d'estratificació tèrmica i

Introducció

amb un perfil de la velocitat amb cisallament constant no es troben a la bibliografia sobre turbulència homogènia i, per tant, s'han desenvolupat totalment dins el context d'aquesta tesi. La resta de propietats sobre els espectres que apareixen al capítol 1 i l'apèndix B s'han recopilat de textos clàssics com els de Hinze o Batchelor, amb canvis en la notació i amb algunes de les demostracions desenvolupades d'una manera alternativa i pensem que més clara.

En el capítol 2 s'analitzen els fluxos convectius, caracteritzant-los a partir de l'estudi de l'estabilitat per a una capa de fluid immòbil. Aquest estudi considera el cas genèric en què la densitat depèn de diferents camps escalars, com la temperatura i diverses concentracions, els quals tenen una certa estratificació. En aquest sentit, l'apèndix A mostra la dependència que té la densitat respecte a la temperatura i les diferents concentracions, així com altres propietats mecàniques del sistema fluid trobat a Banyoles. El cas més senzill d'instabilitat convectiva, conegut per *convecció de Rayleigh-Bénard*, és aquell en què la convecció és deguda només a l'estratificació d'un camp (temperatura o alguna concentració), de manera que el perfil de la densitat creixi en altura. En aquest treball es repassen diferents models i lleis de transport tèrmic corresponents a la convecció de Rayleigh-Bénard. En aquestes lleis el flux de calor adimensional —anomenat *nombre de Nusselt*— és una funció del terme de forçament adimensional —anomenat *nombre de Rayleigh*— i de les propietats moleculars —considerades a través del nombre de Prandtl—.

Per no treure linealitat al text, a l'apèndix C es presenta una anàlisi bidimensional i simplificada de la convecció de Rayleigh-Bénard, aplicable al rang no turbulent —nombres de Rayleigh per sota de 10^5 —, que s'ha fet utilitzant el formalisme dels sistemes dinàmics que va ser introduït per primer cop per Lorenz, i per tant porta el seu nom. Tot i la simplicitat del model, la resolució numèrica d'aquest sistema d'equacions ens ha permès obtenir el nombre de Nusselt en funció del nombre de Rayleigh per al cas de l'aigua (nombre de Prandtl fixat), és a dir, la llei tèrmica del sistema. Per al cas de nombres de Rayleigh prou grans —per sobre de 10^5 —, el comportament és turbulent i encara no s'ha trobat cap model ni llei per al flux que es pugui corroborar experimentalment en totes les configuracions de nombres de Rayleigh i Prandtl. Dins

Introducció

d'aquest context, i ara sí dintre el text principal, s'han revisat diferents models convectius històrics fins a arribar al més recent —el de Grossmann—.

Seguidament, s'analitzen els fenòmens multidifusius que es desenvolupen a partir d'un tipus d'instabilitat predita en forma teòrica fa uns 50 anys, i que sorgeix quan els diferents camps escalars que afecten la densitat en forma contrària —temperatura i concentracions— tenen difusivitats prou diferents i l'estratificació de la densitat és lleugerament decreixent en altura —estàticament estable—. En aquest cas, el perfil de la densitat acaba evolucionant de manera que es formen escalons per la temperatura, concentracions, i per tant per la densitat. El cas més analitzat és l'anomenat *de doble difusió*, en el qual, a més de la temperatura, només hi ha un camp que afecti la densitat —p. e., la salinitat—. Aquest tipus de procés convectiu s'ha pogut mesurar comptades vegades en sistemes aquàtics naturals, però, tal com han comentat alguns autors, pot tenir una importància decisiva entenen els fluxos de calor i massa dins l'àmbit de l'oceanografia. El flux tèrmic de doble difusió ha de dependre dels forçaments, que en aquest cas són el nombre de Rayleigh tèrmic i la raó d'estabilitat de la densitat, i del nombre de Prandtl. En aquest treball revisem els models existents i les lleis per als fluxos que se'n deriven.

En el capítol 3 es presenten diferents eines —algunes de les quals es desenvolupen en aquest treball— que ens permetran obtenir informació dels fluxos turbulents a partir de mesures experimentals. En aquest context també es detallaran les propietats tècniques del perfilador utilitzat per a la part experimental d'aquest treball, el qual disposa de sensors de precisió amb què caracteritzarem l'escala gran —temperatura, pressió, conductivitat elèctrica i terbolesa—, i d'altres de microestructura —cisallament i temperatura— amb què caracteritzarem la turbulència. El perfilador travessa verticalment la regió del fluid que volem estudiar, i les sèries temporals mesurades pels diferents sensors són transformades en sèries espacials sota la hipòtesi de Taylor o del camp congelat. Les sèries espacials sorgides dels sensors de microestructura ens permeten obtenir experimentalment els espectres unidimensionals de la temperatura i del cisallament de forma local, per a una regió de l'espai que *a priori* hem assumit que té un comportament estadísticament homogeni.

Introducció

Dintre del mateix capítol es presentarà un mètode per trobar el millor ajustament dels espectres unidimensionals obtinguts a partir de les dades experimentals amb espectres teòrics, el qual dependrà del ritme de dissipació d'energia cinètica turbulenta, ε , i a més, en el cas dels espectres de camps escalars (com la temperatura o les concentracions), també dependrà del ritme de dissipació de variància, ε_θ . Concretament, es proposa ajustar els espectres experimentals als teòrics considerant sobre aquests últims un model de soroll i utilitzant el mètode estadístic de l'estimació de la màxima versemblança. Aquest ajust permetrà obtenir el valor de les dissipacions i així, a partir dels balanços energètics exposats al capítol 1, obtenir el nivell de turbulència i la barreja del sistema fluid.

Habitualment, els models físics que intenten descriure —si més no estadísticament— el comportament de les escales més petites dels camps turbulents no prediuen directament els espectres unidimensionals, sinó els espectres tridimensionals, dependents del mòdul del nombre d'ona tridimensional. Assumint un comportament isotròpic sobre els camps turbulents, almenys local o per a les escales més petites, és possible obtenir els espectres unidimensionals a partir dels tridimensionals. El model d'espectre tridimensional de la velocitat, o també anomenat *de l'energia*, que utilitzarem en aquest text és el de Panchev i Kesich, amb una gran acceptació actualment entre la comunitat científica, el qual és aplicable per a les escales més petites, això és, els rangs inercial i dissipatiu. Encara que l'espectre del cisallament corresponent a aquest espectre no té solució analítica (només numèrica), darrerament s'ha imposat sobre dependències amb origen empíric prou utilitzades en el passat —com per exemple l'espectre de Nasmyth—. En aquest text s'obindrà numèricament l'espectre del cisallament corresponent al model de Panchev i Kesich, i a més s'ajustarà una dependència analítica per utilitzar mètodes automàtics d'ajust d'espectres. Respecte a l'espectre tridimensional de la temperatura dins els rangs viscos difusiu i viscos convectiu, corresponents a les escales més petites que afecten el camp tèrmic turbulent, tradicionalment s'ha utilitzat el model de Batchelor, encara que aquests últims anys s'està començant a plantejar la possibilitat de fer servir el model de Kraichnan. Tots dos models accepten solucions analítiques per als espectres unidimensionals corresponents. Encara que en aquest text s'han ajustat els dos models d'espectre tèrmic, les dades de dissipació obtingudes al capítol 4 s'han extret de l'ajust del model de Batchelor, utilitzat encara majoritàriament per la comunitat

Introducció

limnològica i oceanogràfica. Tot i que el mètode automàtic d'ajust d'espectre amb l'estimació de la màxima versemblança és aplicable tant per al cisallament com per a la temperatura, en aquest text només es desenvoluparà per al segon cas.

També dins el capítol 3 s'han introduït dues eines més per analitzar les escales de la turbulència, els desplaçaments de Thorpe i l'anàlisi espectral per ondetes. Els desplaçaments de Thorpe consisteixen a determinar els moviments verticals de les partícules de fluid per obtenir un perfil monotonicat o ordenat a partir del perfil mesurat d'un camp escalar determinat. A partir d'aquests desplaçaments es pot obtenir l'escala de Thorpe, la qual es considera com la característica del continu de remolins que conformen el camp turbulent. Finalment es presenta l'espectre d'ondetes, com una alternativa a l'espectre clàssic de Fourier.

Al llarg del capítol 4 es recopilaran tot un seguit d'estudis experimentals efectuats sobre les surgències de l'estany de Banyoles, i s'utilitzaran els conceptes i les eines presentats en els capítols anteriors per interpretar aquests resultats. En la primera part d'aquest capítol, i utilitzant dades de microestructura tèrmica, s'analitzen les propietats del plomall desenvolupat sobre un llit fluiditzat calent format al fons de l'estany de Banyoles, en concret en una de les cubetes còniques per on entra l'aigua que omple el llac. Per fer aquest tractament s'utilitzen dades corresponents a diferents campanyes que s'han dut a terme durant diversos anys. En la segona part del capítol s'analitzen unes estructures de tipus escalons amb origen multidifusiu que es van mesurar durant una de les campanyes efectuades. En aquestes estructures s'ha mesurat el flux tèrmic per mitjà de dos procediments diferents, i s'han contrastat aquests valors amb els models existents. Finalment, utilitzant les eines estadístiques esmentades al capítol 3, s'han pogut obtenir resultats sobre algunes lleis d'escala relacionades amb la convecció.

Introducció

CAPÍTOL 1

TURBULÈNCIA

1.1. INTRODUCCIÓ	16
1.2. EQUACIONS DETERMINISTES DEL FLUID.....	20
1.3. APROXIMACIÓ ESTADÍSTICA A LES EQUACIONS DELS FLUXOS TURBULENTS	22
1.4. TURBULÈNCIA HOMOGÈNIA I ESPECTRES TRIDIMENSIONALS.....	28
1.5. EVOLUCIÓ TEMPORAL DELS ESPECTRES TRIDIMENSIONALS EN CONDICIONS D’HOMOGENEÏTAT.....	31
1.6. EL RANG D’EQUILIBRI UNIVERSAL.....	34
1.6.1. ESPECTRE TRIDIMENSIONAL DE L’ENERGIA	36
1.6.2. ESPECTRE TRIDIMENSIONAL DE L’ESCALAR	38
1.7. TURBULÈNCIA ISÒTROPA. ESPECTRES UNIDIMENSIONALS	41
1.8. ESPECTRE DEL CISALLAMENT I DEL GRADIENT DE L’ESCALAR.....	46
1.9. BIBLIOGRAFIA	48

1.1. Introducció

Ja fa gairebé cinc-cents anys dels estudis sobre fluxos d’aigua amb obstacles i sobre tempestes i diluvis que Leonardo da Vinci (1452-1519) va plasmar en diferents làmines amb dibuixos (vegeu-ne dos exemples en la figura 1.1). S’acostuma a fixar aquests treballs com el començament de l’estudi de la turbulència en fluids (*turbolenza*), encara que des d’un punt de vista purament descriptiu. Leonardo, en una de les seves anotacions dels voltants del 1510, i potser avançant l’anomenada descomposició de Reynolds, escriu (Lumley, 1992):

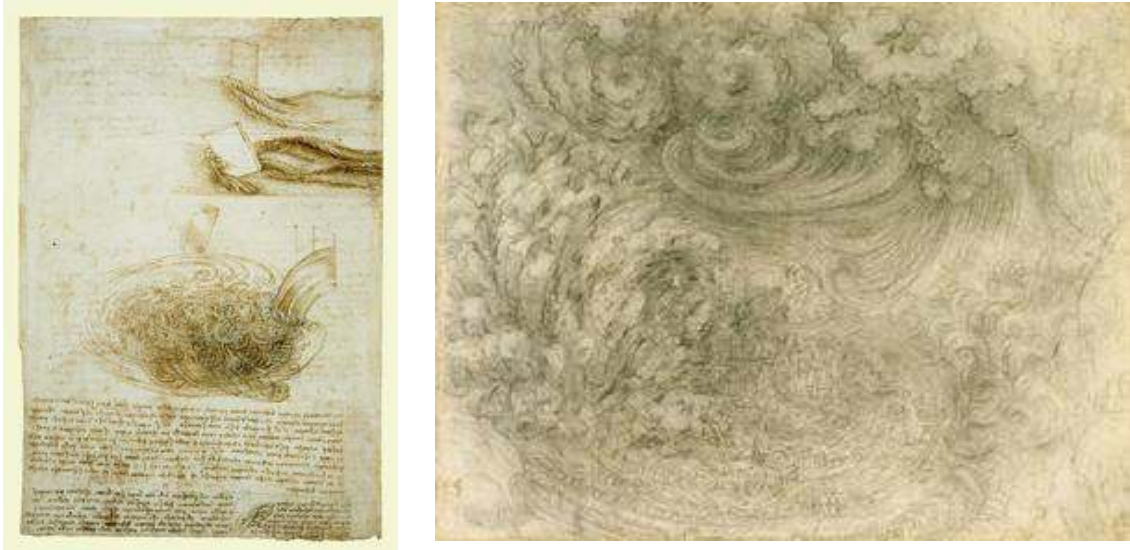


Figura 1.1. A l'esquerra, làmina anomenada *Estudis sobre el flux de l'aigua* (1509-1511). A la dreta, *Tempesta sobre una ciutat* (1517-1518). Leonardo da Vinci. *The Royal Collection, Windsor Castle, Londres.*

“Observa el moviment de la superfície de l'aigua, que s'assembla al dels cabells, que té dos moviments, un de causat pel pes dels cabells i l'altre per la direcció dels rínxols. Així, l'aigua té moviments giratoris, una part dels quals és portada pel corrent principal i l'altra pels moviments aleatoris i inversos.”

Però l'estudi científic modern en el camp de la turbulència el va iniciar Osborne Reynolds (1842-1912), amb els seus treballs sobre les condicions de transició a la turbulència en fluxos dins canonades i la idea —que posteriorment es va conèixer com a *descomposició de Reynolds*— de considerar el flux com una part mitjana més una fluctuació.

Fins a la dècada del 1920 la turbulència va ser tractada totalment des de la perspectiva de l'enginyeria i bàsicament com una branca de la hidràulica. Posteriorment, i sobretot a partir de la dècada del 1950, la recerca des d'un punt de vista físic i fonamental va guanyar un gran ímpetu amb científics de la talla de Geoffrey Ingram Taylor (1886-1975), considerat com el pare de la teoria estadística de la turbulència. Taylor va ser el primer a introduir eines matemàtiques com les correlacions i els espectres en la recerca de mecànica de fluids, i propietats com l'homogeneïtat i la isotropia estadístiques. El meteoròleg britànic Lewis F. Richardson (1888-1953) va ser probablement el primer a interpretar la turbulència com un continu de remolins de diferents mides i a introduir el

concepte de *cascada energètica*. Així, Richardson descriu que els remolins es formen i es trenquen contínuament, i els remolins grossos en trencar-se en formen altres de més petits, i així successivament fins a les mides més petites, en què la viscositat és eficaç i dissipa l'energia cinètica en forma de calor. Richardson va plasmar aquest mecanisme en una coneguda poesia:

“Big whorls have little whorls,
Which feed on their velocity,
And little whorls have lesser whorls,
And so on to viscosity.”

“Grans remolins generen petits remolins,
els quals es nodreixen de la seva velocitat,
i petits remolins en generen de més petits encara,
i així successivament fins a la viscositat.”

El matemàtic rus Andrei Nikolaièvitx Kolmogorov (1903-1987), en les seves aportacions a la teoria dels processos aleatoris, va formular la coneguda llei espectral dels $-5/3$ per al rang inercial de la turbulència isòtropa (de fet, la llei $2/3$ en la formulació original amb funcions d'estructura). George Keith Batchelor (1920-2000), deixeble de Taylor a Cambridge, va continuar amb la interpretació estadística de la turbulència. Entre moltes altres aportacions, va formular la forma de l'espectre dels camps escalars en condicions d'isotropia. El seu text *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Batchelor, 1982), amb la primera edició de l'any 1953, s'ha convertit en un text clàssic i encara avui dia amb plena vigència. Aquest llibre té el mèrit d'haver estat el primer a recopilar el coneixement adquirit fins a aquell moment sobre la línia estadística iniciada per Taylor. La llista d'investigadors que han dedicat una part o la totalitat de la seva recerca a l'estudi de la turbulència és molt llarga, i a més dels mencionats, podem destacar L. Prandtl, W. Heisenberg, T. von Karman, A. M. Obukhov, R. V. Ozmidov, A. S. Monin i R. Kraichnan, alguns d'ells coneguts també per les seves investigacions en altres branques de la física.

A partir de la dècada del 1970 es va obrir una gran via de recerca en turbulència, gràcies al desenvolupament d'ordinadors cada vegada més potents, que van proporcionar la possibilitat d'utilitzar eines de simulació numèrica en els sistemes fluids. Fins i tot amb

aquestes aportacions i eines, la turbulència, en paraules de Richard Phillips Feynman (1918-1988), és encara avui el gran problema no resolt de la física clàssica.

No hi ha un acord universal sobre la definició del terme *turbulència*, fet que ha generat i genera profundes discrepàncies entre la comunitat científica dedicada a aquest tema. Diferents definicions, que es poden trobar en textos clàssics i moderns sobre el tema, són les de Batchelor (1982), Baumert (2005), Hinze (1975), Kundu (1990), Lerman (1995), Lesieur (1990), Mathieu (2000), McComb (1996) i Tennekes (1982). En aquest text es dona la definició de Lesieur (1990), que associa la turbulència amb les tres propietats següents:

a) *Impredictible*: una petita variació en les condicions inicials o de contorn s'amplifica de tal manera que es fa impossible determinar l'estat del fluid en un temps futur. Això és, qualsevol magnitud mesurada (camps definits en el fluid com la velocitat, la temperatura, etc.) en un instant de temps i en una posició determinats tindrà valors diferents quan es repeteixi l'experiment en unes condicions inicials i de contorn nominalment (controlables) idèntiques. En aquest sentit, qualsevol d'aquests camps pren valors no determinables a partir de les condicions inicials i de contorn del sistema, encara que s'assumeix que les propietats mitjanes sí que seran determinables de manera unívoca a partir d'aquestes condicions. Un camp escalar genèric $\Theta(\vec{x}, t)$, però generalitzable a vectorial, tindrà definit un camp mitjà $\overline{\Theta}(\vec{x}, t)$ que depèn de la posició \vec{x} i el temps t , i que està definit a partir d'un nombre molt gran de repeticions de l'experiment, que anomenarem *col·lectivitat*. D'aquesta manera, considerant la repetició i -èsima $\Theta^{(i)}(\vec{x}, t)$ amb $i = 1, 2, \dots$, tenim:

$$\overline{\Theta}(\vec{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Theta^{(i)}(\vec{x}, t) / N$$

Observem, a partir de la definició anterior, que el càlcul de la mitjana serà una operació lineal i que commutarà amb les operacions derivar i integrar. L'anomenada *descomposició de Reynolds* consisteix a separar qualsevol camp en una part mitjana més una part turbulenta θ , amb $\Theta = \overline{\Theta} + \theta$. El camp turbulent θ , el qual perdrà valors diferents per cada repetició que es faci de l'experiment, té una mitjana nul·la, això és $\overline{\theta} = 0$, com a resultat de la linealitat de l'operació mitjana.

b) *Alta barreja*: la turbulència barreja les magnituds transportables en un grau més gran que el que es produiria per processos purament de difusió molecular.

c) *Ampli rang d'escales espacials implicades*: sent la més gran la mida del sistema i la més petita determinada pels processos de dissipació. Normalment, quan parlem d'escales espacials ens referim a longituds o nombres d'ona implicades en el que podria ser una descomposició de Fourier o per ondets (*wavelets*).

En les darreres dècades s'han vist clarament dues línies de recerca sobre turbulència, amb les seves diferències filosòfiques o de plantejament, però també amb les seves interrelacions. La primera és la que va iniciar Taylor amb un plantejament estadístic. La segona, generalment molt lligada a simulacions numèriques amb ordinador, consisteix en un apropament determinista al problema, que va des del que s'anomena DNS (*direct numerical simulation*, simulació numèrica directa) fins a l'estudi del comportament de sistemes dinàmics amb caos espaciotemporal.

La turbulència és present en un ventall de sistemes ben diferents, que va des dels geofluids (atmosfera, oceans, llacs, rius, etc.) fins a aplicacions pròpies de l'enginyeria i l'aeronàutica, i fins i tot en disciplines com l'astrofísica o la medicina i la biologia. Molts dels fluxos que interessen els científics i enginyers són turbulents; per tant, la turbulència no és una excepció.

1.2. Equacions deterministes del fluid

Encara que, tal com hem comentat abans, el flux turbulent és impredecible, les equacions que en determinen l'evolució temporal són deterministes. Així, si el sistema continu és caracteritzat pels camps de velocitats (tres components), pressió, temperatura i concentració de N espècies diferents, per tant $N+5$ camps, la seva evolució temporal és determinada per un conjunt de $N+5$ equacions diferencials en derivades parcials. Paral·lelament, l'equació d'estat del sistema fluid serà determinada per la densitat ρ , dependent de la pressió p , la temperatura T i de diferents concentracions

d'espècies presents al fluid C_n amb $n = 1, 2, \dots, N$. La dependència funcional de la densitat en el cas $N = 2$, aplicat en aquest text amb la salinitat i partícules sòlides en suspensió, es mostra en l'apèndix A, en què s'ha assumit que el flux és incompressible. Si establim un sistema de referència amb coordenades cartesianes $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, que segons conveniències de la notació escriurem de vegades com a $\vec{x} = (x, y, z)$, orientat de tal manera que la coordenada x_3 (o z) apunti en sentit contrari al camp gravitatori $\vec{g} = (0, 0, -g)$, les equacions per a un fluid no compressible són (Tritton, 1988 o Kundu, 1990):

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.1c)$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} + \frac{\partial C_n U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa_n \frac{\partial C_n}{\partial x_j} \right) \quad (1.1d)$$

on a partir d'ara utilitzem el conveni d'Einstein, que identifica un índex repetit amb un sumatori. Les dues primeres equacions, 1.1a i 1.1b, determinen l'evolució dels camps velocitat $U_i(\vec{x}, t)$ (amb $i = 1, 2, 3$) i pressió $p(\vec{x}, t)$, sent ν la viscositat cinemàtica. Aquestes dues equacions són, respectivament, l'equació de Navier-Stokes i la de continuïtat, totes dues expressades sota l'aproximació de Boussinesq. A 1.1a aquesta aproximació considera que les variacions en la densitat són prou petites per ser negligides, excepte quan apareixen multiplicades pel terme de la gravetat, i així, exceptuant el segon terme del segon membre, la densitat apareix com un valor constant de referència ρ_0 . Sota l'aproximació esmentada (1.1b), pren la forma d'un flux incompressible o no divergent que per analogia amb el cas del camp magnètic també s'anomena solenoïdal. L'equació 1.1c és l'equació de balanç per a la temperatura, resultat de l'aplicació de l'aproximació de Boussinesq sobre l'equació de balanç de l'energia; noteu que en aquesta forma es tracta d'una equació del tipus advecció-difusió. Considerant que les concentracions segueixen també aquest tipus d'equació, tal com s'ha escrit a 1.1d, parlarem d'un camp escalar genèric, com podrien ser T o C_n , que segueix una equació de tipus advecció-difusió, el qual indicarem a partir d'ara com a

$\Theta(\bar{x}, t)$. Les difusivitats de la temperatura, concentració de l'espècie n i el camp escalar genèric són κ_T , κ_n i κ_θ , respectivament. Cal matisar que el camp de pressió que apareix a 1.1a correspon de fet a la desviació de la pressió respecte al perfil hidrostàtic d'aquesta. L'equació 1.1a de la velocitat està acoblada a la família d'equacions 1.1c i 1.1d dels camps escalars per mitjà del terme de flotabilitat $-g(\rho - \rho_0)/\rho_0\delta_{i3}$, i de l'equació d'estat, linealitzada sota l'aproximació de Boussinesq en la forma:

$$(\rho - \rho_0)/\rho_0 = -\alpha(T - T_0) + \beta_n(C_n - C_{n,0}) \quad (1.2)$$

on T_0 i $C_{n,0}$ són valors de referència per a la temperatura i la concentració, i α i β_n són el coeficient d'expansió tèrmica i el de contracció per a l'espècie contaminant n (apèndix A). Com veurem amb detall en el pròxim capítol, el terme de flotabilitat determina els processos convectius.

En aquest treball s'ha negligit la possibilitat d'acoblament entre les equacions de transport de la temperatura i les diferents concentracions, entre 1.1c i 1.1d, això és, no es consideren efectes de difusió creuada del tipus Soret —flux màssic dependent del gradient tèrmic— o Dufour —flux tèrmic dependent d'un gradient de concentració— (Knobloch, 1980).

1.3. Aproximació estadística a les equacions dels fluxos turbulents

Una vegada establertes les equacions deterministes del fluid, si volem estudiar un flux turbulent, la propietat a de l'apartat 1.1 ens obliga a seguir una descripció estadística. Per això aplicarem la mencionada descomposició de Reynolds als diferents camps, tal com es detalla en la taula 1.1.

Així, seguint, per exemple, el procediment que es dona a Kundu (1990), la descomposició de Reynolds sobre la família d'equacions 1.1 produeix per als camps mitjans les equacions següents:

	<i>Camp mitjà</i>	<i>Camp turbulent</i>	<i>Descomposició de Reynolds</i>
Velocitat: U_i	\bar{U}_i	u_i	$U_i = \bar{U}_i + u_i$
Pressió: p	\bar{p}	p'	$p = \bar{p} + p'$
Densitat: ρ	$\bar{\rho}$	ρ'	$\rho = \bar{\rho} + \rho'$
Camp escalar genèric: Θ	$\bar{\Theta}$	θ	$\Theta = \bar{\Theta} + \theta$
Temperatura: T	\bar{T}	T'	$T = \bar{T} + T'$
Concentració de l'espècie n : C_n	\bar{C}_n	C'_n	$C = \bar{C}_n + C'_n$

Taula 1.1. Descomposició de Reynolds, on tots els camps turbulents porten el símbol prima, exceptuant la velocitat i el camp escalar genèric, simbolitzats amb minúscules.

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - g \frac{\bar{\rho} - \rho_0}{\rho_0} \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.3b)$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Theta} \bar{U}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa_\theta \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u_j \theta}}{\partial x_j} \quad (1.3c)$$

on s'han englobat T i C_n dins l'equació 1.3c, genèrica per a un camp escalar qualsevol. Pel que fa a la densitat i els camps escalars, la part mitjana i la turbulenta estan lligades en la forma $(\bar{\rho} - \rho_0) / \rho_0 = -\alpha(\bar{T} - T_0) + \beta_n(\bar{C}_n - C_{n,0})$ i $\rho' = \rho_0(-\alpha T' + \beta_n C'_n)$. Finalment, sobre el conjunt d'equacions 1.3 s'ha d'afegir la condició solenoïdal sobre el flux turbulent, això és, $\partial u_i / \partial x_i = 0$.

Podem observar que l'única diferència entre les equacions del flux instantani (1.1) i les del flux mitjà (1.3) és l'aparició de les divergències de l'anomenat *tensor de Reynolds* $\overline{u_i u_j}$ a 1.3a i el vector $\overline{u_j \theta}$ a 1.3c. Aquest tipus de termes, que calculem com a mitjanes del producte de les fluctuacions de dos camps avaluats en el mateix punt de l'espai, reben el nom de *correlacions* (de fet, *correlacions en un punt*, per diferenciar-les de les correlacions entre múltiples punts, que s'introduiran més endavant) o també *moments d'ordre dos*. Les correlacions entre un camp turbulent i la velocitat turbulenta són, de

fet, els fluxos turbulents, de manera que, per exemple, en el cas de l'equació 1.3c, el flux de l'escalar al llarg de la direcció j serà determinat per:

$$F_{\Theta j} = -\kappa_{\theta} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_j} + \overline{\Theta} \overline{U_j} + \overline{u_j \theta} \quad (1.4)$$

És a dir, per la superposició d'un terme difusiu (el primer) i uns altres d'advection, a causa del camp mitjà de la velocitat (el segon) i de la mateixa turbulència (el tercer). En condicions de turbulència intensa, el primer i el segon terme són negligibles respecte del tercer. Així, per exemple, en condicions plenament turbulentes, el flux tèrmic serà $\overline{u_j T'}$ i el flux de calor (proporcional al tèrmic) es pot calcular a partir de:

$$F_{Qj} = \rho_0 c_p F_{Tj} = \rho_0 c_p \overline{u_j T'} \quad (1.5)$$

on c_p és la calor específica a pressió constant.

Anàlogament, en l'últim terme del segon membre de l'equació 1.3a podem identificar el flux turbulent de la component i de la quantitat de moviment en la direcció j , això és $\overline{u_i u_j}$.

En el sistema d'equacions per als camps mitjans (1.3), obtingudes a partir de la introducció del formalisme estadístic en les equacions de les variables instantànies, veiem que han aparegut les correlacions de dos camps (fluxos turbulents), els valors de les quals desconexim. Conseqüentment, en aquesta aproximació el nombre de variables (camps) que necessitem determinar supera el nombre d'equacions. Caldria, doncs, obtenir les equacions de balanç per a aquestes correlacions (moments d'ordre 2), però ens trobem que llavors apareixen implicades correlacions de tres camps (moments d'ordre 3), i així successivament. Aquest fet rep el nom de *problema de la clausura* i és el problema més important de la teoria turbulenta. De totes maneres, s'han proposat diferents esquemes de clausura, això és, lligams matemàtics entre els moments turbulents i els camps mitjans, sobre sistemes molt concrets, i sovint amb bases físiques qüestionables, però que han proporcionat resultats experimentals acceptables i alguns d'àmpliament emprats (Launder i Sandham, 2001).

Una forma quantitativa de donar la intensitat de la turbulència és per mitjà de la variància de les fluctuacions dels diferents camps. En el cas concret de la velocitat,

tenim, a més, que aquesta variància difereix només de l'energia cinètica turbulenta per unitat de massa, K , en un factor dos, de manera que podem definir:

$$K \equiv \overline{u_i u_i} / 2 \tag{1.6a}$$

Anàlogament, en el cas de la variància d'un escalar definim:

$$q_\theta \equiv \overline{\theta^2} \tag{1.6b}$$

A partir de la descomposició de Reynolds (taula 1.1) i l'equació de Navier-Stokes (1.1a), i considerant la definició 1.6a, trobem que l'equació de l'evolució temporal de l'energia cinètica turbulenta és la següent (Kundu, 1990):

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{\partial F_{K,j}}{\partial x_j} + J_S + J_B - \varepsilon \tag{1.7}$$

Els diferents termes que apareixen en aquesta equació s'expliciten en la taula 1.2 i es comenten a continuació.

Transport de K al llarg de la direcció j :	$F_{K,j} =$	$\overline{U_j K} + \overline{p' u_j} / \rho_0 + \overline{u_i u_i u_j} / 2 - \overline{\nu u_i (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)}$
Producció de K per cisalla:	$J_S =$	$-\overline{u_i u_j} (\partial \overline{U_i} / \partial x_j)$
Producció (o destrucció) de K per la flotabilitat:	$J_B =$	$-\overline{\rho' w g} / \rho_0 = g (\alpha \overline{T' w} - \beta_n \overline{C'_n w})$
Dissipació de K per efecte de la viscositat:	$\varepsilon =$	$\overline{\nu (\partial u_i / \partial x_j) (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)}$

Taula 1.2. Termes de transport, producció i dissipació en l'equació de l'energia cinètica turbulenta. Per a la component vertical de la velocitat turbulenta, en la definició de J_B s'ha utilitzat el conveni $w = u_3$.

El primer terme del segon membre de l'equació 1.7 és el terme de transport (menys divergència del flux $F_{K,j}$), que distribueix l'energia cinètica turbulenta dins del fluid. Els diferents mecanismes que contribueixen a aquest transport són el flux mitjà, les

fluctuacions de la pressió, la mateixa turbulència i les forces viscoses. La formulació matemàtica d'aquests mecanismes s'ha detallat en la primera fila de la taula 1.2.

El segon terme del segon membre de l'equació 1.7, definit en la segona fila de la taula 1.2, és el terme de producció per cisalla, J_S . Es pot demostrar que J_S és sempre positiu (Hinze, 1975), és a dir, la turbulència extreu l'energia del flux mitjà però en canvi no és possible —en 3D (turbulència tridimensional)— que la turbulència es reorganitzi de manera que augmenti l'energia del camp mitjà de velocitats.

La ε és la velocitat de dissipació d'energia cinètica turbulenta per unitat de massa, i la seva definició s'ha inclòs en l'última fila de la taula 1.2. La ε és també sempre positiva, i, considerant el signe menys que té al davant a 1.7, contribueix sempre negativament en el balanç de l'energia cinètica turbulenta.

Finalment, el tercer terme del segon membre de l'equació 1.7 és el terme de flotabilitat, també anomenat *flux de flotabilitat*, que podrà ser positiu (producció) o negatiu (destrucció) en funció de si el perfil mitjà de densitat és estàticament inestable (creix en incrementar z) o estàticament estable (decreix en incrementar z). Al costat esquerre de la figura 1.2 s'ha representat un perfil de densitat que decreix en altura, on es veu que una fluctuació positiva de la component vertical del camp turbulent de velocitat, $w > 0$ (vermell), està lligada a una fluctuació positiva de la densitat, $\rho' > 0$, i per tant, $w\rho' > 0$. En el cas que $w < 0$ (blau), llavors $\rho' < 0$ i per tant el resultat és que també $w\rho' > 0$. Per tant, si considerem el perfil de densitat decreixent en altura, J_B —definit en la tercera fila de la taula 1.2—, és sempre negatiu, és a dir, destrueix l'energia cinètica turbulenta i la transforma en gran part en energia potencial. El cas contrari es representa a la dreta de la figura 1.2, on es veu que quan la densitat decreix en altura llavors $w\rho' < 0$, i per tant $J_B > 0$, això és, l'energia cinètica turbulenta augmenta i la potencial disminueix. En el cas estàticament inestable, el flux turbulent de densitat compleix $w\rho' < 0$, i, per tant, igual que en el cas estable, té un sentit contrari al gradient de densitat, fet estàndard en qualsevol problema de transport. Una excepció al transport estàndard en contra del gradient, amb les seves matisacions, serà la que donarem en el capítol 2, en el cas de la inestabilitat anomenada *dobla difusió en règim difusiu*, en què la densitat és decreixent en altura i el transport d'aquesta es produeix en sentit

descendent, a favor del gradient, mitjançant una interessant combinació de regions difusives i convectives.

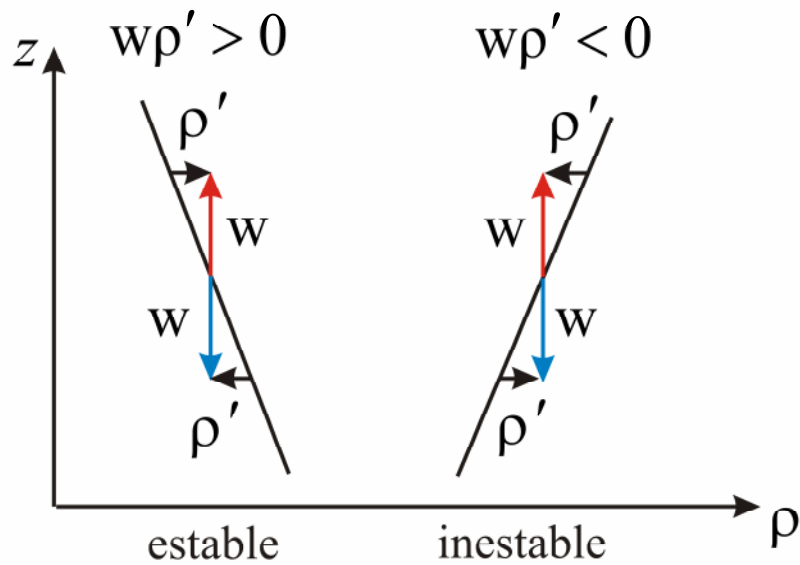


Figura 1.2. Anàlisi del flux de flotabilitat, en funció de si el perfil de densitat és decreixent en altura (estable) o creixent en altura (inestable).

L'evolució temporal de la variància del camp escalar genèric Θ , això és, q_θ , és formalment semblant a la de la velocitat i és descrita per l'equació 1.8, els termes de la qual s'han explicitat en la taula 1.3:

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial t} = -\frac{\partial F_{q_\theta, j}}{\partial x_j} + J_\theta - \varepsilon_\theta \quad (1.8)$$

Transport de variància	$F_{q_\theta, j} =$	$\bar{U}_j q_\theta + \overline{\theta^2 u_j} - 2\kappa_\theta \partial q_\theta / \partial x_j$
Producció de variància	$J_\theta =$	$-2\bar{u}_i \bar{\theta} (\partial \bar{\theta} / \partial x_i)$
Dissipació de variància	$\varepsilon_\theta =$	$2\kappa_\theta \overline{(\partial \theta / \partial x_i)^2}$

Taula 1.3. Termes de transport, producció i dissipació en l'equació de la variància (1.8) d'un camp escalar Θ , aplicable a la temperatura i a la concentració d'espècies contaminants.

De manera semblant al cas de l'energia cinètica, també en el cas d'un escalar genèric la descomposició de Reynolds ens permet identificar un terme de transport que distribueix la seva variància en l'espai, un terme de producció —que és sempre positiu i actua com a font sempre que hi hagi un gradient del camp mitjà $d\bar{\Theta}/dz$ —, i el terme dissipatiu ε_θ , que actua com un albelló de variància per efectes de la difusivitat molecular.

1.4. Turbulència homogènia i espectres tridimensionals

En l'estudi estadístic de la turbulència, i amb l'objectiu d'analitzar-ne la variabilitat espacial, és usual introduir les correlacions entre diferents punts. Estrictament parlant, aquestes correlacions corresponen a la mitjana (sobre la col·lectivitat) del producte de les fluctuacions de diferents camps en diferents punts de l'espai i en el mateix instant. Formalment, i en el cas de les fluctuacions de la velocitat i del camp escalar genèric, definim el tensor i l'escalar de correlacions entre els dos punts genèrics \vec{x} i \vec{x}' amb una posició relativa d'un respecte a l'altre $\vec{r} = \vec{x}' - \vec{x}$ com a:

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t) \equiv \overline{u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x}', t)} \quad (1.9a)$$

$$R_{\theta\theta}(\vec{x}, \vec{x}', t) \equiv \overline{\theta(\vec{x}, t) \theta(\vec{x}', t)} \quad (1.9b)$$

I, anàlogament, si consideréssim la correlació entre les fluctuacions d'un escalar amb les d'una de les components de la velocitat, tindriem el vector de correlació creuat:

$$R_{\theta i}(\vec{x}, \vec{x}', t) \equiv \overline{\theta(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}', t)} \quad (1.9c)$$

Matemàticament, les relacions 1.9 poden ser invariants sota translacions del sistema de referència, i en aquest cas direm que la turbulència és homogènia (en un sentit estadístic). Per tant, per turbulència homogènia, les correlacions entre diferents punts depenen tan sols de les posicions relatives \vec{r} (no depenen de \vec{x}). Sovint, però, en condicions d'homogeneïtat, s'aplica l'anomenada *hipòtesi ergòdica* (Lesieur, 1990), la qual vincula la mitjana sobre una col·lectivitat d'experiments amb la mitjana sobre tots els punts de l'espai que ocupa el fluid. Les mitjanes sobre la col·lectivitat a 1.9 es farien integrant respecte a la coordenada \vec{x} .

En general, a mesura que s'incrementa el mòdul de la distància relativa $r = |\vec{r}|$, les correlacions tendeixen cap a zero, o també podem dir que els camps turbulents descorrelacionen. *L'escala integral* corresponent a un camp turbulent determinat —i que de forma genèrica anomenarem L — es defineix com la integral respecte a r de la correlació normalitzada amb la variància d'aquest camp (Kundu, 1990), la qual sovint s'identifica amb la decorrelació i amb l'escala dels remolins que contenen l'energia (Kantha i Clayson, 2000).

Estrictament parlant, en condicions d'homogeneïtat els camps mitjans tampoc no haurien de dependre de l'espai, però això implicaria que no hi hauria producció de turbulència (taules 1.2 i 1.3). Per aquest motiu, i dins del formalisme de la turbulència homogènia, s'acostuma a considerar els camps mitjans amb una variació espacial molt suau, en la forma de perfils lineals caracteritzats amb gradients verticals constants. Les demostracions importants del formalisme matemàtic de la turbulència homogènia, amb camps mitjans diferents de zero, es desenvolupen en l'apèndix B. La filosofia dels desenvolupaments matemàtics dins aquest apèndix està en la línia seguida per Hinze (1975) o Mathieu (2000).

Els sistemes amb homogeneïtat estadística també poden ser isòtrops, i en aquest cas les correlacions seran invariants sota operacions de rotació aplicades sobre el sistema de referència i sota reflexions respecte als plans de coordenades (xy , yz i xz). De vegades es parla de turbulència completament desenvolupada com d'aquella turbulència que compleix les condicions d'homogeneïtat e isotropia.

En condicions d'homogeneïtat estadística es defineixen els espectres tridimensionals a partir de les transformades de Fourier dels tensors de correlació. Això ens permet passar d'una anàlisi física de la turbulència basada en les posicions relatives (\vec{r}) a una nova interpretació amb nombres d'ona, \vec{k} en rad/m, en què aquest últim es relaciona amb les escales espacials l de la manera següent: $l = 2\pi/k$. Això és, els espectres ens permeten analitzar la turbulència respecte a totes les escales espacials l possibles. Més concretament, les transformades de Fourier de les correlacions 1.9a, 1.9b i 1.9c, representades com a $E_{ij}(\vec{k}, t)$, $E_{\theta\theta}(\vec{k}, t)$ i $E_{\theta}(\vec{k}, t)$, es defineixen amb 1.10a, 1.10b i 1.10c, respectivament:

$$E_{ij}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r} R_{ij}(\vec{r}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \quad (1.10a)$$

$$R_{ij}(\vec{r}, t) = \iiint d^3\vec{k} E_{ij}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k}\vec{r})$$

$$E_{\theta\theta}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r} R_{\theta\theta}(\vec{r}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \quad (1.10b)$$

$$R_{\theta\theta}(\vec{r}, t) = \iiint d^3\vec{k} E_{\theta\theta}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k}\vec{r})$$

$$E_{\alpha}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r} R_{\alpha}(\vec{r}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \quad (1.10c)$$

$$R_{\alpha}(\vec{r}, t) = \iiint d^3\vec{k} E_{\alpha}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k}\vec{r})$$

Les segones línies d'1.10 corresponen a les transformades inverses de Fourier. En aquestes expressions, els elements de volum en coordenades cartesianes en l'espai directe i de Fourier són, respectivament, $d^3\vec{r} = dr_1 dr_2 dr_3$ i $d^3\vec{k} = dk_1 dk_2 dk_3$. En general, i per simplificar la notació, si no s'expliciten els límits d'integració vol dir que aquests van de $-\infty$ a ∞ .

A partir de les relacions de la transformada de Fourier inversa —segones línies de les expressions 1.10—, avaluant $\vec{r} = 0$, calculant la traça d'1.10a i expressant l'element de volum dels nombres d'ona en coordenades esfèriques, això és $d^3\vec{k} = dk d\Omega_k$, sent k el mòdul del nombre d'ona i $d\Omega_k = k^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ l'angle sòlid, amb θ la colatitud ($0 \leq \theta \leq \pi$) i φ l'azimut ($0 \leq \varphi < 2\pi$), obtenim les relacions següents:

$$K \equiv \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} \iiint d^3\vec{k} E_{ii}(\vec{k}, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \oint d\Omega_k E_{ii}(\vec{k}, t) \quad (1.11a)$$

$$q_\theta \equiv \overline{\theta^2} = \iiint d^3\vec{k} E_{\theta\theta}(\vec{k}, t) = \int_0^\infty dk \oint d\Omega_k E_{\theta\theta}(\vec{k}, t) \quad (1.11b)$$

$$\overline{\theta u_i} \equiv \iiint d^3\vec{k} E_{\theta i}(\vec{k}, t) = \int_0^\infty dk \oint d\Omega_k E_{\theta i}(\vec{k}, t) \quad (1.11c)$$

A 1.11 \oint simbolitza la integració respecte a tot l'angle sòlid. Les expressions d'1.11 ens defineixen, ara en l'espai invers (de les k), l'energia cinètica turbulenta, la variància d'un camp escalar i el flux turbulent del camp escalar en una direcció determinada i . És en aquest marc, i suposant que la turbulència és homogènia, que es defineixen els

espectres tridimensionals de l'energia, $E(k, t)$, de la variància de l'escalar, $E_\theta(k, t)$, i del flux de l'escalar, $E_{F_{\theta i}}(k, t)$, com a:

$$E(k, t) \equiv \oint d\Omega_k E_{ii}(\vec{k}, t) / 2 \quad (1.12a)$$

$$E_\theta(k, t) \equiv \oint d\Omega_k E_{\theta\theta}(\vec{k}, t) \quad (1.12b)$$

$$E_{F_{\theta i}}(k, t) \equiv \oint d\Omega_k E_{\theta i}(\vec{k}, t) \quad (1.12c)$$

De manera que, si introduïm 1.12 dins 1.11, trobem les condicions de normalització que compleixen els espectres:

$$K = \frac{\overline{u_i u_i}}{2} = \int_0^\infty E(k, t) dk \quad (1.13a)$$

$$q_\theta = \overline{\theta^2} = \int_0^\infty E_\theta(k, t) dk \quad (1.13b)$$

$$\overline{\theta u_i} = \int_0^\infty E_{F_{\theta i}}(k, t) dk \quad (1.13c)$$

Els espectres $E(k, t)$ i $E_\theta(k, t)$ són funcions reals i $E_{F_{\theta i}}(k, t)$ és, en general, una funció complexa (apartat B.1 de l'apèndix B), tot i que la seva integral és real. A partir d'1.13, els espectres s'interpreten com la densitat d'energia (o variància de l'escalar, o flux de l'escalar) present en un nombre d'ona k , o alternativament per a una longitud d'ona $\lambda = 2\pi / k$, que es podria interpretar com l'escala d'un remolí. Dit d'una altra manera, $E(k, t)dk$ a 1.13a és l'energia cinètica dels remolins amb un nombre d'ona entre k i $k + dk$, i tenim interpretacions semblants per a la densitat de variància de l'escalar $E_\theta(k, t)dk$ i la del seu flux $E_{F_{\theta i}}(k, t)dk$ a 1.13b i 1.13c, respectivament.

1.5. Evolució temporal dels espectres tridimensionals en condicions d'homogeneïtat

A partir de la família d'equacions del fluid 1.1 i les consideracions anteriors sobre turbulència homogènia (sense assumir isotropia), podem trobar que les evolucions temporals dels espectres tridimensionals $E(k, t)$ i $E_\theta(k, t)$ són:

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t) + P_S(k,t) + P_B(k,t) \quad (1.14a)$$

$$\frac{\partial E_\theta(k,t)}{\partial t} = T_\theta(k,t) - 2\kappa_\theta k^2 E_\theta(k,t) + P_\theta(k,t) \quad (1.14b)$$

Per obtenir detalls sobre les demostracions vegeu els apartats B.2 i B.3 de l'apèndix B. Aquestes dues equacions, escrites en l'espai de Fourier, quan s'integren respecte a la totalitat de nombres d'ona, han de reproduir les equacions 1.7 i 1.8 de balanç energètic i de variància de l'escalar.

A 1.14 els segons termes del segon membre porten un signe negatiu davant dels anomenats *espectres de dissipació*, que en el cas de l'energia cinètica turbulenta anomenem $D(k,t)$, i en el cas de la variància de l'escalar $D_\theta(k,t)$, sent tots dos definits positius en la forma:

$$D(k,t) \equiv 2\nu k^2 E(k,t) \quad (1.15a)$$

$$D_\theta(k,t) \equiv 2\kappa_\theta k^2 E_\theta(k,t) \quad (1.15b)$$

Aquests espectres compleixen les normalitzacions següents (apèndix B):

$$\int_0^\infty D(k,t) dk = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k,t) dk = \varepsilon \quad (1.16a)$$

$$\int_0^\infty D_\theta(k,t) dk = 2\kappa_\theta \int_0^\infty k^2 E_\theta(k,t) dk = \varepsilon_\theta \quad (1.16b)$$

on ε i ε_θ són la velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta i de la variància de l'escalar, ja introduïdes en les equacions 1.7 i 1.8. Per tant, $D(k,t)dk$ i $D_\theta(k,t)dk$ són, respectivament, la dissipació d'energia cinètica turbulenta i de variància de l'escalar produïdes en el rang de nombres d'ona entre k i $k + dk$.

Els termes $P_S(k,t)$, $P_B(k,t)$ i $P_\theta(k,t)$ de les equacions 1.14 són els espectres de producció d'energia cinètica per cisalla, per flotabilitat i producció de variància de l'escalar, respectivament, i compleixen:

$$\int_0^\infty P_S(k,t) dk = J_S = -\overline{u_1 u_3} d\overline{U}_1/dz \quad (1.17a)$$

$$\int_0^\infty P_B(k,t) dk = J_B = g(\alpha \overline{T'w} - \beta_n \overline{C'_n w}) \quad (1.17b)$$

$$\int_0^{\infty} P_{\theta}(k, t) dk = J_{\theta} = -2\overline{w\theta} \frac{d\overline{\Theta}}{dz} \quad (1.17c)$$

Els termes de producció J_S , J_B i J_{θ} també s'havien comentat en les equacions 1.7 i 1.8, i definit explícitament en les taules 1.2 i 1.3. La forma explícita dels espectres de producció i transferència (comentats a continuació) es dona en els apartats B.2 i B.3 de l'apèndix B, pel que fa al cas d'un fluid amb els camps mitjans de la velocitat i de l'escalar estacionaris, amb estratificació vertical lineal, i en què el flux mitjà és horitzontal en la forma $(\overline{U}_1(z), 0, 0)$.

Si integrem les equacions 1.14 respecte al nombre d'ona (entre 0 i ∞), tal com hem esmentat al principi d'aquest apartat, hem de recuperar les equacions del balanç d'energia cinètica i de la variància de l'escalar (1.7 i 1.8) en condicions d'homogeneïtat estadística. Els primers termes del segon membre de les equacions 1.14, anomenats *espectres de transferència*, $T(k, t)$ i $T_{\theta}(k, t)$, apareixen com a conseqüència dels termes no lineals en les equacions del fluid 1.1 i tenen una integral nul·la (respecte a k), ja que els altres termes que apareixen a 1.14a i 1.14a tenen equivalents en les equacions 1.7 i 1.8. Llavors:

$$\int_0^{\infty} T(k, t) dk = 0 \quad (1.18a)$$

$$\int_0^{\infty} T_{\theta}(k, t) dk = 0 \quad (1.18b)$$

Des d'un punt de vista físic, la quantitat infinitesimal $T(k, t) dk$ és la velocitat d'entrada d'energia en el rang de nombres d'ona entre k i $k + dk$, procedent d'altres escales espacials. El fet que a 1.18 la integral sigui nul·la representa que no hi ha una entrada neta d'energia, sinó que aquest terme només representa la distribució d'energia entre les diferents escales (nombre d'ones).

1.6. El rang d'equilibri universal

En la figura 1.3 veiem un espectre de l'energia típic, format per tres rangs principals: el dels remolins grossos, el dels remolins que contenen l'energia i el rang d'equilibri universal, que, tal com comentarem, podem dividir en dos subrangs més: l'inercial i el dissipatiu. El primer d'aquests rangs comprèn els nombres d'ona més petits; és l'anomenat *rang dels remolins més grossos*. El rang següent conté el nombre d'ona en què l'espectre pren el seu màxim, k_e , a partir del qual es defineix l'escala integral L , de manera que $k_e \approx 2\pi/L$. Aquesta definició de L és equivalent a la que hem donat en l'apartat 1.4, això és, també correspon a la distància en què es produeix la descorrelació entre les fluctuacions de velocitat. Aquest rang s'anomena *rang dels remolins que contenen l'energia*, ja que conté el percentatge més gran d'energia.

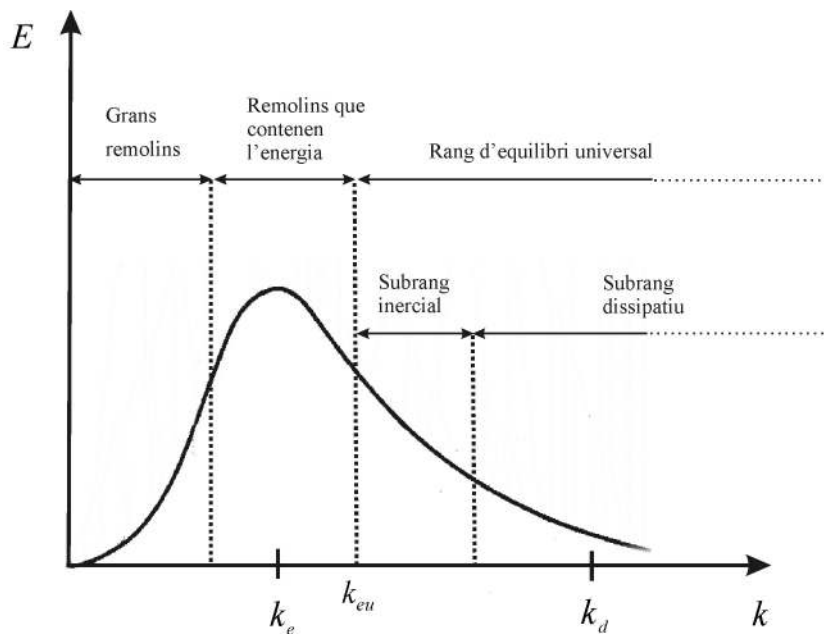


Figura 1.3. Espectre tridimensional de l'energia en funció del nombre d'ona, amb el rang d'equilibri universal, que comprèn tant el subrang inercial com el dissipatiu.

El tercer rang, introduït per Kolmogorov, és l'anomenat *rang d'equilibri universal* i arriba fins a l'anomenat *nombre d'ona de Kolmogorov*, k_d , que és aproximadament un ordre de magnitud superior al punt en què l'espectre de dissipació pren el valor màxim. Com que $D \propto k^2 E$, l'espectre de dissipació D pren el valor màxim per a nombres d'ona superiors al rang dels remolins que contenen l'energia (màxim de E), i per tant

$k_d > k_e$. Així mateix, caracteritzem amb k_{eu} el nombre d'ona a partir del qual comença el rang d'equilibri universal. Kolmogorov va considerar que, si $k_d \gg k_e$, existiria un rang independent de les condicions de formació de la turbulència (inherentment anisòtropes), i per tant isòtrop, i en què l'energia es transmetria de les escales més grans a les més petites, sense dissipar-se. Aquest procés de transferència s'anomena *cascada energètica* i el rang és anomenat *subrang inercial* (són les escales grosses del rang d'equilibri universal). Les escales més petites del *rang d'equilibri universal*, també amb un comportament isòtrop, i on la dissipació d'energia cinètica turbulenta és prou eficaç, corresponen a l'anomenat *subrang dissipatiu*.

Si considerem que la producció d'energia només es dona en el rang dels remolins que contenen l'energia, això és, que els espectres de producció fora d'aquest rang són nuls, llavors, integrant 1.14a entre 0 i un k dins el rang d'equilibri ($k \geq k_{eu}$), obtenim:

$$\frac{d}{dt} \int_0^k E(k', t) dk' = -S(k, t) + J_S + J_B - \int_0^k D(k', t) dk' \quad (1.19a)$$

I si integrem entre k i ∞ obtenim:

$$\frac{d}{dt} \int_k^\infty E(k', t) dk' = S(k, t) - \int_k^\infty D(k', t) dk' \quad (1.19b)$$

on s'ha definit el flux d'energia entre els rangs de producció i dissipació $S(k, t)$, el qual, tenint en compte la condició 1.18a, compleix:

$$S(k, t) = -\int_0^k T(k', t) dk' = \int_k^\infty T(k', t) dk' \quad (1.20)$$

Analitzant 1.19a, podem interpretar que l'energia surt a un ritme $-S(k, t)$ de les escales més grosses (de 0 a k), i amb 1.19b veiem que arriba fins a les escales petites (de k a ∞) al mateix ritme $S(k, t)$. En les escales grosses és on es fa la producció —segon i tercer terme del segon membre d'1.19a—. Habitualment es considera que l'energia cinètica corresponent a les escales grosses —primer terme d'1.19a— varia en el temps molt més ràpidament que la part corresponent a les escales petites (k dins el rang d'equilibri) —primer terme d'1.19b—. Seguint aquests arguments podem aproximar a zero el primer terme d'1.19b. Llavors, si avaluem 1.19b per $k = k_{eu}$, tenint en compte que tota la dissipació es produeix per $k \geq k_{eu}$, i que, per tant, la integral de l'espectre de

dissipació a 1.19a i 1.19b és nul·la e igual a ε respectivament, trobem el ritme en què les escales grosses transfereixen energia cap al rang d'equilibri, això és, S_{total} :

$$S_{total} = S(k_{eu}) = \varepsilon \quad (1.21)$$

Pel que fa a l'espectre de l'energia en el rang d'equilibri universal, aquest és independent de les condicions de formació de la turbulència, i per tant només dependrà del ritme d'entrada d'energia al rang i de la viscositat, i per tant tindrà la forma:

$$E = E(k, \varepsilon, \nu) \quad (1.22)$$

En general, per obtenir l'espectre 1.22 és necessari establir clausures o lligams entre aquest i l'espectre de transferència T per poder resoldre 1.14a, tema que tracten, per exemple, Hinze (1975) i Chasnov (1998). En el subapartat 1.6.1 analitzarem amb més detall l'espectre de l'energia en el rang d'equilibri universal.

El que hem dit en aquest apartat per a l'espectre tridimensional de l'energia és també aplicable a l'espectre de l'escalar, amb dues diferències. La primera és que entre el rang inercial i el dissipatiu apareix (en el cas de l'aigua) un subrang viscós convectiu. La segona és la dependència (1.22), ja que l'espectre de l'escalar E_θ dependrà de k , ε i ν , juntament amb la dissipació de variància de l'escalar ε_θ i la difusivitat κ_θ , tal com presentarem en el subapartat 1.6.2.

1.6.1. Espectre tridimensional de l'energia

En la figura 1.4 s'esquematitzen els diferents subrangs dins el rang d'equilibri universal, per a l'espectre tridimensional de l'energia i per al de l'escalar, que analitzarem més endavant, en el subapartat 1.6.2. Dins el rang d'equilibri universal, si ens restringim a nombres d'ona prou inferiors a k_d , en què la dissipació no té prou importància, apareix el subrang inercial (esmentat abans en la figura 1.3), en què l'espectre energètic no dependrà de la viscositat (responsable de la dissipació), sinó únicament del nombre d'ona i del ritme d'entrada d'energia ε , és a dir $E(k, \varepsilon)$. Per a aquest rang, i seguint arguments dimensionals, trobem l'espectre de Kolmogorov (1941), que té la forma següent:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \tag{1.23}$$

on C és l'anomenada *constant tridimensional de Kolmogorov*. El seu valor ha estat refinat al llarg de les últimes dècades, i actualment s'accepta 1.6 (Gregg, 1999). A causa de la dependència d'aquest espectre amb $k^{-5/3}$, la fórmula 1.23 es coneix com la llei dels $-5/3$.

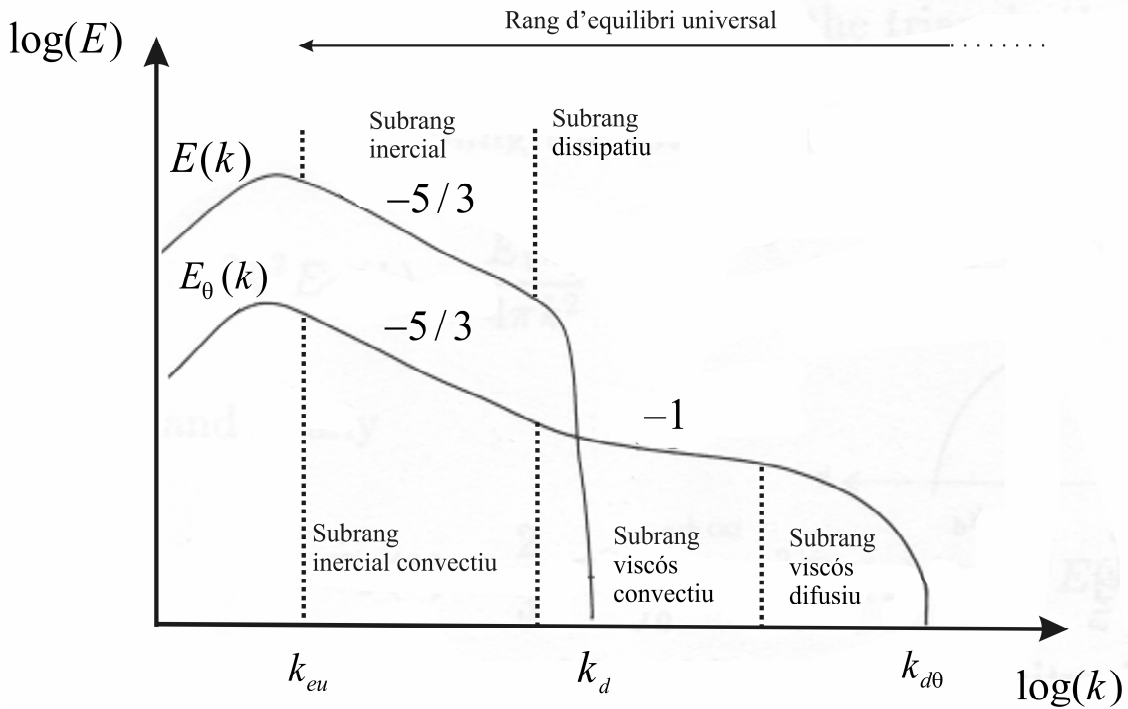


Figura 1.4. Rang d'equilibri universal per a l'espectre tridimensional de l'energia i del camp escalar Θ amb les diferents dependències potencials.

Per a nombres d'ones de l'ordre de k_d , la dissipació pren importància i llavors es parla del *subrang dissipatiu* (figura 1.4). En aquest subrang és usual donar l'espectre tridimensional de l'energia en forma adimensional $\hat{E}(\hat{k})$, on \hat{k} és alhora el nombre d'ona adimensional (Hinze, 1975 i Chasnov, 1998), de manera que:

$$E(k) = (\varepsilon\nu^5)^{1/4} \hat{E}(\hat{k}) \quad , \quad k = \hat{k}k_d \tag{1.24}$$

on $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ [rad/m] és l'anomenat *nombre d'ona de Kolmogorov*, que es relaciona amb l'escala de Kolmogorov, $\eta = 2\pi/k_d$ (amb unitats de longitud). Considerant 1.16a, tenim que l'espectre adimensional definit a 1.24 compleix la condició següent:

$$2 \int_0^{\infty} \hat{k}^2 \hat{E}(\hat{k}) d\hat{k} = 1 \quad (1.25)$$

Actualment, per als subrang inercial i dissipatiu, el model d'espectre de Panchev i Kesich (1969) és el més acceptat i utilitzat. En la forma adimensional és:

$$\hat{E}(\hat{k}) = \left(\left(\frac{2}{3\alpha^2} \right)^{1/3} \hat{k}^{-5/3} + \frac{1}{\alpha} \hat{k}^{-1} \right) \exp \left(-\frac{3}{2} \left(\frac{2}{3\alpha^2} \right)^{1/3} \hat{k}^{4/3} - \frac{1}{\alpha} \hat{k}^2 \right) \quad (1.26)$$

Aquest espectre, dependent de la constant α , per a nombres d'ona prou petits recupera la forma de l'espectre en el rang inercial (1.23) —adimensionalitzat—, amb la constant tridimensional de Kolmogorov, $C = (2/3\alpha^2)^{1/3}$. L'espectre 1.26 té com a asímptotes l'espectre de Pao (1965) i el de Saffman (1963), aplicables, respectivament, als nombres d'ona petits i grans del rang d'equilibri universal.

1.6.2. Espectre tridimensional de l'escalar

En el rang d'equilibri universal, en què la turbulència és activa, es pot considerar que l'escalar té un comportament passiu i és arrossegat pel camp turbulent de la velocitat. Així doncs, si bé arguments semblants als que s'han fet en el cas de l'espectre energètic indiquen la dependència de l'espectre de l'escalar E_{θ} a ε_{θ} i κ , aquest també dependrà dels paràmetres de l'espectre del camp de velocitats, és a dir, ε i ν , de manera que:

$$E_{\theta} = E_{\theta}(k, \varepsilon, \varepsilon_{\theta}, \nu, \kappa) \quad (1.27)$$

Llavors, l'espectre de l'escalar en el rang inercial, anomenat de fet subrang inercial convectiu, pren la forma de l'anomenat *espectre d'Obukhov* (1949), que, igual que l'espectre de l'energia, també segueix la llei dels $-5/3$ (reflectit en la figura 1.4):

$$E_{\theta} = C_{\theta} \varepsilon_{\theta} \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad (1.28)$$

on C_{θ} és una altra constant tridimensional.

En el cas de camps escalars en què $\kappa < \nu$, com la temperatura en un medi aquàtic, en què l'anomenat nombre de Prandtl val $Pr = \nu / \kappa_T \approx 7$ (per a temperatures de $20^{\circ}C$), en

l'espectre de l'escalar, i per a nombres d'ona superiors als del subrang inercial convectiu, apareix també l'anomenat *subrang viscos convectiu*, en què l'espectre depèn de k a la potència -1 , i s'escriu com (Batchelor, 1959):

$$E_\theta = q \nu^{1/2} \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/2} k^{-1} \quad (1.29)$$

on q és una constant anomenada *paràmetre turbulent*. En les escales corresponents a aquest rang les fluctuacions de velocitat ja han desaparegut (s'han difós) per efectes de la viscositat, però, atès que $\kappa < \nu$, existeixen encara fluctuacions tèrmiques (microfronts tèrmics). Aquest espectre també s'ha representat en la figura 1.4, on també s'indica el nombre d'ona $k_{d\theta}$, sobre el qual, aproximadament, es produeix el màxim de l'espectre de dissipació de l'escalar D_θ . Finalment, en la mateixa figura també es contemplen les escales més petites de l'espectre tèrmic, E_θ , on els efectes de la viscositat i la difusivitat són prou eficaços, això és, el subrang viscos difusiu.

En els rangs viscos convectiu i viscos difusiu es considera que el camp de velocitat produeix un transport advection sobre l'escalar, i el paràmetre que el controla és $(\varepsilon/\nu)^{1/2}$ (Batchelor, 1959). Així doncs, la dependència de l'espectre de l'escalar a ε i ν serà per mitjà del paràmetre esmentat. De la mateixa manera que hem fet abans amb l'espectre de l'energia, l'espectre tridimensional d'un camp escalar es pot adimensionalitzar com a $\hat{E}_\theta(\hat{k})$ en la forma:

$$E_\theta = \varepsilon_\theta \kappa^{1/2} \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{3/4} \hat{E}_\theta, \quad k = k_{d\theta} \hat{k} \quad (1.30)$$

On $k_{d\theta} = (\varepsilon/\nu\kappa^2)^{1/4}$ és l'anomenat *nombre d'ona de Batchelor*, que caracteritza, tal com ja hem dit, l'ordre de magnitud de l'escala espacial en què es produeix la dissipació del camp escalar amb $\eta_{d\theta} = 2\pi/k_{d\theta}$ (amb unitats de longitud). Considerant 1.16b, l'espectre no dimensional definit a 1.36 compleix que:

$$2 \int_0^\infty \hat{k}^2 \hat{E}_\theta(\hat{k}) d\hat{k} = 1 \quad (1.31)$$

Pel que fa a la forma concreta de $\hat{E}_\theta(\hat{k})$, tradicionalment s'ha utilitzat l'anomenat *espectre de Batchelor* (1959) en els rangs viscos convectiu i viscos difusiu (vegeu, per exemple, Gibson, 1963), encara que alguns autors (Nash et al., 2002 i Roget et al., 2006) han fet notar que l'espectre de Kraichnan (1968 i 1974) té una validació experimental

més important. L'espectre tridimensional de Batchelor (1959) té la dependència següent:

$$\hat{E}_\theta(\hat{k}) = q\hat{k}^{-1} \exp(-q\hat{k}^2) \quad (1.32)$$

on el paràmetre turbulent q és el mateix que apareix a 1.29, i el seu valor determinat experimentalment és $q_{Bat} = 3.9$ (Nash i Moum, 2002). L'espectre de Kraichnan (1968), en canvi, té la forma següent:

$$\hat{E}_\theta(\hat{k}) = q \left(\frac{1 + \sqrt{6q\hat{k}}}{\hat{k}} \right) \exp(-\sqrt{6q\hat{k}}) \quad (1.33)$$

Si el paràmetre turbulent q fos el mateix en els dos models d'espectre, el comportament de tots dos en les escales viscoses convectives seria idèntic. Però, tal com s'observa a Nash et al. (2002), a partir del treball amb els camps escalars tèrmics i la salinitat, el millor valor per a l'espectre universal (1.33) és el que dona $q_{Kraich} = 7.5$. Així mateix, l'espectre de Kraichnan s'ajusta més als resultats experimentals que no pas el de Batchelor. De totes maneres, considerarem amb cautela aquesta afirmació fins que no disposem de més estudis experimentals futurs que la confirmin.

En la figura 1.5.a s'han representat l'espectre de l'energia $E(k)$ de Panchev i Kesich (1969) i els espectres per a l'escalar $E_\theta(k)$ de Batchelor (1959) i Kraichnan (1968). El nombre d'ona s'ha adimensionalitzat seguint 1.24, això és, $\hat{k} = 1$ equival al nombre d'ona de Kolmogorov, k_d . Així mateix, en la figura 1.5.b es representen els espectres adimensionalitzats de dissipació de l'energia i de l'escalar, $2\hat{E}\hat{k}^2$ i $2\hat{E}_\theta\hat{k}^2$. El nombre d'ona en què es produeix el màxim de l'espectre de dissipació de l'energia veiem que és $0.2k_d$, això és, una mica més petit que el nombre d'ona de Kolmogorov. Així mateix, les propietats moleculars fixen el nombre d'ona de Batchelor a $k_{d\theta} = 2.65k_d$. Això és, el fet que la difusivitat de l'escalar sigui inferior a la viscositat cinemàtica fa que l'espectre de l'escalar arribi fins a escales més petites que el de l'energia. El fet de considerar el paràmetre turbulent q diferent en els models d'espectre de Batchelor i Kraichnan, tal com sembla que prediuen els experiments, fa que aquests no coincideixin ni tan sols en les escales grosses de rang viscos convectiu. Veiem, a més, que els màxims dels corresponents espectres de dissipació es donen per a nombres d'ona

lleugerament inferiors al nombre d'ona de Batchelor $k_{d\theta}$, a $0.36k_{d\theta}$ i $0.24k_{d\theta}$, per a Batchelor i Kraichnan, respectivament.

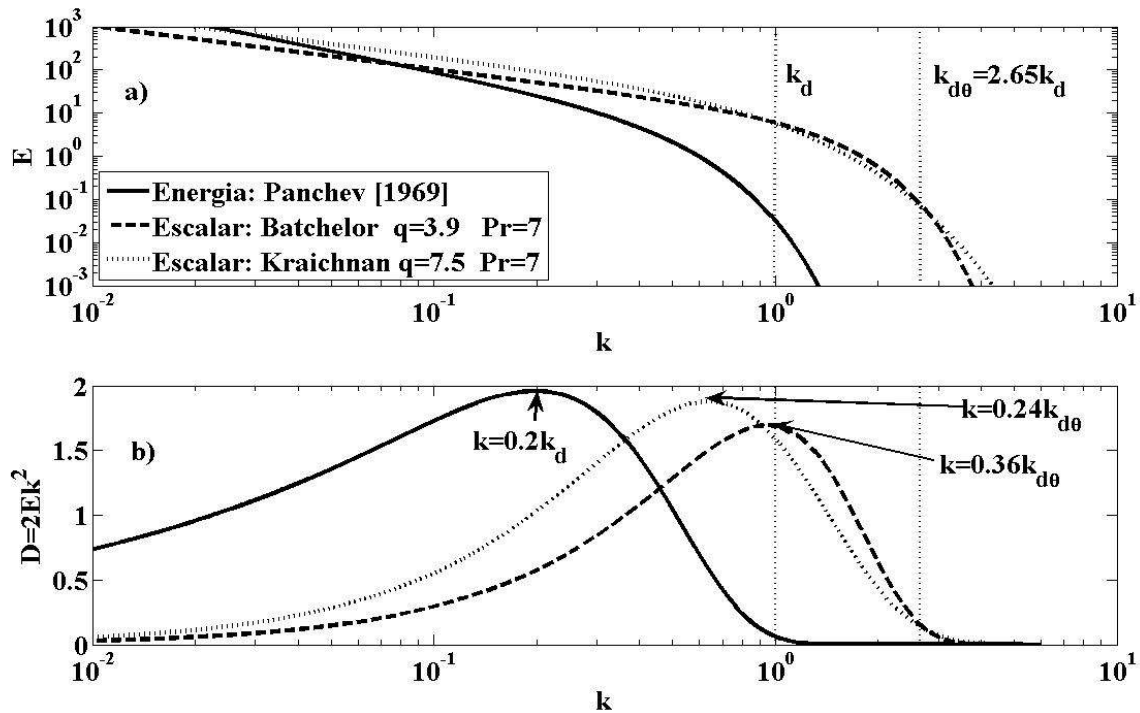


Figura 1.5. *a)* Espectres adimensionals (escala logarítmica) de l'energia i de la variància de l'escalar en funció del nombre d'ona (escala logarítmica) adimensionalitzat seguint 1.24. En el cas de l'escalar es representen els models d'espectre de Batchelor (1959) i Kraichnan (1968) per al cas tèrmic al voltant de 20°C ($\text{Pr} = \nu/\kappa = 7$). Es representen també els nombres d'ona de Kolmogorov (k_d) i de Batchelor ($k_{d\theta}$). *b)* Espectres adimensionals de dissipació (escala lineal). Veiem que els valors dels nombres d'ona de Kolmogorov i Batchelor, k_d i $k_{d\theta}$, són una mica més grans (sense arribar a una raó 10) que els màxims dels espectres de dissipació adimensionals.

1.7. Turbulència isòtropa. Espectres unidimensionals

En aquest apartat tornarem a les correlacions entre dos punts, del tipus 1.9, i sense perdre generalitat considerarem els desplaçaments relatius al llarg de la direcció z (x_3), de manera que $\vec{r} = (0, 0, r_3)$. La transformada de Fourier d'aquestes correlacions, respecte a r_3 , seran els anomenats *espectres unidimensionals*, i dependran només del

nombre d'ona unidimensional k_3 . Aquí revisarem com es poden obtenir aquests espectres, a partir dels tridimensionals, i ho aplicarem al rang d'equilibri universal, quan les condicions són d'isotropia estadística. L'interès dels espectres unidimensionals rau en el fet que sovint les nostres mesures són sèries espacials de dades unidimensionals, obtingudes en travessar rectilíniament una regió del fluid, aplicant l'anomenada *hipòtesi de camp congelat o de Taylor*. Aquesta hipòtesi, que comentarem amb detall en el capítol 3, considera que, travessant prou ràpidament la regió del fluid que volem estudiar, els diferents camps no experimentaran variacions apreciables, durant el temps de transsecte, això és, els veurem "congelats".

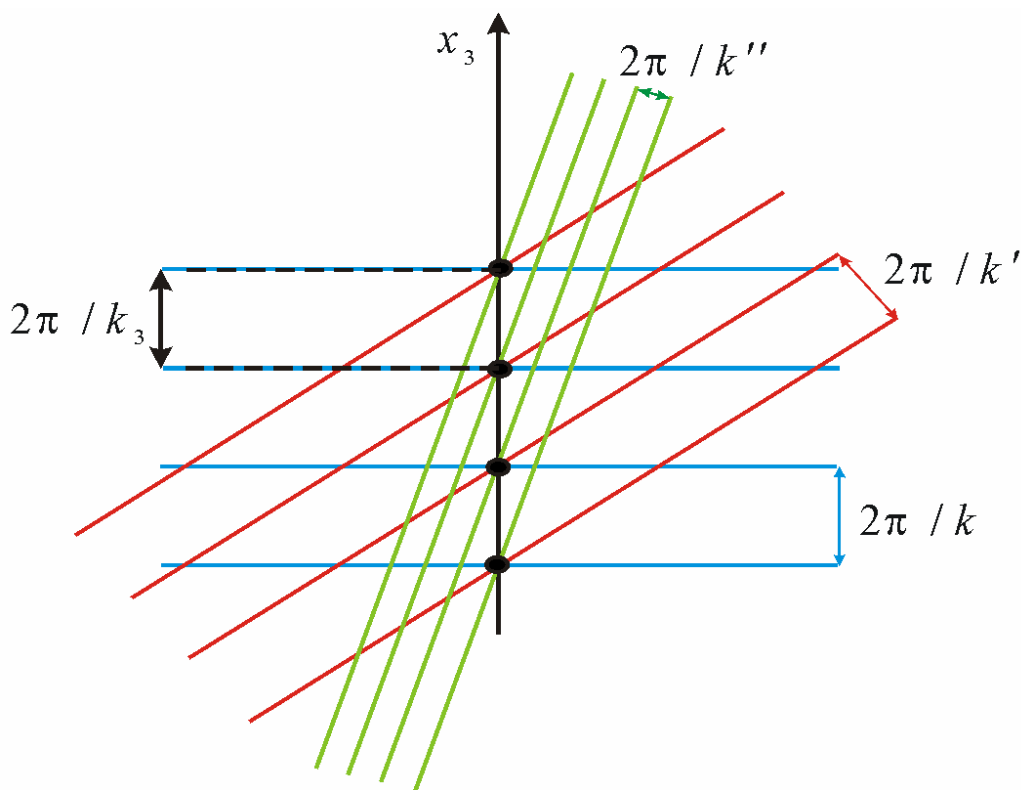


Figura 1.6. Representació de les longituds d'ona $\lambda = 2\pi / k$ lligades a diferents nombres d'ona tridimensionals, k (blau), k' (vermell) i k'' (verd), que participen en un nombre d'ona unidimensional k_3 generat al llarg de la direcció de mesura x_3 .

Per il·lustrar la idea de l'espectre unidimensional en un espai de més dimensions, en la figura 1.6 en presentem un exemple. En aquesta figura, considerant com a exemple l'espai bidimensional, s'ha establert com a direcció hipotètica de mesura la direcció x_3 (fletxa vertical ascendent), la qual estarà associada al nombre d'ona unidimensional k_3 ,

que ens servirà de variable d'un espectre unidimensional. Si fixem un valor de k_3 (fronts d'ona horitzontals i de color blau), el valor corresponent de l'espectre unidimensional tindrà la contribució de diferents nombres d'ona bidimensionals, amb diferents direccions, però que de fet tots compleixen $k \geq k_3$. En la figura s'han representat tres nombres d'ona bidimensionals amb mòduls k (blau), k' (vermell) i k'' (verd) i amb direccions diferents, els quals es projecten amb el mateix nombre d'ona k_3 sobre la direcció x_3 , i per tant contribueixen en l'energia corresponent a k_3 . Així, en general, l'espectre unidimensional (dependent de k_3) es podrà calcular a partir d'una integral, que implica l'espectre tridimensional, i que s'estendrà entre els valors de k_3 i ∞ .

Si ens fixem en el cas de la velocitat, a partir de la definició del seu tensor de correlació (1.9a), podem definir les correlacions longitudinal $f(r_3)$ i transversal $g(r_3)$ respecte a la direcció r_3 , respectivament, com a:

$$f(r_3) \equiv (R_{33}(\vec{r}))_{\vec{r}=(0,0,r_3)} = \overline{u_3(x_3)u_3(x_3 + r_3)} \quad (1.34a)$$

$$g(r_3) \equiv (R_{11}(\vec{r}))_{\vec{r}=(0,0,r_3)} = \overline{u_1(x_3)u_1(x_3 + r_3)} \quad (1.34b)$$

En condicions d'isotropia, el tensor de correlació de velocitats (1.9a), i de fet qualsevol tensor d'ordre 2 dependent de \vec{r} , pren la forma següent (Hinze, 1975):

$$R_{lm}(r) = \overline{u_l(\vec{x})u_m(\vec{x} + \vec{r})} = C(r)\delta_{lm} + D(r)r_l r_m \quad (1.35)$$

On les funcions C i D depenen del mòdul de la distància relativa r . Introduint les definicions de les correlacions longitudinal i transversal (1.34) en l'expressió isòtropa (1.35), trobem la dependència del tensor de correlació R_{lm} en les funcions $f(r)$ i $g(r)$:

$$R_{lm}(\vec{r}) = g(r)\delta_{lm} + \frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_l r_m \quad (1.36)$$

Per tant, qualsevol de les correlacions unidimensionals que es poden formar a partir de les components de la velocitat turbulenta, en condicions isòtrops, depèn de les funcions $f(r)$ i $g(r)$, o bé és zero. Així, i com a exemple, a continuació es mostren diferents correlacions unidimensionals calculades a partir d'1.36:

$$(R_{13}(\vec{r}))_{\vec{r}=(0,0,r_3)} = \overline{u_1(x_3)u_3(x_3 + r_3)} = 0 \quad (1.37a)$$

$$(R_{12}(\vec{r}))_{\vec{r}=(0,0,r_3)} = \overline{u_1(x_3)u_2(x_3 + r_3)} = 0 \quad (1.37b)$$

$$(R_{11}(\vec{r}))_{\vec{r}=(r_1,0,0)} = \overline{u_1(x_1)u_1(x_1+r_1)} = f(r_1) \quad (1.37c)$$

$$(R_{22}(\vec{r}))_{\vec{r}=(r_1,0,0)} = \overline{u_2(x_1)u_2(x_1+r_1)} = g(r_1) \quad (1.37d)$$

Tornant a l'expressió isòtropa (1.35), si fem la transformada de Fourier de $R_{lm}(\vec{r})$ per trobar $E_{lm}(\vec{k})$ —tal com es defineix a 1.10a—, trobem que aquest últim tensor també pren una forma isòtropa en línia amb 1.35, això és $A(k)\delta_{lm} + B(k)k_l k_m$, sent A i B funcions del mòdul del nombre d'ona. Utilitzant la definició 1.12a de l'espectre tridimensional $E(k)$, en l'apartat B.4 trobem la forma explícita de A i B , i per tant $E_{lm}(\vec{k})$, que pren la forma següent:

$$E_{lm}(\vec{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{k^2} \right) \quad (1.38)$$

Les transformades de Fourier de les correlacions longitudinal i transversal (1.34) són els anomenats *espectres unidimensionals longitudinal* $F_{long}(k_3)$ i *transversal* $F_{trans}(k_3)$, els quals es defineixen a continuació com a:

$$F_{long}(k_3) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr_3 f(r_3) \exp(-i k_3 r_3) \quad (1.39a)$$

$$f(r_3) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 F_{long}(k_3) \exp(i k_3 r_3)$$

$$F_{trans}(k_3) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr_3 g(r_3) \exp(-i k_3 r_3) \quad (1.39b)$$

$$g(r_3) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 F_{trans}(k_3) \exp(i k_3 r_3)$$

on els factors numèrics de davant de les integrals anteriors fan que les normalitzacions dels espectres unidimensionals siguin:

$$\overline{u_3^2} = \int_0^{\infty} dk_3 F_{long}(k_3) \quad , \quad \overline{u_1^2} = \int_0^{\infty} dk_3 F_{trans}(k_3) \quad (1.40)$$

Aquestes normalitzacions s'han obtingut considerant les definicions de les correlacions transversal i longitudinal (1.34), i pel que fa als límits d'integració, s'ha tingut en compte que les correlacions unidimensionals són funcions parells (apèndix B).

Finalment, el lligam entre l'espectre tridimensional de l'energia i els espectres unidimensionals, tal com es demostra en l'apartat B.4, a partir d'1.38 és:

$$F_{long}(k_3) = \int_{k_3}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \left(1 - \frac{k_3^2}{k^2}\right) dk \quad (1.41a)$$

$$F_{trans}(k_3) = \frac{1}{2} \int_{k_3}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \left(1 + \frac{k_3^2}{k^2}\right) dk \quad (1.41b)$$

on, tal com s'ha comentat al principi d'aquest apartat, els límits d'integració van de k_3 a ∞ . Aquestes expressions són molt importants per a aquest treball, ja que són les que ens permeten comparar les dades experimentals amb els models teòrics d'espectre tridimensional.

Respecte a la correlació del camp escalar genèric Θ definida a 1.9b, en condicions d'isotropia pren la forma següent, això és, depèn només del mòdul de \vec{r} :

$$R_{\theta\theta}(r) = \overline{\theta(\vec{x})\theta(\vec{x} + \vec{r})} \quad (1.42)$$

La transformada de Fourier d'aquesta correlació —calculada amb 1.10b— depèn només del mòdul del nombre d'ona, això és, pren la forma $E_{\theta\theta}(k)$. Utilitzant la definició de l'espectre tridimensional de la variància, $E_{\theta}(k)$, donada a 1.12b, i recordant que la integral de tot l'angle sòlid és igual a $4\pi k^2$, trobem:

$$E_{\theta}(k) = \oint d\Omega_k E_{\theta\theta}(k) = 4\pi k^2 E_{\theta\theta}(k) \quad (1.43)$$

Ja que sovint mesurarem els camps escalars efectuant transsectes unidimensionals, serà interessant definir la correlació unidimensional d'un camp escalar genèric Θ :

$$f_{\theta}(r_3) = (R_{\theta\theta}(\vec{r}))_{\vec{r}=(0,0,r_3)} = \overline{\theta(x_3)\theta(x_3 + r_3)} \quad (1.44)$$

I la seva transformada de Fourier és l'espectre unidimensional del camp escalar $F_{\theta}(k_3)$:

$$F_{\theta}(k_3) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr_3 f_{\theta}(r_3) \exp(-i k_3 r_3) \quad (1.45)$$

$$f_{\theta}(r_3) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 F_{\theta}(k_3) \exp(i k_3 r_3)$$

De manera semblant a com hem fet abans amb els espectres longitudinal i transversal, podem obtenir la condició de normalització de l'espectre unidimensional de l'escalar a partir d'1.44 i 1.45:

$$\overline{\theta^2} = \int_0^{\infty} dk_3 F_{\theta}(k_3) \quad (1.46)$$

I tal com es demostra en l'apèndix B (apartat B.4), el lligam entre l'espectre unidimensional i tridimensional és:

$$F_{\theta}(k_3) = \int_{k_3}^{\infty} \frac{E_{\theta}(k)}{k} dk \quad (1.47)$$

En el cas del model tridimensional de Panchev i Kesich (1969), els espectres unidimensionals de la velocitat, això és 1.41, no tenen solució analítica, i per tant s'han de resoldre numèricament. En el capítol 3 farem una aproximació analítica per a l'espectre transversal, i més concretament per a l'espectre de cisalla, definit en el pròxim apartat. L'espectre de cisalla, directament relacionat amb el transversal de la velocitat, és de fet el que podem obtenir amb l'instrumental utilitzat en aquest treball (capítol 3). Respecte a l'espectre de l'escalar —el qual també podem calcular experimentalment—, l'expressió 1.47 sí que té solució analítica, tant en el cas de l'espectre de Batchelor (1959) com en el de Kraichnan (1968), i els corresponents espectres unidimensionals es mostraran en el capítol 3.

1.8. Espectre del cisallament i del gradient de l'escalar

De vegades les dades que obtenim experimentalment corresponen a la derivada vertical d'alguna magnitud. I si aquesta magnitud és la component horitzontal de la velocitat, serà convenient treballar amb la correlació del cisallament, definida en la forma:

$$f_{cis}(r_3) = \left(\frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_3} \frac{\partial u_1(\vec{x}')}{\partial x'_3} \right)_{\vec{r}=(0,0,r_3)} \quad (1.48)$$

La transformada de Fourier d'1.48 defineix l'espectre unidimensional del cisallament $F_{cis}(k_3)$:

$$F_{cis}(k_3) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr_3 f_{cis}(r_3) \exp(-i k_3 r_3) \quad (1.49)$$

$$f_{cis}(r_3) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 F_{cis}(k_3) \exp(i k_3 r_3)$$

Es pot demostrar, tal com es fa en l'apartat B.4, el lligam entre l'espectre de cisallament i l'espectre transversal de la velocitat:

$$F_{cis}(k_3) = k_3^2 F_{trans}(k_3) \quad (1.50)$$

Amb 1.48 i la segona línia d'1.49, avaluades a $r_3 = 0$, considerant que l'espectre del cisallament és una funció real i parell, trobem la condició de normalització:

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2} = \int_0^{\infty} F_{cis}(k_3) dk_3 \quad (1.51)$$

A partir de l'espectre del cisallament (en condicions isòtropes) també es pot trobar la dissipació d'energia cinètica turbulenta (es demostra en l'apartat B.4):

$$\varepsilon = \frac{15}{2} \nu \int_0^{\infty} F_{cis}(k_3) dk_3 \quad (1.52)$$

Pel que fa al camp escalar genèric Θ , i tal com passava amb el cas de la velocitat (cisallament), també podem definir la correlació unidimensional del gradient com a:

$$f_{\partial\theta}(r_3) = \left(\frac{\partial\theta(\vec{x})}{\partial x_3} \frac{\partial\theta(\vec{x}')}{\partial x_3} \right)_{\vec{r}=(0,0,r_3)} \quad (1.53)$$

I el corresponent espectre unidimensional del gradient de l'escalar $F_{\partial\theta}(k_3)$ es defineix de manera semblant a com s'ha definit l'espectre del cisallament a 1.49 —amb una transformada de Fourier—, de manera que la relació entre F_{θ} i $F_{\partial\theta}$ serà semblant a 1.50:

$$F_{\partial\theta}(k_3) = k_3^2 F_{\theta}(k_3) \quad (1.54)$$

I pel que fa la seva la normalització, tenim que:

$$\overline{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\right)^2} = \int_0^{\infty} F_{\partial\theta}(k_3) dk_3 \quad (1.55)$$

Llavors, en condicions d'isotropia, és a dir, quan $\overline{(\partial\theta/\partial x_1)^2} = \overline{(\partial\theta/\partial x_2)^2} = \overline{(\partial\theta/\partial x_3)^2}$, si utilitzem la definició de ε_θ de la taula 1.3, a partir d'1.55 trobem que la dissipació de variància és:

$$\varepsilon_\theta = 6\kappa_\theta \overline{(\partial\theta/\partial x_3)^2} = 6\kappa_\theta \int_0^\infty F_{\partial\theta}(k_3) dk_3 \quad (1.56)$$

Aquesta expressió serà utilitzada al capítol 3 per tal de trobar la dissipació de variància tèrmica a partir de l'espectre unidimensional de la temperatura.

1.9. Bibliografia

- Batchelor, G. K. (1959), "Small-scale variation of convected quantities like temperature in a turbulent fluid. Part 1: general discussion and the case of small conductivity", *Journal of Fluid Mechanics* 5, 113–133.
- Batchelor, G. K. (1982), *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press.
- Baumert, H. Z., J. H. Simpson i J. Sündermann (2005), *Marine turbulence: theories, observations and models*, Cambridge University Press.
- Chasnov, J. R. (1998), "The viscous-convective subrange in nonstationary turbulence", *Physics of Fluids*, 10(5), 1191-1205.
- Gibson, C. H. i Schwarz, W. H. (1963), "The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields", *Journal of Fluid Mechanics*, 13(3), 365-384.
- Gregg, M. C. (1999), "Uncertainties and limitations in measuring ϵ and χ ", *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 16(11), 1483-1490.
- Hinze, J. O. (1975), *Turbulence*, Mc Graw-Hill.
- Kantha, L. H., i C. A. Clayson (2000). *Small Scale Processes in Geophysical Fluid Flows*. Academic Press, 888 pp.
- Knobloch, E. (1980), "Convection in binary fluids", *Physics of Fluids*, 23(9), 1918-1920.
- Kolmogorov, A. N. (1941), "Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence", *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, 32, 16-18.

- Kraichnan, R. H. (1968), “Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence”, *Physics of Fluids*, 11, 945-953.
- Kraichnan, R. H. (1974), “Convection of a passive scalar by a quasi-uniform random straining field”, *Journal of Fluid Mechanics*, 64, 737-762.
- Kundu, P. K. (1990), *Fluid mechanics*, Academic Press
- Landau, L. D. i Lifshitz (1987), *Fluid mechanics*, Course of Theoretical Physics, Butterworth-Heinemann.
- Launder, B. E. i N. D. Sandham (2001), *Closure strategies for turbulent and transitional flows*, Cambridge University Press, 600 p.
- Lerman, A. D., D. Imboden i J. Gat (1995), *Physics and chemistry of lakes*. Springer-Verlag, Berlín.
- Lesieur, M. (1990), *Turbulence in fluids*, Kluwer Academic Publishers.
- Lumley, J. L. (1992), “Some comments on turbulence”, *Physics of Fluids*, 4(2), 203-211.
- Mathieu, S. (2000), *An introduction to turbulent flow*, Cambridge University Press.
- McComb, W. D. (1996), *The physics of fluid turbulence*, Oxford University Press.
- Nash, J. D. i J. N. Moum (2002), “Microstructure estimates of turbulent salinity flux and the dissipation spectrum of salinity”, *Journal of Physical Oceanography*, 32(8), 2312-2333.
- Obukhov, A. M. (1949), “Temperature field structure in a turbulent flow”, *Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Geog. Geofiz.* 13, 58-69.
- Panchev, S. i D. Kesich (1969), “Energy spectrum of isotropic turbulence at large wavenumbers”, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, 22, 627-630.
- Pao, Y. (1965), “Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers”, *Physics of Fluids*, 8, 1063.
- Roget, E., I. Lozovatsky, X. Sánchez i M. Figueroa (2006), “Microstructure measurements in natural waters: methodology and applications”, *Progress in Oceanography*, 70, 126-148.
- Saffman, P. G. (1963), “On the fine-scale structure of vector fields convected by a turbulent fluid”, *Journal of Fluid Mechanics*, 16, 545-572.
- Tennekes, H. i J. L. Lumley (1982), *A first course in turbulence*, MIT Press.
- Tritton, D. J. (1988), *Physical fluid dynamics*, Oxford University Press.

CAPÍTOL 2

CONVECCIÓ

2.1. INTRODUCCIÓ	50
2.2. EQUACIONS GENERALS PER A L'ESTUDI DE LA CONVECCIÓ ENTRE DUES CAPES... 54	
2.3. ESTUDI DE L'ESTABILITAT LINEAL. TIPUS D'INESTABILITATS..... 58	
2.4. CONVECCIÓ DE RAYLEIGH-BÉNARD (RB)	65
2.5. MODELS DE FLUX TÈRMIC PER CONVECCIÓ DE RB TURBULENTA..... 69	
2.6. DOBLE DIFUSIÓ EN RÈGIM DIFUSIU (DDRD)	73
2.7. MODELS DE FLUX TÈRMIC PER CONVECCIÓ DDRD	77
2.8. BIBLIOGRAFIA	83

2.1. Introducció

En general, hi ha qui es refereix a la convecció com al moviment intern en un fluid, sigui quina sigui la causa, però, més pròpiament, el terme *convecció* s'utilitza quan la força que origina el moviment és la força de flotabilitat. Per tant, la convecció es produeix en fluids en què existeixen diferències de densitat, normalment per variacions respecte a la direcció vertical de la temperatura o la composició. Així mateix, s'acostuma a caracteritzar els fluxos convectius segons el procés d'instabilitat que els origina. El cas més simple d'instabilitat convectiva és quan el fluid més dens és sobre el fluid menys dens. En sistemes aquàtics això pot ser degut, per exemple, al fet que la capa més superficial es refreda, o bé a una intrusió d'aigua salada per sobre d'aigua

dolça. En el primer cas es parla de *convecció tèrmica*, ja que és la distribució vertical de temperatura la que fa que el fluid s'instabilitzi. En el segon cas, en canvi, es parla de *convecció salina*.



Figura 2.1. Mosaic romà que reflecteix la llegenda de l'assassinat d'Arquimedes de Siracusa (287-212 a. de C.) a les mans d'un soldat romà (trobat a les restes de la ciutat d'Herculà). Arquimedes va formular el concepte de *flotabilitat* en el seu tractat *Dels cossos flotants*.

L'any 1916, John William Strutt Rayleigh (1842-1919), més conegut com a Lord Rayleigh, motivat pels estudis de Henri Bénard (1874-1939), va deduir analíticament el criteri per determinar en quines condicions un fluid escalfat per sota i refredat per sobre pot començar a tenir regions calentes i pujar (i fredes i baixar) i iniciar-se la convecció (Rayleigh, 1916). Rayleigh va trobar analíticament que quan la temperatura de la superfície inferior supera la de la superior en un cert valor crític, depenent del gruix de la capa, la viscositat i difusivitat tèrmica del fluid, aquest s'instabilitza i s'inicia la convecció tèrmica. En cas contrari, el transport de calor a través de la capa de fluid és purament difusiu i la capa es manté estable, mantenint un règim de transport de calor formalment idèntic al que tindria un sòlid.

L'any 1950 Taylor, que desconeixia el treball de Rayleigh, va arribar a les mateixes conclusions, i durant un temps el fenomen de corrents convectius va ser anomenat *inestabilitat de Taylor* (Taylor, 1950). No va ser fins a l'any 1961 que Chandrasekhar,

en el seu tractat sobre inestabilitats (Chandrasekhar, 1961), va introduir el terme *convecció* o *inestabilitat de Rayleigh-Taylor*. Avui sabem que les cel·les convectives observades per Bénard (figura 2.2) responien a un fenomen acoblat com a resultat de les forces de flotabilitat i la tensió superficial, ja que treballava amb una capa de fluid líquida en contacte amb l'aire per la part superior, i actualment és anomenada *convecció de Bénard-Marangoni* (Pearson, 1958). Tot i això, s'utilitza el terme *convecció de Rayleigh-Bénard* de manera equivalent a *convecció de Rayleigh-Taylor*. Nosaltres, seguint la tradició més estesa en oceanografia, durant aquest treball també ens referirem a la convecció de Rayleigh-Bénard, que simplificarem com a RB.

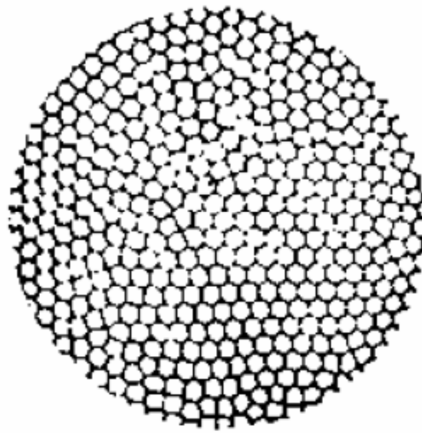


Figura 2.2. Una de les fotografies originals de Bénard, cel·les convectives amb disposició hexagonal (Bénard, 1900).

A finals de la dècada del 1950 es va trobar de manera teòrica un nou mecanisme d'inestabilitat que es va anomenar *dobla difusió*. La convecció per doble difusió apareix quan els diferents camps que afecten la densitat tenen difusivitats diferents, com per exemple la temperatura i la salinitat, i contribueixen en sentits diferents a la variació de la densitat en la vertical, fent que aquesta decreixi en altura. A diferència del cas purament tèrmic o salí, en què la convecció es produeix si la densitat decreix en fondària, el que *a priori* sorprèn en aquest nou tipus d'inestabilitat és que aquesta aparegui per densitats creixents en fondària. Quan el camp que té la difusivitat més gran (per exemple, la temperatura respecte a la salinitat) contribueix a estabilitzar la densitat, i el que té la difusivitat més petita (la sal) a inestabilitzar-la, es dona un règim convectiu particular que s'anomena de *dits de sal*, ja que el flux que es desenvolupa presenta una estructura espacial formada per dits o filaments. Nosaltres indicarem aquest règim amb la sigla DDDS (dobla difusió amb dits de sal). En el cas invers, en què el camp amb

difusivitat més gran contribueix a inestabilitzar el fluid i el de difusivitat més petita l'estabilitza, es formen un seguit de capes convectives ben barrejades i separades entre si per interfases purament difusives, i per això es parla de convecció en règim difusiu. La sigla que utilitzarem per referir-nos a aquest règim és DDRD (doble difusió amb règim difusiu). En la figura 2.3 s'han esquematitzat qualitativament les diferents configuracions del fluid, que poden donar lloc als diferents règims convectius si es compleixen els criteris quantitius de què parlarem més endavant en aquest mateix capítol. Cal comentar que en la figura s'utilitza l'exemple de la salinitat com a camp de concentració.

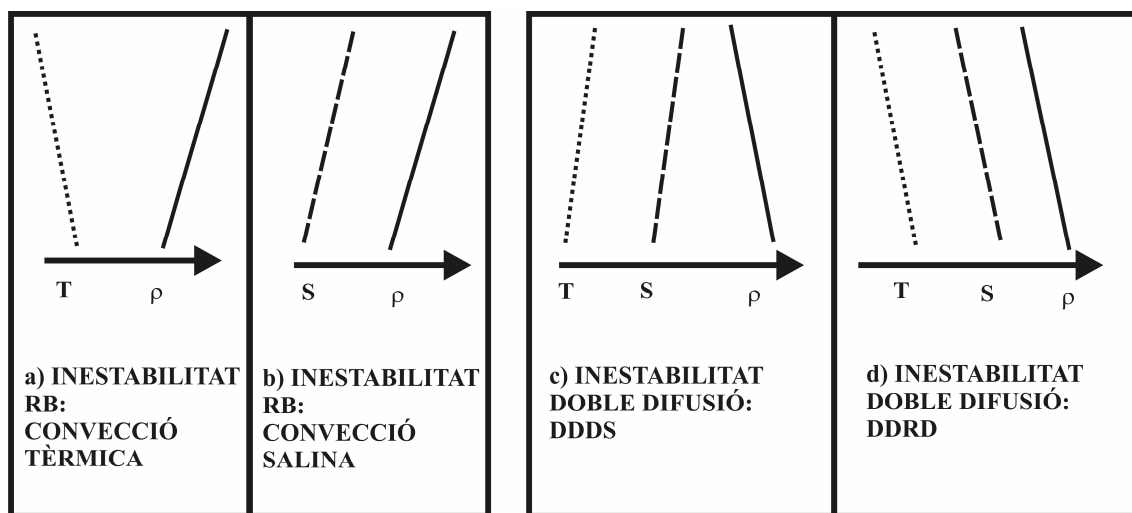


Figura 2.3. Diferents configuracions del fluid segons la distribució vertical de temperatura (T), salinitat (S) i densitat ($\rho = \rho(T, S)$), susceptibles de generar fluxos convectius en els règims comentats en el text; *a* i *b* corresponen a les inestabilitats de RB purament tèrmica i salina, *c* correspon a la doble difusió en règim de dits de sal o DDDS, i *d* a la doble difusió en règim difusiu o DDRD.

Històricament, el criteri per a les inestabilitats per doble difusió el va obtenir de manera teòrica Melvin Stern l'any 1960 (Stern, 1960), seguint la idea proposada per Stommel et al. (1956) sobre la font de sal perpètua. En l'article de Stern es desenvolupa a bastament el concepte de la inestabilitat per DDDS, però el corresponent a DDRD apareixia com unes indicacions de peu de pàgina.

Avui dia ningú no dubta de la importància de la convecció tèrmica en els geofluids, tant a la capa fronterera planetària com a l'oceà (referències clàssiques podrien ser Stull, 1988 i Gill, 1982). Respecte a la convecció per doble difusió, hi ha moltes dades

experimentals en oceanografia sobre la DDDS (vegeu, per exemple, el monogràfic publicat per la Unió Geofísica Americana, Brandt i Fernando, 1995), però a l'hora de parlar sobre la DDRD les aportacions són molt escasses (Kelley et al., 2003), ja que normalment apareix en zones polars on les dificultats experimentals són importants. En llacs hi ha, sobretot, referències antigues de DDRD, com les del llac Vanda, al continent antàrtic (Hoare, 1966), i el llac africà Kivu (Newman, 1976), però recentment han aparegut nous treballs al llac Kivu (Schmid et al., 2005) i també al llac africà Nyos (Schmid et al., 2004). El treball sobre DDRD a l'estany de Banyoles que nosaltres presentem en el capítol 4 també s'ha publicat recentment (Sánchez i Roget, 2007).

En l'apartat 2.2 d'aquest capítol es presenta el formalisme general que ens permet abordar el problema de l'estabilitat d'un sistema sense moviment i estratificat. Cal dir, respecte a aquest apartat, que en escriure les equacions del fluid s'han negligit els termes difusius creuats entre la temperatura i les concentracions, com els anomenats *efectes Soret* (difusió de la concentració deguda a un gradient tèrmic) i Dufour (difusió tèrmica deguda a un gradient de concentració). Aquests efectes creuats es negligeixen habitualment en l'estudi de la DDRD en els sistemes aquàtics naturals. Una vegada introduïdes les equacions del fluid (apartat 2.2), en l'apartat 2.3 s'estudia l'estabilitat del fluid, i per tant s'obtenen les condicions en què s'iniciaran els diferents tipus de processos convectius, en particular el cas RB —estudiat amb profunditat en els apartats 2.4 i 2.5— i DDRD —estudiat en els apartats 2.6 i 2.7. Com a generalització de la DDRD, en l'apartat 2.3 també s'introdueixen els criteris d'estabilitat en el cas en què hi ha dos camps de concentració, amb difusivitats diferents però molt més petites que la corresponent a la temperatura. Aquest tipus de convecció l'anomenarem *convecció per triple difusió*.

2.2. Equacions generals per a l'estudi de la convecció entre dues capes

El problema que es considera en aquest apartat és el d'un fluid incompressible confinat entre dues superfícies paral·leles, horitzontals, infinites i amb separació d , tal com es

mostra de manera esquemàtica en la figura 2.4. Es considera que la densitat ρ depèn de la temperatura T i de la concentració de cada una de les N espècies de contaminants presents en el fluid, que indicarem igual que en el capítol 1 amb C_n ($n=1,2,\dots,N$), i que aquests camps escalars prenen valors fixats sobre les superfícies. Així, a la superfície superior amb $z = d$ la temperatura i la concentració són T_0 i $C_{n,0}$, i a la inferior, amb $z = 0$, són $T_0 + \Delta T$ i $C_{n,0} + \Delta C_n$.

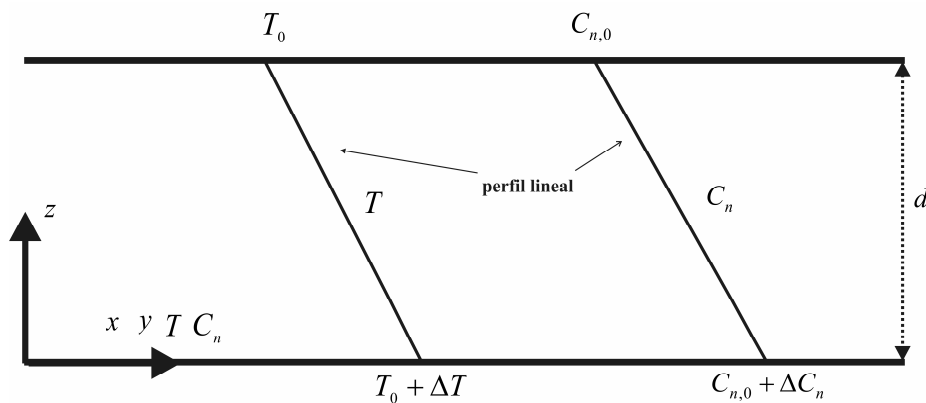


Figura 2.4. Capa de fluid de gruix d limitada per dues superfícies horitzontals de mida infinita. Les condicions de contorn per a T i C_n en les superfícies inferior i superior es mostren en la figura. La superfície inferior supera la superior en temperatura i concentració de l'espècie n en ΔT i ΔC_n . Els perfils lineals tèrmic i de concentració s'utilitzaran més endavant.

En convecció és habitual treballar amb l'espai, el temps i els diferents camps adimensionalitzats (simbolitzats amb una estrella) utilitzant els paràmetres corresponents a la geometria, condicions de contorn i propietats moleculars en la forma següent:

$$x_i^* = x_i / d, \quad t^* = t \kappa_T / d^2, \quad U_i^* = U_i d / \kappa_T, \quad T^* = (T - T_0) / \Delta T, \quad (2.1)$$

$$C_n^* = (C_n - C_{n,0}) / \Delta C_n \quad \text{i} \quad p^* = p d^2 / (\kappa_T^2 \rho_0)$$

on, seguint els mateixos criteris de notació que en el capítol 1, U_i ($i = 1,2,3$), p , ν i κ_T són, respectivament, el camp de velocitat, la pressió, la viscositat cinemàtica i la difusivitat tèrmica. Llavors, a partir de la família d'equacions del fluid 1.1, amb la densitat linealitzada 1.2 i les noves variables sense dimensions (2.1), s'obtenen les següents equacions adimensionals per a la capa de fluid:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \text{Pr} \left[Ra_T T \delta_{i3} - Ra_n C_n \delta_{i3} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \right] \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.2c)$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} + \frac{\partial C_n U_j}{\partial x_j} = \tau_n \frac{\partial^2 C_n}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.2d)$$

on, per simplicitat, s'ha prescindit del símbol estrella. τ_n són els quocients entre la difusivitat de l'espècie n i la difusivitat tèrmica, és a dir $\tau_n = \kappa_n / \kappa_T$, i en el cas concret de la salinitat, aquest quocient rep el nom de *nombre de Schmidt*. Els altres paràmetres no dimensionals que apareixen en les equacions 2.2 són el nombre de Prandtl, $\text{Pr} = \nu / \kappa_T$, i els nombres de Rayleigh tèrmic, Ra_T , i el corresponent a l'espècie n , Ra_n , que es defineixen com a:

$$Ra_T = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\kappa_T \nu} \quad , \quad Ra_n = \frac{g \beta_n \Delta C_n d^3}{\kappa_T \nu} \quad (2.3)$$

Noteu que en el denominador de Ra_n apareix κ_T , i no κ_n , i que α i β_n són els coeficients d'expansió tèrmica i contracció per a l'espècie n tal com apareixen a 1.2.

Amb les variables no dimensionals (2.1), la coordenada vertical z pren valors d'entre 0 i 1 —corresponents a la superfície inferior i superior, respectivament—, de manera que les condicions de contorn per als camps escalars són:

$$z = 0 \Rightarrow T = C_n = 1 \quad , \quad z = 1 \Rightarrow T = C_n = 0 \quad (2.4)$$

El conjunt d'equacions 2.2 es pot simplificar en el cas de dues dimensions, de manera que tots els camps dependran de les coordenades x i z , i la velocitat pren la forma $\vec{U} = (u, 0, w)$. Tanmateix, en les seccions següents, en comptes de treballar amb la velocitat, s'introdueix la funció de corrent Ψ , que es defineix com a $u \equiv \partial \Psi / \partial z$, $w \equiv -\partial \Psi / \partial x$, i per tant reescriurem les equacions 2.2 en funció d'aquesta variable. Noteu que, de fet, l'existència de Ψ implica que el flux és incompressible i compleix 2.2b. La funció de corrent està lligada amb la vorticitat, definida com a $\Omega \equiv \partial w / \partial x - \partial u / \partial z$, per mitjà de l'equació de Poisson, $\Omega = -\nabla^2 \Psi$.

Llavors, i pel que fa als camps escalars T i C_n , sobre una part estacionària, que varia linealment en la vertical i que no té variacions horitzontals (perfils lineals de la figura 2.4), suposem unes fluctuacions θ i θ_n que depenen de l'espai i el temps

$$T = (1 - z) + \theta(x, z, t) \quad , \quad C_n = (1 - z) + \theta_n(x, z, t) \quad (2.5)$$

i que, d'acord amb 2.4, compleixen les següents condicions de contorn:

$$z = 0, 1 \Rightarrow \theta = \theta_n = 0 \quad (2.6)$$

En aquest formulisme, les equacions 2.2, per a una capa bidimensional de fluid, esdevenen (Turner, 1973):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + w \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \text{Pr} \left[Ra_T \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - Ra_n \frac{\partial \theta_n}{\partial x} + \nabla^2 \Omega \right] \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} - w = \nabla^2 \theta \quad (2.7b)$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_n}{\partial x} + w \frac{\partial \theta_n}{\partial z} - w = \tau_n \nabla^2 \theta_n \quad (2.7c)$$

Respecte a les condicions de contorn del camp de velocitats, tindrem que $w = 0$ per $z = 0$ i $z = 1$, és a dir, el fluid no travessa les superfícies. Aquesta condició implica que la funció de corrent pren un valor constant sobre aquestes superfícies (per exemple zero), però la velocitat tangencial u es pot ajustar a una situació sense lliscament ($u = 0$) o amb lliscament ($u \neq 0$). En el cas d'una situació sense lliscament, tenim que les condicions de contorn per a la funció corrent són:

$$\text{Sense lliscament:} \quad z = 0, 1 \Rightarrow \Psi = \partial \Psi / \partial z = 0 \quad (2.8)$$

En canvi, si consideréssim que el fluid pot lliscar sobre les superfícies limítrofes, per exemple quan treballem amb una capa de fluid que sura sobre un altre fluid bastant més dens (Kundu, 1990, p. 361), la component tangencial de la velocitat no és zero, tot i que sí que ho és el cisallament, és a dir, $\partial u / \partial z = 0$. En aquest cas, doncs, les condicions de contorn per a la funció de corrent són:

$$\text{Amb lliscament:} \quad z = 0, 1 \Rightarrow \Psi = \partial^2 \Psi / \partial z^2 = 0 \quad (2.9)$$

2.3. Estudi de l'estabilitat lineal. Tipus d'instabilitats

En aquest apartat utilitzarem les equacions 2.7, considerant el cas en què hi ha dos escalars implicats (la temperatura i una concentració C_1) i que les condicions de contorn per a la velocitat són les de lliscament (2.9). Suposem el fluid sense moviment i amb una estratificació vertical lineal determinada pels camps de temperatura i de concentració com els que es representen en la figura 2.4. Aquest estat, que és determinat per les expressions 2.5 amb $\theta = \theta_n = 0$ i per $u = w = \Omega = \Psi = 0$, en tots els punts de l'espai i el temps, compleix les equacions 2.7 de l'evolució temporal del fluid. Així mateix, el transport de massa i energia és estacionari i purament difusiu, i els fluxos tèrmic F_T i de concentració F_1 són, per tant:

$$F_T = \kappa_T \Delta T/d \quad , \quad F_1 = \kappa_1 \Delta C_1/d \quad (2.10)$$

La densitat de la superfície inferior respecte a la superior, considerant 1.2, és $\Delta\rho = \rho_0(-\alpha\Delta T + \beta_1\Delta C_1)$. En general, depenent de si $\beta\Delta C_1 > \alpha\Delta T$ o $\beta\Delta C_1 < \alpha\Delta T$, la densitat decreix o creix en altura, respectivament. El perfil de densitat corresponent a la transició entre els dos casos s'anomena *perfil neutre* (PN) i complirà que $\beta\Delta C_1 = \alpha\Delta T$, i per tant $\Delta\rho = 0$. Utilitzant les definicions 2.3 dels nombres de Rayleigh, la condició de perfil neutre es pot escriure amb la forma:

$$\text{PN} : Ra_T = Ra_1 \quad (2.11)$$

En la figura 2.5 es representa l'espai dels nombres de Rayleigh $Ra_1 - Ra_T$ i la recta corresponent al PN. Aquesta s'ha dibuixat amb vermell discontinu i s'hi han indicat les zones corresponents a $\Delta\rho < 0$ ($d\rho/dz > 0$) i $\Delta\rho > 0$ ($d\rho/dz < 0$), les quals naturalment són als costats oposats de la recta de PN. Quan $d\rho/dz > 0$ es parla d'una estratificació estàticament inestable i, quan $d\rho/dz < 0$, es diu que és estàticament estable. En la mateixa figura 2.5 s'ha indicat també quina situació concreta correspon a cada quadrant del diagrama $Ra_1 - Ra_T$. Així, el primer quadrant correspon a aigua calenta i salada a sota d'aigua freda i no salada, etc.

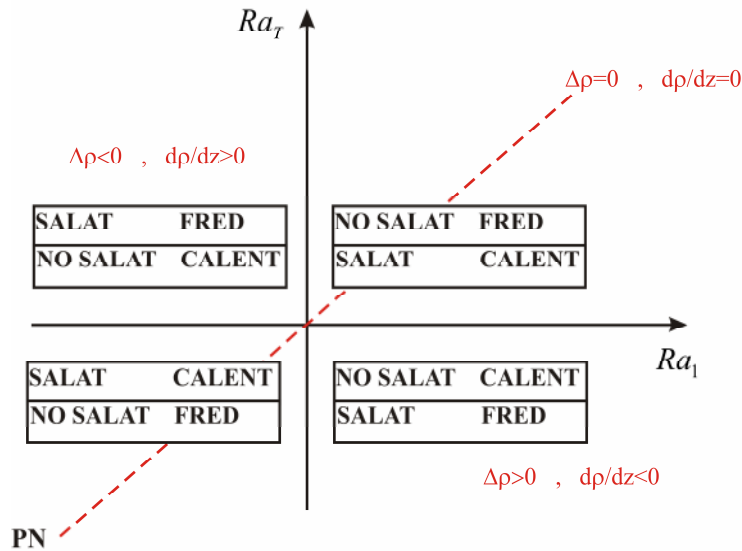


Figura 2.5. Espai dels nombres de Rayleigh, on s'explicita la variació vertical de la temperatura i la salinitat segons el quadrant, així com la recta de perfil neutre (PN), i les zones de densitat creixent en altura ($\Delta\rho < 0$) i decreixent en altura ($\Delta\rho > 0$).

Tornant a l'estat estacionari i sense moviment, esmentat al principi d'aquest apartat, si hi superposem una petita fluctuació u, v, θ, θ_1 , el sistema pot evolucionar de diferents maneres, i això és el que analitzarem seguidament. En principi, però, aquestes fluctuacions podrien esmorteir-se en el temps i llavors parlariem d'estabilitat. En canvi, si s'amplifiquessin diríem que l'estat inicial sense moviment és inestable i s'iniciaria la convecció. Considerem ara que les fluctuacions de la temperatura, la concentració i la funció corrent — θ, θ_1 i Ψ — són totes petites. En aquest cas, podem negligir els termes quadràtics de les equacions 2.7 i obtenim:

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \Psi = -Ra_T \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ra_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \quad (2.12a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.12b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau_1 \nabla^2 \right) \theta_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.12c)$$

Les solucions de 2.12, que, atesa la linealització, seran vàlides només per a temps no gaire llunyans de l'inicial, són superposicions dels anomenats *modes normals de Fourier*, que escriurem en la forma següent (Turner, 1973):

$$\Psi(x, z, t) = \Psi_0 \exp(\sigma t) \sin(\pi a x) \sin(m \pi z) \quad (2.13a)$$

$$\theta(x, z, t) = \theta_0 \exp(\sigma t) \cos(\pi a x) \sin(m \pi z) \quad (2.13b)$$

$$\theta_1(x, z, t) = \theta_{1,0} \exp(\sigma t) \cos(\pi a x) \sin(m \pi z) \quad (2.13c)$$

En aquestes solucions, el nombre d'ona horitzontal és $k_h = \pi a$, on a és qualsevol nombre real, i el nombre d'ona vertical és $k_v = m \pi$, on $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, de manera que es compleixin les condicions de contorn donades en les equacions 2.6 i 2.9, és a dir, els escalars prenen valors constants a les superfícies i el camp de velocitat és compatible amb la condició de lliscament sobre superfícies. En les solucions 2.13 l'evolució temporal és definida pel terme exponencial, que inclou un paràmetre de creixement σ , en principi un nombre complex, de manera que $\sigma = \sigma_r + i\omega$. El signe de σ_r caracteritza l'evolució de les solucions i, per tant, l'estabilitat del sistema, de manera que:

$$\text{estable: } \sigma_r < 0, \quad \text{inestable: } \sigma_r > 0 \quad (2.14)$$

Pel que fa al cas inestable, si la part imaginària del paràmetre de creixement és diferent de zero, $\omega \neq 0$, llavors parlarem d'inestabilitat oscil·latòria. En cas contrari, amb $\omega = 0$, parlarem d'inestabilitat directa. En el cas que $\sigma_r = 0$, direm que hi ha estabilitat marginal (EM) quan $\omega = 0$ i que hi ha sobreestabilitat (SE) en el cas que $\omega \neq 0$.

En la figura 2.6.a podem veure una estructura amb cel·les bidimensionals, per al cas en què el nombre d'ona vertical de les solucions imposades (2.13) és $m = 1$. D'altra banda, en la figura 2.6.b s'hi ha representat l'evolució de l'amplitud de les pertorbacions en el temps, segons la seva estabilitat.

Les diferents evolucions del sistema es poden delimitar en l'espai dels nombres de Rayleigh. Per això primer substituïrem les solucions 2.13 en les equacions linealitzades 2.12 i obtindrem un polinomi cúbic per al paràmetre de creixement σ :

$$\sigma^3 + (\text{Pr} + \tau_1 + 1)k^2 \sigma^2 + \left[(\text{Pr} + \tau_1) \text{Pr} + \tau_1 \right] k^4 - (Ra_r - Ra_1) \text{Pr} \pi^2 a^2 / k^2 \Big] \sigma + \tau_1 \text{Pr} k^6 + (Ra_1 - \tau_1 Ra_r) \text{Pr} \pi^2 a^2 = 0 \quad (2.15)$$

on $k^2 = k_h^2 + k_v^2 = \pi^2 (m^2 + a^2)$ és el quadrat del mòdul del nombre d'ona.

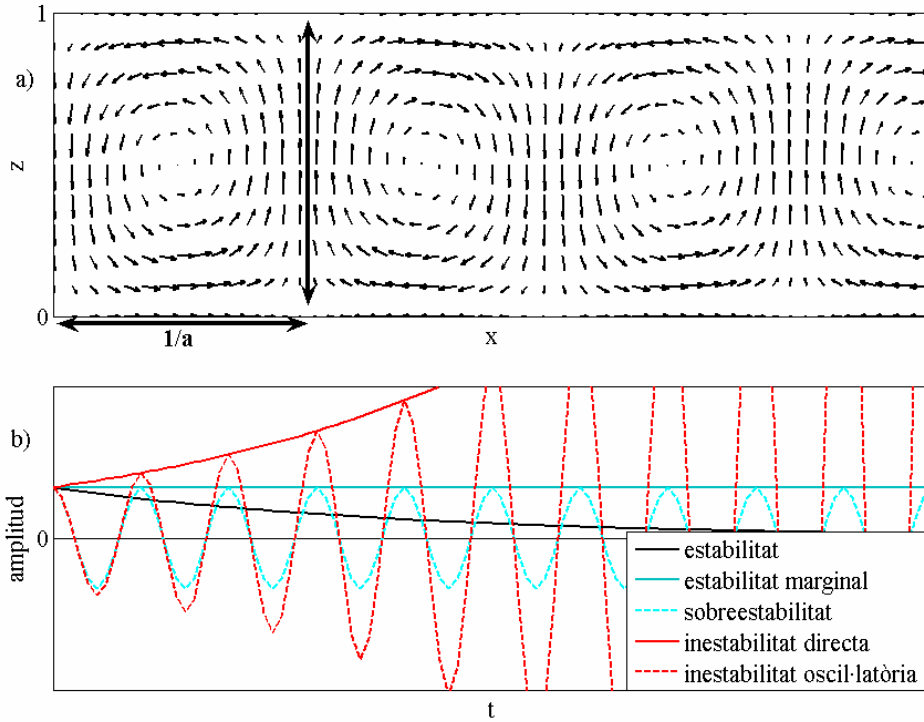


Figura 2.6. *a)* Camp de velocitat per a un instant de temps fixat pel mode $n=1$ amb una cel·la de mida (adimensional) vertical 1 i horitzontal $1/a$. *b)* Evolució temporal de l'amplitud a partir del mateix valor inicial en condicions d'estabilitat ($\sigma_r < 0$), estabilitat marginal (EM: $\sigma_r = 0$, $\omega = 0$), sobreestabilitat (SE: $\sigma_r = 0$, $\omega \neq 0$), inestabilitat directa ($\sigma_r > 0$, $\omega = 0$) i inestabilitat oscil·latòria ($\sigma_r > 0$, $\omega \neq 0$).

Si ens fixem ara en la transició entre estabilitat i inestabilitat, cal imposar, tal com hem dit, que la part real del paràmetre de creixement sigui nul·la, $\sigma_r = 0$, és a dir, $\sigma = i\omega$ (amb ω real). Llavors, si substituïm $\sigma = i\omega$ a 2.15 i després separem les parts real i imaginària, trobem que:

$$i\omega(\omega^2 - (\text{Pr} + \tau_1 \text{Pr} + \tau_1)k^4 + (Ra_T - Ra_1)\text{Pr}\pi^2 a^2 / k^2) + ((\text{Pr} + \tau_1 + 1)k^2 \omega^2 - \tau_1 \text{Pr} k^6 - (Ra_1 - \tau_1 Ra_T)\text{Pr}\pi^2 a^2) = 0 \tag{2.16}$$

Perquè es compleixi l'equació anterior s'han d'anul·lar la part real i la imaginària. Si comencem igualant a zero la part imaginària, trobem tres solucions:

$$\omega = 0 \tag{2.17}$$

$$\omega^2 = (\text{Pr} + \tau_1 \text{Pr} + \tau_1)k^4 + (Ra_1 - Ra_T)\text{Pr}\pi^2 a^2 / k^2$$

La primera solució, amb freqüència nul·la, correspon a l'EM. Si substituïm aquesta solució en la part real de 2.16 i igualem a zero, trobem, per tant, la condició d'EM per a un mode caracteritzat per m i a , el qual compleix que:

$$Ra_T - Ra_1 / \tau_1 = \pi^4 (m^2 + a^2)^3 / a^2 \quad (2.18)$$

Aquest mateix mode serà inestable quan es compleixi la desigualtat següent:

$$Ra_T - Ra_1 / \tau_1 > \pi^4 (m^2 + a^2)^3 / a^2 \quad (2.19)$$

El valor mínim de la funció $\pi^4 (m^2 + a^2)^3 / a^2$ és el que s'anomena *nombre de Rayleigh crític*, Ra_{cr} , el qual val $Ra_{cr} = 27\pi^4 / 4 = 658$ i correspon al mode $m = 1$ (o $m = -1$) i $a^2 = 1/2$. Aquest mode rep el nom de *mode més inestable*, ja que, quan es compleixi la condició $Ra_T - Ra_1 / \tau_1 > Ra_{cr}$, el mode esmentat és l'únic que sabem segur que és inestable. Així, la condició d'EM l'escriurem com a:

$$EM : Ra_T - \frac{Ra_1}{\tau_1} = Ra_{cr} \quad (2.20)$$

Cal comentar que el resultat que s'hauria trobat aplicant condicions de contorn diferents per a la velocitat hauria estat també 2.20, però amb un Ra_{cr} diferent i sempre de l'ordre 1000 (Turner, 1973).

Tal com ja s'havia fet en la figura 2.5, en la figura 2.7 s'ha tornat a representar la recta de PN (2.11), però ara també s'hi ha inclòs (de color blau) la recta d'EM, i s'hi indiquen quines regions seran estables i quines inestables (text blau). Tal com hem comentat, just travessar la recta d'EM, entrant a la regió inestable, l'únic mode inestable és el definit per $m^2 = 1$ i $a^2 = 1/2$, però a mesura que ens endinsem més en aquesta regió s'inestabilitzen més i més modes.

A partir de l'anàlisi anterior, i mirant la figura 2.7, podem obtenir com a cas particular els criteris per a l'anomenada *inestabilitat de RB*. Fixem-nos que la recta d'EM talla l'eix d'ordenades — $Ra_1 = 0$ — quan $Ra_T = Ra_{cr}$, de manera que per la convecció tèrmica pura el fet que la densitat creixi en altura no implica d'entrada que existeixi algun mode inestable, sinó que això només succeeix quan $Ra_T > Ra_{cr} \approx 1000$. Aquest criteri va ser trobat per Rayleigh (tal com hem esmentat en la introducció) i per això els nombres adimensionals que controlen l'estabilitat porten el seu nom.

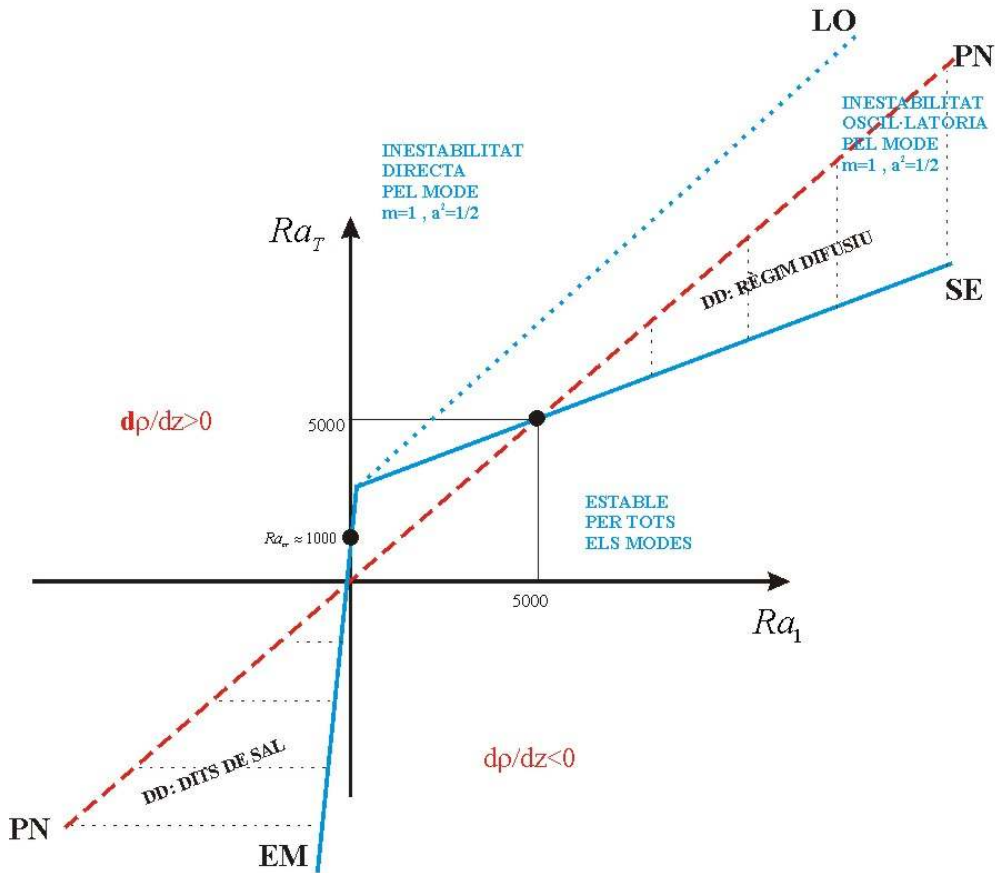


Figura 2.7. Estabilitat en funció dels nombres de Rayleigh de concentració (Ra_1) i tèrmic (Ra_T) segons es comenta en el text. És important fer notar que la figura no és a escala real.

Si tornem a 2.17, veiem que, a més del cas que acabem de discutir, encara hi ha dues solucions més, on ω és diferent de zero. A partir d'aquestes solucions i de manera anàloga a com acabem de fer per al cas de l'EM, trobarem les condicions per a la transició d'una situació estable a inestabilitat oscil·latòria. Si substituïm les dues solucions de ω diferents de zero a la part real de 2.16 i ho igualem a zero, trobem que la relació que defineix la sobreestabilitat (SE) per a un mode qualsevol, caracteritzat per m i a , és:

$$Ra_T - Ra_1 \frac{(Pr + \tau_1)}{(Pr + 1)} = (1 + \tau_1) \left(1 + \frac{\tau_1}{Pr}\right) \frac{\pi^4 (m^2 + a^2)^3}{a^2} \quad (2.21)$$

La condició d'inestabilitat es dona quan en l'expressió anterior canviem el símbol = per >. I de manera semblant a com hem determinat la recta d'EM (2.20), en el cas de 2.21 trobem que el mode més inestable correspon a minimitzar el membre de la dreta, i segueix sent el corresponent a $m^2 = 1$ i $a^2 = 1/2$, pel qual la recta de SE és:

$$SE : Ra_T - Ra_1 \frac{(\text{Pr} + \tau_1)}{(\text{Pr} + 1)} = (1 + \tau_1) \left(1 + \frac{\tau_1}{\text{Pr}} \right) Ra_{cr} \quad (2.22)$$

Quan la difusivitat de la concentració és molt més petita que la tèrmica, i per tant la raó de difusivitats $\tau_1 = \kappa_1 / \kappa_T$ pren valors molt més petits que 1, tenint en compte que en el cas de l'aigua $\text{Pr} \approx 7$, podem aproximar 2.22 amb la forma:

$$SE(\kappa_1 \ll \kappa_T) : Ra_T = \frac{\text{Pr}}{\text{Pr} + 1} Ra_1 + Ra_{cr} \quad (2.23)$$

L'aproximació que ens ha portat a 2.23 és molt raonable en el cas que parlem de sals dissoltes, ja que la difusivitat de la salinitat és unes cent vegades més petita que la difusivitat tèrmica, i per tant $\tau_1 \approx 10^{-2}$. En la figura 2.7 també s'ha representat de color blau la recta de SE —amb pendent $\text{Pr}/(\text{Pr} + 1)$ —, i la corba de LO —blau discontinua— que separa la zona d'instabilitat directa de l'oscil·latòria. Aquesta última, però, no l'hem deduït explícitament en aquest text.

Resumint, a partir de la figura 2.7 podem caracteritzar els dos tipus d'instabilitat per doble difusió en funció dels nombres de Rayleigh. Concretament, a la zona compresa entre les rectes PN i EM al tercer quadrant —zona marcada amb línies horitzontals de punts negres—, la densitat és decreixent en altura i la instabilitat és de tipus directe. Són els anomenats *dits de sal* (DDDS). En canvi, la instabilitat en què ens centrarem en aquest treball, i que tractarem amb més profunditat en l'apartat 2.4, es dona a la zona marcada amb les línies verticals de punts negres, entre PN i SE, i correspon a l'anomenat *règim difusiu* (DDR).

L'anàlisi del criteri d'estabilitat per la doble difusió que hem fet aquí es pot estendre al cas de la triple difusió (DDD) quan són tres els camps escalars que afecten la densitat. En aquest cas, una de les possibilitats és tenir dues espècies de concentració i la temperatura, amb efectes estabilitzadors i inestabilitzadors, respectivament, sobre la densitat. Si els nombres de Rayleigh corresponents a les dues espècies els escrivim com a Ra_1 i Ra_2 , llavors el perfil neutre de densitat el podem escriure de manera semblant a 2.11 com a:

$$PN_{DDD} : Ra_T = Ra_1 + Ra_2 \quad (2.24)$$

En aquest cas, si es fa l'anàlisi d'estabilitat (Griffiths, 1979a i 1979b), quan les difusivitats de les espècies siguin molt més petites que la tèrmica, la condició de sobreestabilitat que s'obté té la forma següent:

$$SE_{DDD} : Ra_T = \frac{Pr}{Pr+1}(Ra_1 + Ra_2) + Ra_{cr} \quad (2.25)$$

Noteu que les expressions 2.24 i 2.25 són iguals que 2.11 i 2.23 si canviem Ra_1 pel nombre de Rayleigh total de concentració, $Ra_1 + Ra_2$. Així doncs, per al cas de la DDRD, els resultats obtinguts per doble difusió són generalitzables al cas de triple difusió, quan τ_1 i τ_2 són força més petits que 1, canviant només Ra_1 per $Ra_1 + Ra_2$.

2.4. Convecció de Rayleigh-Bénard (RB)

Tal com hem esmentat en l'apartat anterior, quan l'únic escalar que fa variar la densitat és la temperatura ($\Delta C_1 = 0$ i $Ra_1 = 0$), la convecció s'inicia quan el nombre de Rayleigh tèrmic supera un cert valor crític de l'ordre de 1000, això és, $Ra_T > Ra_{cr}$, i en aquesta situació parlem d'inestabilitat o convecció de RB. Quan es dona aquesta circumstància, un element de fluid situat a la superfície inferior ($z=0$), de la qual és allunyat infinitesimalment, pot pujar fins a arribar a la superfície superior. En la definició de Ra_T , en l'equació 2.3, veiem que el numerador conté els termes que són favorables a la flotabilitat, i el denominador conté els efectes desfavorables: la fricció hidrodinàmica (viscositat) i el refredament per intercanvi de calor amb el medi (difusivitat tèrmica).

En aquest cas, i si suposem un sistema d'una extensió horitzontal infinita, considerarem que el camp mitjà de la temperatura, \bar{T} , depèn del temps i només de la coordenada vertical, i les fluctuacions, T' , del temps i de les tres coordenades espacials, de manera que $T = \bar{T}(z, t) + T'(\vec{x}, t)$. Llavors, en absència d'un camp mitjà de la velocitat, les expressions de l'evolució del camp mitjà (1.3c) i del flux tèrmic (1.4) s'escriuen amb la forma:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -\frac{\partial F_T}{\partial z} \quad (2.26)$$

$$F_T = -\kappa_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \overline{wT'} \quad (2.27)$$

on, tal com ja hem comentat, el primer terme del flux tèrmic F_T correspon al transport difusiu —proporcional al gradient tèrmic— i el segon al convectiu, el qual s'obté a partir de la mitjana del producte de les fluctuacions de la component vertical de la velocitat w amb les fluctuacions tèrmiques T' . Si bé en principi totes les magnituds mitjanes depenen de la coordenada vertical i del temps, quan s'assoleix l'estat estadísticament estacionari l'equació 2.26 es fa zero, i per tant el flux tèrmic (2.27) és constant al llarg de la direcció vertical.

Si ara adimensionalitzem el flux tèrmic (2.27) d'acord amb els criteris indicats a 2.1, obtenim l'anomenat *nombre de Nusselt*:

$$Nu \equiv \frac{F_T}{\kappa_T \Delta T / d} \quad (2.28)$$

el qual, d'acord amb el que hem comentat, en condicions estacionàries serà independent de z i de t , i per tant prendrà un valor constant. De fet, dependrà dels paràmetres adimensionals del sistema, que apareixen en la família d'equacions 2.2, això és, els nombres de Rayleigh tèrmic i de Prandtl. Així mateix, sembla que també hi pot haver una petita dependència en les condicions de contorn de les superfícies limítrofes, en funció de si aquestes són lliures o no, en funció de la seva rugositat (Ciliberto i Laroche, 1999) o en funció de la conductivitat tèrmica de les superfícies limítrofes en els muntatges experimentals (Brown et al., 2005). Finalment, la mida horitzontal del sistema sembla que afecta lleugerament el flux de calor (com a exemple numèric vegeu Shishkina i Wagner, 2006, i com a exemple experimental, Xu et al., 2000, i Funfschilling, 2005). Així doncs, en general, podem suposar que:

$$Nu = f(Ra_T, Pr, \Gamma, CC) \quad (2.29)$$

on $\Gamma \equiv D/d$ és l'anomenada relació d'aspecte, que es defineix com el quocient entre les dimensions horitzontal (D) i vertical (d), que caracteritzen el sistema. I CC , en l'expressió 2.29, indica les condicions de contorn. Encara que en aquest treball considerem sistemes amb extensió horitzontal infinita, a la pràctica, i ateses les limitacions tècniques, els experiments de laboratori i numèrics es fan amb Γ molt

pròximes a la unitat, exceptuant alguns casos en què s'arriba com a màxim fins a l'ordre de 10. Tanmateix, no hi ha estudis prou sòlids que determinin la dependència de Nu amb Γ i CC , i per tant en aquest treball considerarem que $Nu = f(Ra_T, Pr)$.

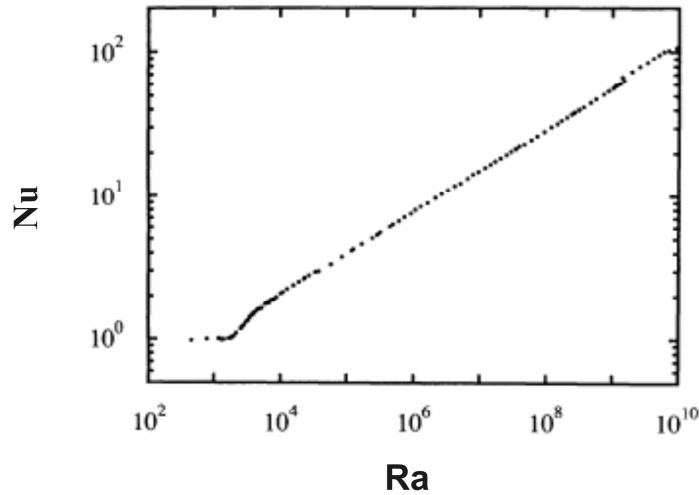


Figura 2.8. Típica dependència del nombre de Nusselt en funció del nombre de Rayleigh tèrmic. Dades experimentals extretes de Wu i Libchaber (1992).

Si bé dels diferents models de convecció turbulenta en parlarem amb més detall en l'apartat següent, en la figura 2.8 es pot veure que, en general, Nu depèn de Ra_T . Així, per a valors de Ra_T inferiors al crític (ordre 1000) es veu que $Nu = 1$, ja que en aquest cas $F_T = \kappa_T \Delta T / d$, i per tant el nombre de Nusselt (2.28) val 1. Tanmateix, una vegada $Ra_T > Ra_{cr}$, en el sistema s'estableixen cel·les estacionàries, en general tridimensionals (poden ser també rotlles bidimensionals) de mida vertical d , i de mida horitzontal semblant. A mesura que s'incrementa Ra_T , el comportament deixa de ser estacionari, tot passant per diferents transicions, i el règim passa del tipus oscil·latori al caòtic, però sempre mantenint una disposició espacial en forma de cel·les, fins que a partir de $Ra_T \approx 10^5$ (per a l'aigua) el sistema es torna turbulent i es desorganitza (Tritton, 1988). A la zona no turbulenta, això és, quan $Ra_T < 10^5$, Saltzman (1962) i Lorenz (1963) resolen el flux bidimensional com un sistema dinàmic en un espai fàsic de dimensió 3. Posteriorment, hi ha hagut altres treballs semblants per a fluxos tridimensionals en un espai fàsic de més dimensions (Tong i Gluhovsky, 2002). En l'apèndix C descrivim

breument el conegut sistema de Lorenz, que hem reproduït, i presentem alguns dels resultats numèrics que hem obtingut.

Finalment, per $Ra_T > 10^5$, ja en règim turbulent, i una vegada assolit l'estat estadísticament estacionari, el camp $\bar{T}(z)$, que inicialment era lineal —tal com es representa en la línia discontinua de la figura 2.9— pren la forma que es mostra en la mateixa figura 2.9 amb traç continu. Concretament, el perfil de temperatura presenta un gradient important localitzat a les dues zones pròximes a les superfícies limítrofes, de gruix δ_T , i a la zona central (gros de l'escaló) —predominantment convectiva— aquest gradient és molt petit (quasi no s'aprecia en la figura). Els passos intermedis d'aquesta evolució es mostren en l'apèndix C (figura C.2). Centrant-nos en les zones limítrofes, on apareixen gradients importants de la temperatura, això és, a les superfícies amb $z = 0, d$, la component normal de la velocitat és nul·la i el flux tèrmic (2.27) és purament difusiu; per tant, el nombre de Nusselt (2.28) pren la forma següent:

$$Nu = \frac{-\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right)_{z=0,d}}{\Delta T / d} \tag{2.30}$$

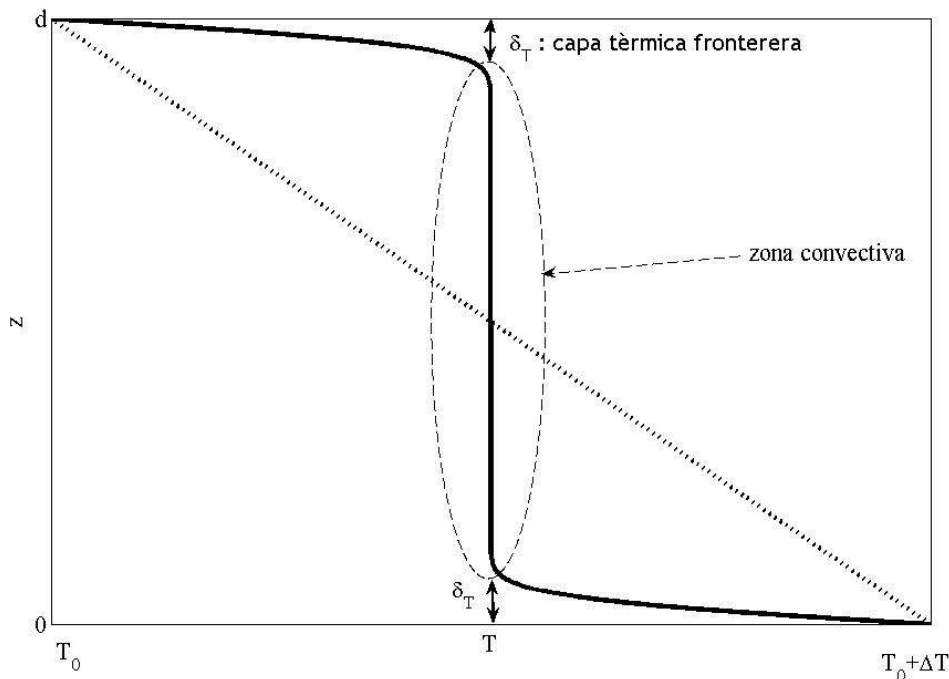


Figura 2.9. En perfil tèrmic discontinu purament difusiu (lineal), i en perfil tèrmic continu mitjà en condicions de turbulència, amb les zones frontereres tèrmiques de gruix δ_T i la zona convectiva amb un gradient tèrmic molt petit (inapreciable en la figura).

Una estimació del gruix de la capa fronterera tèrmica es pot fer a partir del gradient de la temperatura a les superfícies limítrofes —on la variació de temperatura és $\Delta T/2$ — a partir de:

$$\delta_T = \frac{\Delta T/2}{\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right|_{z=0,d}} = \frac{d}{2Nu} \quad (2.31)$$

expressió que utilitzarem per descriure quantitativament els esglaons multidifusius mesurats a l'estany de Banyoles i que es presenten en el capítol 4. D'altra banda, en el gros de l'esglaó tèrmic representat en la figura 2.9, el flux tèrmic és dominat pel terme turbulent, i el terme difusiu de 2.27 és negligible. Per tant, el nombre de Nusselt pren la forma següent:

$$Nu = \frac{(\overline{wT'})_{\text{gros}}}{\kappa_T \Delta T / d} \quad (2.32)$$

Naturalment, en condicions estadísticament estacionàries, els valors de 2.30 i 2.32 han de coincidir.

2.5. Models de flux tèrmic per convecció de RB turbulenta

A partir de la dècada del 1960 és habitual considerar la dependència funcional entre el flux tèrmic adimensional i el nombre de Rayleigh en forma de llei potencial (Turner, 1973):

$$Nu = CRa_T^p \quad (2.33)$$

On p i C poden dependre en principi de Pr (vegeu 2.29 i la discussió anterior). Seguint els resultats experimentals de Townsend (1959) i altres, Howard (1964) va introduir un model en què a la part superior de la capa fronterera tèrmica inferior es formen estructures discretes i calentes —tèrmiques— que es desenganxen a causa de la seva flotabilitat, i segons el qual $p = 1/3$ i $C = 0.086$ (en el cas de l'aigua). Aquest model, amb $p = 1/3$, és més conegut com la *llei dels 4/3*, ja que si a partir de les

definicions de Nu a 2.28 i Ra_T a 2.3 reconvertim l'expressió 2.33 per obtenir el flux tèrmic amb unitats físiques, trobem que aquest té la dependència següent:

$$F_T = C \left(\frac{g \alpha \kappa_T^2}{\nu} \right)^{1/3} \Delta T^{4/3} \quad (2.34)$$

Una propietat important de la llei dels 4/3 és que el flux tèrmic, i per tant el de calor, és independent de la mida vertical del sistema, això és, de d . En general, però, les dependències del tipus 2.33, quan s'expressen en forma dimensional, donen un flux tèrmic dependent del gruix de la capa, encara que no sigui així per a $p = 3$.

Posteriorment a aquest primer model, i a partir de la dècada del 1980, després de diferents estudis experimentals amb relacions d'aspecte superiors a 1 (Krishnamurti i Howard, 1981), es va començar a considerar el que després (dècada del 2000) s'anomenaria *vent de turbulència*, això és, una estructura de flux dominant, en forma de cel·les tridimensionals, que ocupa verticalment tot l'espai de la capa i amb una relació d'aspecte igual a 1, i es va recuperar, per tant, la idea de les cel·les corresponents al mode més inestable analitzat en l'apartat 2.2.1. Més concretament, es considera que el vent de turbulència no llisca sobre les superfícies limítrofes ($z = 0, d$), motiu pel qual apareix una capa fronterera per a la velocitat de gruix δ_U . El vent de turbulència s'alimenta energèticament del flux de flotabilitat associat a petites tèrmiques que es desenganxen de les interfases difusives tèrmiques. Llavors, i a partir de l'escala més grossa, que correspon a la del vent de turbulència, un seguit de processos no lineals lligats a la turbulència activa la cascada energètica cap a les escales més petites, fins que l'energia és dissipada per la viscositat. Tal com detalla Fernandes en un estudi experimental sobre convecció de RB (Fernandes, 2001), amb relacions d'aspecte prou grans, el flux és, en un sentit estadístic, horitzontalment homogeni i asimètric respecte a l'eix vertical. Això és, s'ha de pensar en el vent de turbulència (per a relacions d'aspecte prou grans) com en les escales dominants, des d'un punt de vista estadístic. El mateix autor, a partir d'eines estadístiques, troba que la major part de l'energia cinètica turbulenta correspon a les escales més grosses (les corresponents al vent de turbulència). Aquest vent, present en totes les interpretacions actuals que es fan sobre la convecció de RB, ha donat a llum dos models que analitzarem a continuació: el de l'anomenat grup de Chicago (com a primera referència vegeu Castaing et al., 1989, i com a recopilació,

Niemela et al., 2000) i la teoria d'unificació de Grossmann (Grossmann i Lohse, 2000, 2001, 2002, 2003 i 2004).

El model del grup de Chicago considera que per a fluids amb $Pr > 1$ la capa fronterera de la velocitat δ_U (generada pel vent) supera la tèrmica δ_T i per tant existeix una zona, que anomenen *de barreja*, delimitada entre els límits superiors de la capa fronterera tèrmica i la capa de la velocitat. En aquesta zona es generen tèrmiques que s'acceleren fins a assolir la velocitat del vent de turbulència, i s'hi incorporen. Aquest model preveu una llei del flux diferent de la dels 4/3, i més concretament s'obtenen per l'expressió 2.33 els valors $p = 2/7 \approx 0.286$ i $C \approx 0.2$ (per nombres de Prandtl de l'ordre d'1). Aquesta parametrització va ser corroborada amb eines numèriques (Kerr i Herring, 2000, i Kerr 2001). També amb la idea de la importància de la capa fronterera de velocitat, una referència molt coneguda en l'àmbit de l'oceanografia és la de Kelley (1990), que en el cas de l'aigua ($Pr \approx 7$) i recopilant una multitud de dades experimentals dona els valors $C = 0.164$ i $p = 0.284$.

També considerant la idea del vent de turbulència, Grossmann i Lohse (2000) presenten el que anomenen una *teoria d'unificació per a la convecció de RB turbulenta*. El model considera que, en principi, les dissipacions d'energia cinètica i de variància tèrmica mitjanes en tot el volum que ocupa el fluid, les quals designem com a $\langle \varepsilon \rangle$ i $\langle \varepsilon_T \rangle$, poden tenir contribucions de les capes frontereres (CF) de velocitat i temperatura, δ_U i δ_T , i de la resta del domini (el gros de l'esglaió), en la forma:

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon \rangle_{CF} + \langle \varepsilon \rangle_{gros} \quad (2.35a)$$

$$\langle \varepsilon_T \rangle = \langle \varepsilon_T \rangle_{CF} + \langle \varepsilon_T \rangle_{gros} \quad (2.35b)$$

Els autors del model consideren diferents règims purs caracteritzats per la importància relativa de les dissipacions a les diferents zones i dels gruixos δ_U i δ_T . Llavors, per als casos límit s'obtenen les lleis potencials de la taula 2.1. El mètode seguit per obtenir aquests resultats es basa fonamentalment en arguments dimensionals, a partir de les equacions de balanç de l'energia cinètica turbulenta i la variància de l'escalar. Els prefactors (constants del davant de les funcions) s'han obtingut a partir de resultats experimentals. Els prefactors de la taula 2.1 es basen en dades amb $\Gamma = 1$, tot i que per a relacions d'aspecte superiors, els autors, seguint resultats recents (Funfschilling et al.,

2005), indiquen que no hi ha gaire variació. Tal com s’ha recopilat en la taula 2.1, el model també prediu el nombre de Reynolds corresponent al vent, definit com a $Re = Ud / \nu$, on U és la velocitat lligada a l’escala gran.

Règim:	Dissipacions dominants:	Capas frontereres:	Nu	Re
I_l	$\langle \varepsilon \rangle_{CF}$ $\langle \varepsilon_T \rangle_{CF}$	$\delta_U < \delta_T$	$0.27 Ra_T^{1/4} Pr^{1/8}$	$0.037 Ra_T^{1/2} Pr^{-3/4}$
I_u		$\delta_U > \delta_T$	$0.33 Ra_T^{1/4} Pr^{-1/12}$	$0.039 Ra_T^{1/2} Pr^{-5/6}$
II_l	$\langle \varepsilon \rangle_{gros}$ $\langle \varepsilon_T \rangle_{CF}$	$\delta_U < \delta_T$	$0.97 Ra_T^{1/5} Pr^{1/5}$	$0.47 Ra_T^{2/5} Pr^{-3/5}$
II_u		$\delta_U > \delta_T$	$0.51 Ra_T^{1/5}$	$0.19 Ra_T^{2/5} Pr^{-2/3}$
III_l	$\langle \varepsilon \rangle_{CF}$ $\langle \varepsilon_T \rangle_{gros}$	$\delta_U < \delta_T$	$6.43 \times 10^{-6} Ra_T^{2/3} Pr^{1/3}$	$5.24 \times 10^{-4} Ra_T^{2/3} Pr^{-2/3}$
III_u		$\delta_U > \delta_T$	$3.43 \times 10^{-3} Ra_T^{3/7} Pr^{-1/7}$	$6.46 \times 10^{-3} Ra_T^{4/7} Pr^{-6/7}$
IV_l	$\langle \varepsilon \rangle_{gros}$ $\langle \varepsilon_T \rangle_{gros}$	$\delta_U < \delta_T$	$4.43 \times 10^{-4} Ra_T^{1/2} Pr^{1/2}$	$0.036 Ra_T^{1/2} Pr^{-1/2}$
IV_u		$\delta_U > \delta_T$	$0.038 Ra_T^{1/3}$	$0.16 Ra_T^{4/9} Pr^{-2/3}$

Taula 2.1. Diferents règims purs previstos pel model de convecció de Grossmann, així com les dependències $Nu(Ra_T, Pr)$ i $Re(Ra_T, Pr)$.

Finalment, Grossmann i Lohse (2000) entenen que hi ha casos transitoris entre els règims proposats. En aquesta línia troben un criteri, a l’espai definit per $Ra_T - Pr$, per determinar quins estats purs, dels enunciats en la taula 2.1, s’han de combinar per obtenir les dependències del flux tèrmic i el nombre de Reynolds del vent. Complementàriament, obtenen que la dependència potencial que resulta del model de la zona de barreja del grup de Chicago, comentada en aquest mateix apartat, coincideix numèricament amb la superposició dels estats IV_u i III_u . Els autors no concreten en el model si el flux tèrmic dominant a la zona barrejada és portat principalment pels plomalls vinculats al vent o per la turbulència de fons en forma de tèrmiques. De fet, més concretament, diuen: “The present theory does not make any statement about how the heat is transported from the bottom to the top, i.e. whether it is mainly convective transport or mainly transport through plumes... both create thermals and viscous dissipation”.

2.6. Doble difusió en règim difusiu (DDR)

Si en l'apartat anterior hem considerat la convecció en sistemes monodifusius (temperatura), en aquest considerarem sistemes multidifusius, i més concretament aprofundirem en el règim DDR. Aquest règim, tal com hem vist en l'apartat 2.3, requereix que els dos camps escalars que afecten la densitat —la temperatura i la concentració— decreixin en altura, de manera que la combinació de tots dos faci que el perfil de densitat sigui lleugerament estable estàticament (decreixent en altura), això és, molt pròxim al perfil neutre (PN), del qual també hem parlat en l'apartat 2.3.

En la figura 2.10 s'ha representat precisament un perfil de temperatura (vermell) i un altre de concentració (blau), els quals conjuntament produeixen un perfil de densitat (verd) estàticament estable (decreixent en altura) i pròxim al neutre. El perfil de la densitat s'ha calculat amb la forma linealitzada (1.2), que produeix variacions iguals a $\Delta\rho = \rho_0(-\alpha\Delta T + \beta\Delta C)$, tal com també s'ha indicat en la figura 2.10. Llavors es defineix la raó d'estabilitat de la densitat R_ρ com a:

$$R_\rho \equiv \frac{\beta\Delta C}{\alpha\Delta T} \tag{2.36a}$$

expressió que, recordant la definició dels nombres de Rayleigh a 2.3, és equivalent a:

$$R_\rho = Ra_1 / Ra_T \tag{2.36b}$$

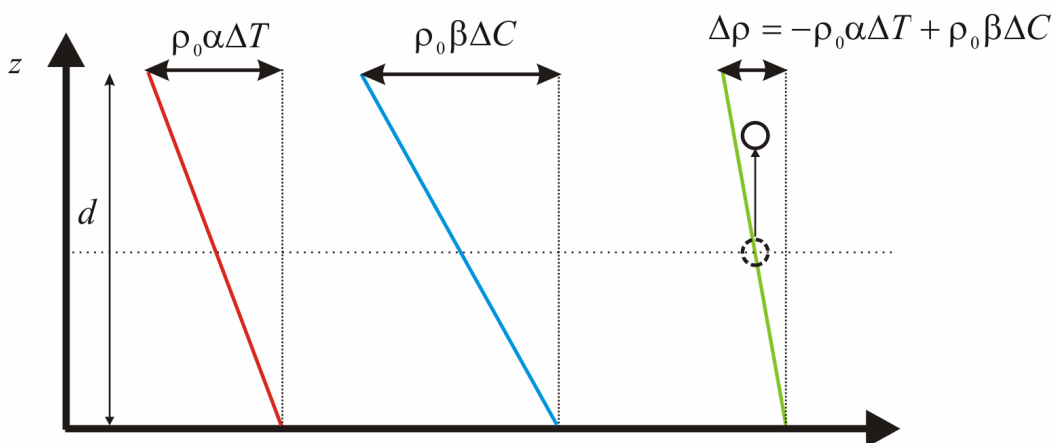


Figura 2.10. A l'eix horitzontal, contribucions a la densitat (lleugerament estable i en verd) per part d'estratificacions lineals en la temperatura (inestabilitzant i en vermell) i la concentració (estabilitzant i en blau), on z és la coordenada vertical (apuntant amunt).

Recordem que, anteriorment, en el diagrama de Rayleigh de la figura 2.7, hem identificat la zona d'inestabilitat DDRD (marcada amb línies puntejades negres i verticals) com la regió que es troba entre la recta de perfil neutre (PN) —caracteritzada per $\Delta\rho = 0$ o equivalentment $R_\rho = 1$ — i la recta de sobreestabilitat (SE) definida per 2.23. Llavors, si a 2.23 negligim Ra_{cr} (ordre 10^3) respecte de Ra_T i Ra_1 (generalment d'ordre molt superior a 10^3), i utilitzem 2.36b, trobem que la recta de SE correspon a $R_\rho = (\text{Pr}+1)/\text{Pr}$ ($R_\rho \approx 1.13$ per a l'aigua a 14°C). Per tant, el valor de la raó d'estabilitat de la densitat R_ρ ens serveix de criteri per valorar l'existència de la inestabilitat DDRD, ja que, més concretament, es pot considerar que pot existir DDRD si $R_\rho \in (1, (\text{Pr}+1)/\text{Pr})$.

La generalització de la raó d'estabilitat (2.36) al cas de triple difusió és (Griffiths, 1979a i 1979b):

$$R_\rho = \frac{(\beta_1\Delta C_1 + \beta_2\Delta C_2)}{\alpha\Delta T} \quad (2.37a)$$

$$R_\rho = (Ra_1 + Ra_2)/Ra_T \quad (2.37b)$$

Tornant a la figura 2.10, si una petita partícula d'aigua és desplaçada verticalment de la seva posició d'equilibri (circumferència discontinua) i la deixem en una posició lleugerament superior (circumferència contínua), la força de flotabilitat tendirà a restaurar la seva posició original i oscil·larà al voltant d'aquesta seguint un moviment harmònic simple (negligint la viscositat), de fet, amb la coneguda freqüència de Brunt-Väisälä N , definida com a (Tritton, 1988):

$$N^2 = -(g/\rho_0)d\rho/dz = g(\beta\Delta C - \alpha\Delta T)/d \quad (2.38)$$

Tanmateix, si considerem el flux difusiu (tèrmic i de concentració) entre la partícula i l'ambient, com que la difusivitat tèrmica és molt més gran que la corresponent a la concentració (per exemple la salinitat), durant la tornada a la posició d'equilibri la partícula es refredarà, mentre que la concentració es mantindrà bàsicament invariant. La partícula, per tant, sobrepassarà la posició inicial amb una temperatura més petita que la corresponent a la posició d'equilibri (i una densitat lleugerament superior), i es produirà així una força addicional en el mateix sentit del desplaçament (descendent). Si l'estratificació en la densitat és prou petita, una vegada sobrepassada la posició inicial, i

amb sentit descendent, la partícula s'anirà escalfant i tornarà a sobrepassar la posició inicial (en sentit ascendent) amb una temperatura superior a la inicial i una força addicional en sentit positiu. D'aquesta manera obtindrem un moviment oscil·latori amb amplitud creixent en el temps, i per tant una inestabilitat de tipus oscil·latori, tal com hem deduït en l'apartat 2.3.

L'efecte de la inestabilitat DDRD sobre el conjunt del fluid serà un flux de calor en sentit ascendent i superior al flux de la concentració (també ascendent), de manera que el flux de densitat resultarà a favor del seu gradient (descendent), tal com veurem en l'apartat 2.7. Això contrasta amb el fet que el transport d'una magnitud per processos difusius o turbulents es produeix habitualment en contra del seu gradient.

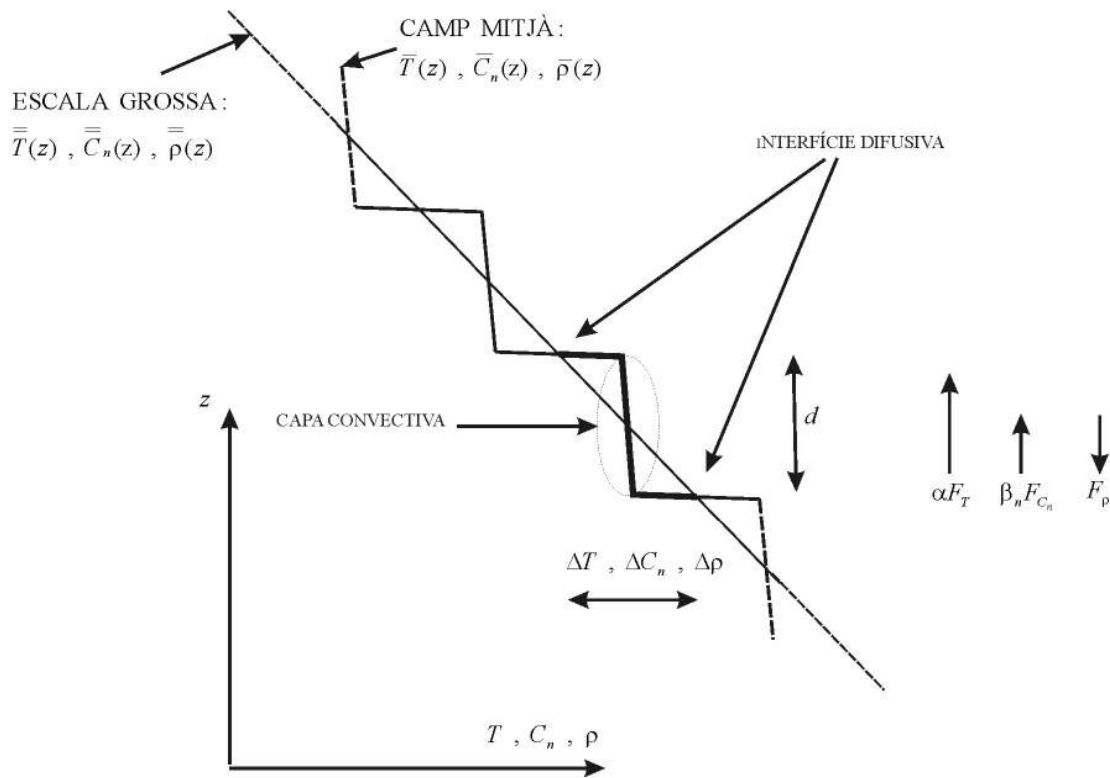


Figura 2.11. Estructura espacial dels camps mitjans i dels camps lligats a l'escala grossa d'una distribució de tipus esglaons en el context de doble difusió en règim difusiu.

En la figura 2.11 s'ha representat una estructura en forma d'esglaons, resultat final de la inestabilitat per multifusió (doble o triple difusió), en què s'indiquen els camps mitjans de temperatura \bar{T} , concentracions \bar{C}_n i densitat $\bar{\rho}_n$ per a cada esglaó, i el que s'anomena *perfil d'escala grossa*, que defineix una estratificació de fons per als camps

mitjans i que en aquest text simbolitzarem amb \bar{T} , \bar{C}_n i $\bar{\rho}_n$. Aquests s'acostumen a calcular suposant un comportament lineal entre el punt mitjà d'una interfície difusiva i el de la següent, tal com s'aprecia en la figura. En la mateixa figura també s'ha representat el flux de densitat F_ρ , que a partir d'1.2 es relaciona amb els fluxos tèrmic (F_T) i de concentració de l'espècie n (F_{C_n}), com a:

$$F_\rho = \rho_0(\beta_n F_{C_n} - \alpha F_T) \quad (2.39)$$

Noteu que F_ρ apunta a favor del gradient de densitat (és negatiu), ja que en aquest tipus de sistemes —tal com hem esmentat— domina la contribució del flux tèrmic αF_T (sentit ascendent) sobre la del flux de concentració $\beta_n F_{C_n}$ (també sentit ascendent).

Malgrat que la teoria d'estabilitat lineal presentada en l'apartat 2.3 prediu que la DDRD es dona quan $1 < R_\rho < (\text{Pr}+1)/\text{Pr}$, en oceanografia i limnologia s'han trobat distribucions de tipus esglaons en la franja aproximada $1 < R_\rho \leq 10$. Utilitzant aquest últim criteri, en la figura 2.12 (extreta de Kelley et al., 2003) s'hi han representat les zones més susceptibles de produir-se DDRD en mars i oceans. Amb negre, i sobretot zones polars entre 200 i 300 m de fondària, es representen les zones amb estratificació $1 < R_\rho \leq 3$, les quals anomenarem *altament inestables*, i amb gris es representen les zones més estables, amb $3 < R_\rho \leq 10$. A més de les zones polars esmentades, també s'inclouen algunes àrees del mar de Labrador, la costa del Brasil i el mar Negre. Pel que fa a les referències limnològiques, ja s'havien comentat en l'apartat 2.1.

Si s'aconseguís parametritzar bé els fluxos tèrmic i de concentracions en funció de la mida i dels increments tèrmic i de concentració a cada cel·la convectiva (esglaó), i trobar la mida de la cel·la d com a funció dels gradients tèrmic i de concentració, s'aconseguiria expressar els fluxos com a funcions dels gradients de l'estratificació de l'escala grossa $d\bar{T}/dz$ i $d\bar{C}_n/dz$, ja que $\Delta T = (d\bar{T}/dz) d$ i $\Delta C_n = (d\bar{C}_n/dz) d$. Això permetria implementar en models numèrics de circulació el transport doble (i triple) difusiu. La convecció DDRD es considera avui dia un mecanisme rellevant de barreja en l'oceà (Gargett i Holloway, 1992), tot i que l'estat de coneixement d'aquest tema no permet encara incorporar-lo en els models (Merryfield et al., 1999; Ruddick i Gargett, 2003).

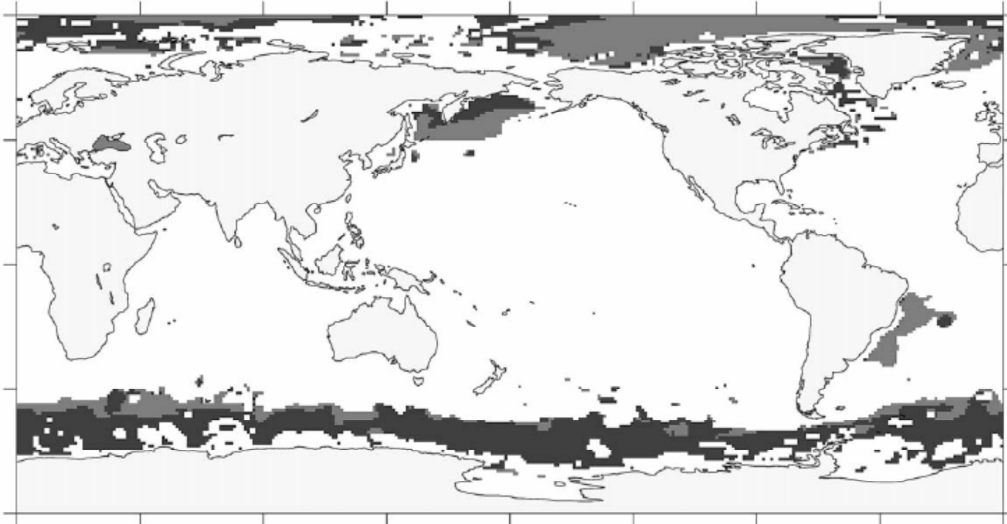


Figura 2.12. Zones dels oceans i mars del planeta susceptibles de produir-s'hi DDRD (figura extreta de Kelley et al., 2003).

Tot i això, en l'apartat següent mostrarem alguns models de flux que s'han publicat al llarg de la recent història de la DDRD, si bé cap no té l'aprovació general de la comunitat científica. En el capítol 4 contrastarem aquests models amb les dades experimentals que es presenten en aquest treball.

2.7. Models de flux tèrmic per convecció DDRD

Tots els models de DDRD desenvolupats fins a l'actualitat tracten de parametritzar els fluxos tèrmic i de concentració F_T i F_C i la mida de les capes convectives d de manera local, tal com hem esmentat en la part final de l'apartat anterior. És a dir, volem determinar funcions \hat{f}_T , \hat{f}_C i \hat{f}_d amb:

$$F_T = \hat{f}_T(d\bar{T}/dz, d\bar{C}/dz, d) \quad (2.40a)$$

$$F_C = \hat{f}_C(d\bar{T}/dz, d\bar{C}/dz, d) \quad (2.40b)$$

$$d = \hat{f}_d(d\bar{T}/dz, d\bar{C}/dz) \quad (2.40a)$$

dependents de valors locals, això és, dels valors d'una única capa convectiva com la remarcada de color negre en la figura 2.11.

Les funcions 2.40 depenen també de les propietats termodinàmiques i moleculars, encara que aquesta dependència no s'ha explicitat en les relacions anteriors. Tradicionalment, però, i tal com ja hem comentat, la dependència dels fluxos tèrmic i de concentració s'acostuma a reescriure de manera adimensional introduint unes noves funcions f_T, f_C :

$$Nu = f_T(Ra_T, R_\rho) \quad (2.41a)$$

$$R_F \equiv \frac{\alpha F_C}{\beta F_T} = f_C(Ra_T, R_\rho) \quad (2.41b)$$

on el flux de calor adimensional Nu es defineix de la mateixa manera que en la convecció de RB, això és amb 2.28, i R_F és la raó dels fluxos de flotabilitat, la qual es defineix en la mateixa equació 2.41b. Cal fer notar que la dependència respecte a ΔC a 2.41 està garantida a través de R_ρ .

El primer model físic sobre DDRD va ser proposat per Turner (1965 i 1968). Aquest model segueix la línia proposada per Howard (1964) per convecció de RB, i es basa en l'estabilitat marginal de les interfases per explicar el mecanisme de transferència de calor entre les interfases difusives i la zona convectiva. La difusivitat molecular fa que augmenti el gruix de la interfície difusiva i, a mesura que transcorre el temps, com que $\kappa_C \ll \kappa_T$, la interfície tèrmica supera en gruix la de concentració, fins que apareix una zona estàticament inestable just per sobre de $z = 0$. Dit d'una altra manera: el model assumeix que, quan el nombre de Rayleigh tèrmic de la interfície assoleix el valor crític de l'estabilitat marginal (ordre 1000), es formen tèrmiques (estructures calentes discretes) que puguen per flotabilitat. Tanmateix, els treballs publicats indiquen que les observacions existents no corroboren aquest fet, ja que els nombres de Rayleigh de la interfície que es troben superen en un ordre de magnitud el valor crític. En el capítol 4, i basant-nos en les mesures a l'estany de Banyoles, discutirem que aquest fet possiblement és degut a una mala definició del nombre de Rayleigh de la interfície, el qual nosaltres proposem modificar (Sánchez i Roget, 2007). Tot i aquesta discrepància conceptual, tal com ja hem comentat, el model de Turner és encara la base de moltes parametritzacions actuals i prediu que (Turner et al., 1970):

$$Nu = C(R_\rho)Ra_T^{1/3} \quad (2.42a)$$

$$R_F \approx \tau^{1/2} R_\rho \quad (2.42b)$$

Fixem-nos que trobem la llei dels 4/3 per a la transferència de calor, però, a diferència de la convecció de RB, on C era una constant, la presència del camp estabilitzador de concentració fa que ara C depengui de la raó d'estabilitat.

Pel que fa a la parametrització de R_F , en general s'accepta el comportament descrit per 2.42b, encara que el mateix Turner va veure amb els seus experiments que per sota d'un cert R_ρ la dependència 2.42b ja no és correcta i es produeix un sobtat augment de R_F . El valor de R_ρ en què es produeix el canvi de règim, amb l'augment sobtat de R_F , varia d'un experiment a un altre (Fernando, 1989a). Alguns autors han plantejat la hipòtesi que en el límit $R_\rho \rightarrow 1$ la raó de flotabilitat compleix $R_F \rightarrow 1$, fet que seria coherent amb un transport exclusivament turbulent (Kelley, 2003).

Per explicar el procés de formació d'una multiplicitat d'esglaons DDRD, Turner considerava una capa de fluid amb un perfil lineal de salinitat i amb la temperatura homogènia, escalfat per sota. Una vegada formada una capa convectiva ben barrejada (a la zona inferior del fluid) i limitada superiorment de la resta del fluid amb una interfície difusiva, aquesta capa seguiria creixent fins que la interfície, en la seva evolució temporal (augmentant el gruix per difusió molecular), assolís l'estabilitat marginal. Llavors, la capa convectiva deixaria de créixer, i a partir de la seva interfície superior es reiniciaria el procés i es formaria una nova capa convectiva que començaria a créixer en mida, i així successivament. Turner, seguint aquests arguments, va trobar la següent dependència per a la mida de la capa:

$$d = (Ra_{cr} / 4) \left[\frac{\nu (g\alpha F_T)^3}{\kappa_T^2 (g\beta |d\bar{C}/dz|)^4} \right]^{1/4} \quad (2.43)$$

on $Ra_{cr} \approx 1000$ i $|d\bar{C}/dz|$ és el mòdul del gradient de concentració en l'escala grossa.

Basant-se en les dades experimentals de laboratori de Turner, Huppert (1971) va introduir la primera dependència per a $C(R_\rho)$, en el cas en què el camp estabilitzador és la salinitat, que anomenarem H71:

$$\text{H71: } C(R_\rho) = 0.323R_\rho^{-2} \quad (2.44)$$

També amb dades de laboratori amb la salinitat, Marmorino i Caldwell (1976), a partir d'ara MC76, van proposar:

$$\text{MC76: } C(R_\rho) = 8.58 \times 10^{-3} \exp\{4.6 \exp(-0.54(R_\rho - 1))\} \quad (2.45)$$

Seguint la línia del model de Turner, això és, amb transport dominat per tèrmiques que es desenganxen de les interfases difusives. Linden i Shirtcliffe (1978), LS78, van proposar, a partir d'arguments teòrics, la següent funció $C(R_\rho)$:

$$\text{LS78: } C(R_\rho) = 0.058 \frac{(1 - \tau^{1/2} R_\rho)^{4/3}}{(1 - \tau^{1/2})^{1/3}} \quad (2.46)$$

Expressió que és més general que les anteriors, ja que és aplicable a qualsevol camp de concentració amb una raó de difusivitats τ . LSF8 també proposen una llei per a la raó de flotabilitats, la qual és independent de la raó d'estabilitat:

$$\text{LS78: } R_F \propto \sqrt{\tau} \quad (2.47)$$

Pel que fa a la funció $C(R_\rho)$, malgrat el gran nombre de parametritzacions existents, totes són poc fiables a la zona de baixa estabilitat ($1 < R_\rho \leq 3$), ja que hi ha poques dades experimentals en aquest rang i les que hi ha varien molt d'un experiment a un altre (sobre un ordre de magnitud), tal com es pot veure en la figura 2.13, reproduïda de Kelley (1990). Tot i això, Taylor (1988), T88, proposa el model següent, en el qual volia incidir exclusivament en el rang de baixa estabilitat:

$$\text{T88: } C(R_\rho) = 0.27 / R_\rho^{2.1} \quad (2.48)$$

També Kelley (1990), basant-se en la figura 2.13, que recull totes les dades experimentals existents fins a aquell moment (amb la salinitat), proposa la parametrització següent:

$$\text{K90: } C(R_\rho) = 0.0032 \exp(4.8 / R_\rho^{0.72}) \quad (2.49)$$

Del que hem dit fins aquí es veu que hi ha hagut una gran quantitat de treballs que han anat més en el camí de trobar la funció $C(R_\rho)$ que no pas de validar la llei dels 4/3, la qual actualment s'utilitza àmpliament en oceanografia.

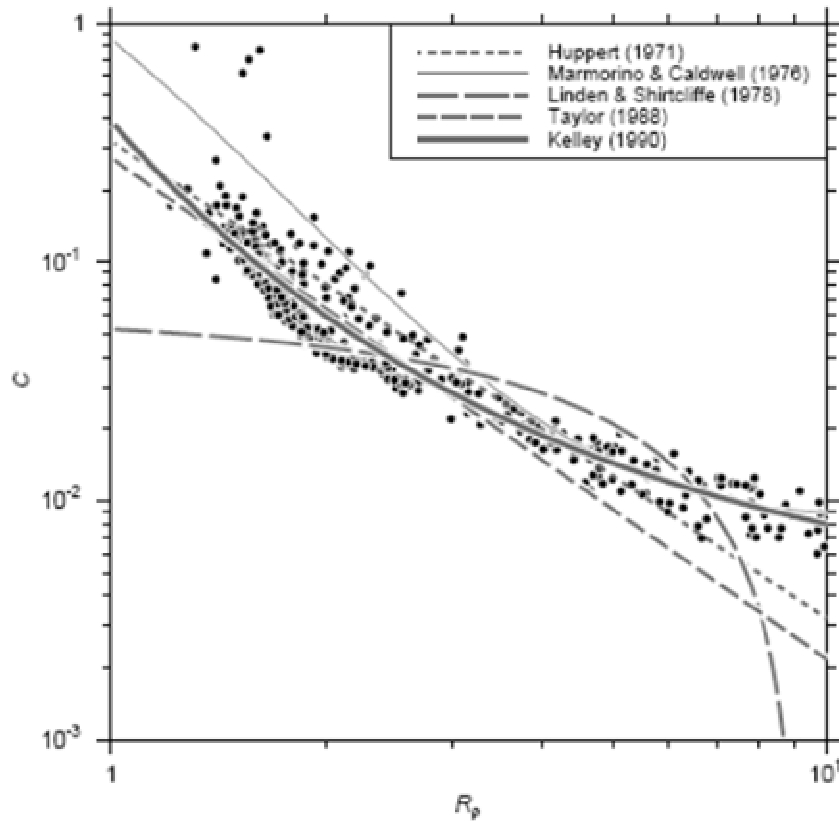


Figura 2.13. Prefactor C de la llei dels 4/3, en funció de la raó d'estabilitat de la densitat R_ρ , així com els diferents models comentats en el text. Dades experimentals recopilades per Kelley (1990).

Tot i això, s'ha plantejat utilitzar per al flux de calor lleis potencials, de les que s'utilitzen en convecció de RB, sobretot la del tipus 2/7 (Kelley, 1990; Schmid et al., 2004), i Sánchez i Roget (2007) proposen el model de RB de Grossmann i Lohse (2000).

Un replantejament teòric alternatiu als anteriors és el que fa Fernando (1987, 1989a i 1989b). Aquest autor planteja que, en el mecanisme de creixement d'una capa convectiva DDRD, el fet que la interfície superior assoleixi l'estabilitat marginal no implica que la capa deixi de créixer i aparegui una altra capa convectiva a sobre, ja que els remolins de la turbulència es menjarien la capa convectiva naixent fins al moment en

què la interfície fos prou estable. Una vegada assolida l'estructura estacionària d'esglaons, la física d'aquest model també és diferent de la de Turner, ja que Fernando proposa que el mecanisme de transport de la calor i la sal no són les tèrmiques, sinó la turbulència de fons existent en el gruix de l'esglaó. Més concretament, Fernando diu que les tèrmiques interaccionen amb els remolins generats per la dinàmica turbulenta. Per explicar la divergència de valors de $C(R_\rho)$ en la regió de baixa estabilitat observada en la figura 2.13, Fernando proposa l'existència de dos règims diferents: el règim de transport difusiu (F89td), que es pot donar dins de tot el rang de raons d'estabilitat, i el de baixa estabilitat (F89be), que només pot aparèixer per a estabilitats baixes. En el primer règim els remolins de la turbulència no entren mai a la zona d'interfases difusives, a diferència del que passa en el segon règim, en què, ocasionalment, els remolins de dues capes convectives consecutives poden fins i tot entrar en contacte. Per això en el règim F89be els gruixos de les interfases tèrmiques i de concentració tenen mides semblants. Els fluxos tèrmics en aquest model s'escriuen de la manera següent:

$$\text{F89td: } Nu = 7 \times 10^{-2} Ra^{1/5} Pr^{1/5} \quad (2.50a)$$

$$\text{F89be: } Nu = 4.7 \times 10^{-4} Ra^{1/2} Pr^{1/2} \quad (2.50b)$$

on els prefactors de 2.50 s'han trobat a partir de resultats de laboratori, en què el camp de concentració és la salinitat. La transició entre els dos règims és definida per:

$$\frac{R_\rho Ra_T^{2/15} Pr^{2/5} \tau^{1/2} (1 - R_\rho^{-1} \tau^{1/2})}{(1 - R_\rho \tau^{1/2})^{1/5}} = 0.15 Nu^{2/3} \quad (2.50c)$$

Pel que fa al cas de la sal com a factor estabilitzador ($\tau = 10^{-2}$) i per a nombres de Rayleigh al voltant de 10^9 , la transició de règim es produeix per $R_\rho \approx 2$. Les raons de flotabilitat proposades pel model de Fernando són:

$$\text{F89td: } R_F \approx \tau^{1/2} R_\rho \quad (2.50d)$$

$$\text{F89be: } R_F \approx 0.15 R_\rho \quad (2.50e)$$

Observem que 2.50d coincideix amb 2.42b. Respecte a la mida de la capa convectiva, l'autor troba que en tots dos casos:

$$\text{F89: } d = 12.5 \frac{(g\alpha F_T)^{1/2}}{\left(g\beta \left| d\bar{C}/dz \right| \right)^{3/4}} \frac{1}{(1 - R_\rho^{-1})^{3/4}} \quad (2.50f)$$

Fernando, en els seus articles, remarca la relativa bona concordança entre les parametritzacions (2.50) i les dades experimentals disponibles en llacs, mars i oceans.

Tal com hem vist en aquest últim apartat, al llarg de la recent història de la DDRD han aparegut diversos models teòrics i parametritzacions per als fluxos i la mida de les capes convectives. Tot i això, no hi ha cap model o parametrització que descrigui el conjunt de dades experimentals existent en la bibliografia i que es considera fiable. La possibilitat d'obtenir noves mesures —com les que presentem en aquest treball— i els avenços computacionals afavoreixen que una part de la comunitat científica torni a abordar amb interès el tema de la DDRD, amb l'esperança de poder disposar els anys vinents d'un marc físic més robust que pugui ser validat.

2.8. Bibliografia

- Bénard, H. (1900), “Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide”, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 11, 1261-1271 i 1309-1328.
- Brandt, A. i H. J. S. Fernando (1995), *Double-diffusive convection*, Geophysical Monograph, American Geophysical Union.
- Brown, E., A. Nikolaenko, D. Funfschilling i G. Ahlers (2005), “Heat transport in turbulent Rayleigh-Bénard convection: effect of finite top- and bottom-plate conductivities”, *Physics of Fluids*, 17.
- Castaing, B., G. Gunaratne, F. Heslot, L. Kadanoff, A. Libchaber, S. Thomae, X. Z. Wu, S. Zaleski i G. Zanetti (1989), “Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection”, *Journal of Fluid Mechanics*, 204, 1-30.
- Chandrasekhar, S. (1961), *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford University Press.
- Ciliberto, S. i C. Laroche (1999), “Random roughness of boundary increases the turbulent convection scaling exponent”, *Physical Review Letters*, 82, 3998-4001.
- Fernandes, R. L. J. (2001), *The spatial structure of turbulent Rayleigh-Bénard convection*, tesi doctoral, Universitat d'Illinois.

- Fernando, H. J. S. (1987), “The formation of a layered structure when a stable salinity gradient is heated from below”, *Journal of Fluid Mechanics*, 182, 525-541.
- Fernando, H. J. S. (1989a), “Buoyancy transfer across a diffusive interface”, *Journal of Fluid Mechanics*, 209, 1-34.
- Fernando, H. J. S. (1989b), “Oceanographic implications of laboratory experiments on diffusive interfaces”, *Journal of Physical Oceanography*, 19, 1707-1715.
- Funfschilling, D., E. Brown, A. Nikolaenko i A. Guenter (2005), “Heat transport by turbulent Rayleigh-Bénard convection in cylindrical samples with aspect ratio one and larger”, *Journal of Fluid Mechanics*, 536, 145-154.
- Gargett, A. E. i G. Holloway (1992), “Sensitivity of the GFDL ocean model to different diffusivities of heat and salt”, *Journal of Physical Oceanography*, 22(10), 1158-1177.
- Gill, A. E. (1982), *Atmosphere-ocean dynamics*, Academic Press.
- Griffiths, R. W. (1979a), “The transport of multiple components through thermohaline diffusive interfaces”, *Deep-Sea Research*, 26A, 383-397.
- Griffiths, R. W. (1979b), “The influence of a third diffusing component upon the onset of convection”, *Journal of Fluid Mechanics*, 92, 659-670.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2000), “Scaling in thermal convection: a unifying theory”, *Journal of Fluid Mechanics*, 407, 27-56.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2001), “Thermal convection for large Prandtl number”, *Physical Review Letters*, 86(15), 3316-3319.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2002), “Prandtl and Rayleigh number dependence of the Reynolds number in turbulent thermal convection”, *Physical Review E*, 66, 1-6.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2003), “On geometry effects in Rayleigh-Bénard convection”, *Journal of Fluid Mechanics*, 486, 105-114.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2004), “Fluctuations in turbulent Rayleigh-Bénard convection: the role of plumes”, *Physics of Fluids*, 16(12), 4462-4472.
- Hoare, R. A. (1966), “Problem of heat transfer in Lake Vanda, a density stratified antarctic lake”, *Nature*, 10, 787-789.
- Howard, L. N. (1964), “Convection at high Rayleigh number”, *11th International Congress in Applied Mechanics*, Springer, Berlín.
- Huppert, H. E. (1971), “On the stability of a series of double-diffusive layers”, *Deep-Sea Research*, 18, 1005-1021.

- Kelley, D. E. (1984), “Effective diffusivities in oceanic thermohaline staircases”, *Journal of Geophysical Research*, 89, 10484-10488.
- Kelley, D. E. (1990), “Fluxes through diffusive staircases: a new formulation”, *Journal of Geophysical Research*, 95, 3365-3371.
- Kelley, D. E., H. J. S. Fernando, A. E. Gargett, J. Tanny i E. Özsoy (2003), “The diffusive regime of double-diffusive convection”, *Progress in Oceanography*, 56, 461-481.
- Kerr, R. M. i J. R. Herring (2000), “Prandtl number dependence of Nusselt number in DNS”, *Journal of Fluid Mechanics*, 419, 325-344.
- Kerr, R. M. (2001), “Energy budget in Rayleigh-Bénard convection”, *Physical Review Letters*, 87 (24), 1-4.
- Krishnamurti, R. i L. N. Howard (1981), “Large-scale flow generation in turbulent convection”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 78, n. 4, (part 1: “Physical sciences”), 1981-1985.
- Kundu, P. K. (1990), *Fluid mechanics*, Academic Press.
- Linden, P. F. i T. G. F. Shirtcliffe (1978), “The diffusive interface in double-diffusive convection”, *Journal of Fluid Mechanics*, 87, 417-432.
- Lorenz, E. N. (1963), “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, 130-141.
- Marmorino, G. O. i D. R. Caldwell (1976), “Heat and salt transport through a diffusive thermohaline interface”, *Deep-Sea Research*, 23, 59-67.
- Merryfield, W. J., G. Holloway i A. E. Gargett (1999), “A global model with double-diffusive mixing”, *Journal of Physical Oceanography*, 29, 1124-1142.
- Newman, F. C. (1976), “Temperature steps in Lake Kivu: a bottom heated saline lake”, *Journal of Physical Oceanography*, 6, 157-163.
- Niemela J. J., L. Skrbek, K. R. Sreenivasan i R. J. Donnelly (2000), “Turbulent convection at very high Rayleigh numbers”, *Nature*, 404, 837-840.
- Padman, L. i T. M. Dillon (1987), “Vertical heat fluxes through the Beaufort Sea thermohaline staircase”, *Journal of Geophysical Research*, 92, 10799-10806.
- Pearson, J. R. A. (1958), “On convection cells induced by surface tension”, *Journal of Fluid Mechanics*, 4, 489-500.
- Rayleigh, Lord (1916), “On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side”, *Philosophical Magazine*, 32, 529-546.

- Ruddick, B. i A. E. Gargett (2003), “Oceanic double-diffusion: introduction”, *Progress in Oceanography*, 56 (3-4), 381-393.
- Saltzman, B. (1962), “Finite amplitude free convection as an initial value problem I”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19, 329-341.
- Sánchez, X. i E. Roget (2007), “Microstructure measurements and heat flux calculations of a triple-diffusive process in a lake within the diffusive layer convection regime”, *Journal of Geophysical Research*, 112.
- Schmid, M., A. Lorke, C. Dinkel, G. Tanyileke i A. Wüest (2004), “Double-diffusive convection in lake Nyos, Cameroon”, *Deep-Sea Research*, I 51, 1097-1111.
- Schmid, M., Halbwegs, M., Wehrli, B. i A. Wüest, (2005), “Weak mixing in Lake Kivu: new insights indicate increasing risk of uncontrolled gas eruption”. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 6(7), DOI: 10.1029/2004GC000892.
- Shishkina, O. i C. Wagner (2006), “Analysis of thermal dissipation rates in turbulent Rayleigh-Bénard convection”, *Journal of Fluid Mechanics*, 546, 51-60.
- Stern, M. E. (1960), “The «salt-fountain» and thermohaline convection”, *Tellus*, 12(2), 172-175.
- Stommel, H. M., A. B. Arons i D. Blanchard (1956), “An oceanographic curiosity: the perpetual salt fountain”, *Deep-Sea Research*, 3, 152-153.
- Stull, R. B. (1988), *An introduction to boundary layer meteorology*, Kluwer Publishers, 666 p.
- Tanny J., Z. Harel i A. Tsinober (1995), “Thermal diffusion phenomena in thick fluid layers”, *Double diffusive convection*, Geophysical Monograph, American Geophysical Union.
- Taylor, G. I. (1950), “The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes”, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 201, 192-196.
- Taylor, J. (1988), “The fluxes across a diffusive interface at low values of the density ratio”, *Deep-Sea Research*, 35(4), 555-567.
- Tong, C. i A. Gluhovsky (2002), “Energy-conserving low-order models for three-dimensional Rayleigh-Bénard convection”, *Physical Review E*, 65, 0463061-11.
- Townsend, A. A. (1959), “Temperature fluctuations over a heated horizontal surface”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 5, 209-241.
- Tritton, D. J. (1988), *Physical fluid dynamics*, Oxford University Press.

- Turner, J. S. (1965), “The coupled turbulent transports of salt and heat across a sharp density interface”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 8, 759-767.
- Turner, J. S. (1968), “The behaviour of a salinity gradient heated from below”, *Journal of Fluid Mechanics*, 33, 183-200.
- Turner, J. S., T. G. L. Shirtcliffe i P. G. Brewer (1970), “Elemental variations of transport coefficients across density interfaces in multiple diffusive systems”, *Nature*, 228, 1083-1084.
- Turner, J. S. (1973), *Buoyancy effects in fluids*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge University Press, Nova York.
- Wu, X. Z. i A. Libchaber (1993), “Scaling relations in thermal turbulence: the aspect ratio dependence”, *Physical Review A*, 45(2), 842-845.
- Xu, X., K. M. S. Bajaj i G. Ahlers (2000), “Heat transport in turbulent Rayleigh-Bénard convection”, *Physical Review Letters*, 84, 4357-4360.

CAPÍTOL 3

DADES DE MICROESTRUCTURA

3.1. INTRODUCCIÓ	88
3.2. DESCRIPCIÓ DE L'INSTRUMENTAL.....	89
3.2.1. SENSOR DE CISALLAMENT DE MICROESTRUCTURA	91
3.2.2. SENSOR DE TEMPERATURA DE RESPOSTA RÀPIDA.....	93
3.2.3. ALTRES MESURES DE VARIABLES TURBULENTES.....	94
3.2.4. MESURES DE PETITA ESCALA DE LA TERBOLESA	95
3.3. OBTENCIÓ DE L'ESPECTRE UNIDIMENSIONAL A PARTIR DE LES MESURES. ESPECTRES UNIVERSALS	97
3.3.1. L'ESPECTRE DEL CISALLAMENT	98
3.3.2. L'ESPECTRE UNIDIMENSIONAL D'UN CAMP ESCALAR	102
3.4. AJUST DE L'ESPECTRE EXPERIMENTAL A UN MODEL TEÒRIC: ESTIMACIÓ DE LA MÀXIMA VERSEMBLANÇA (EMV).....	104
3.5. ESCALES ESPACIALS I ESTRUCTURA DE LA TURBULÈNCIA.....	109
3.5.1. L'ESCALA DE THORPE.....	110
3.5.2. ANÀLISI MULTIESCALAR AMB ONDETES	112
3.6. BIBLIOGRAFIA	115

3.1. Introducció

Les primeres mesures de turbulència en l'àmbit de l'oceanografia daten de la dècada del 1950 i van tenir una finalitat purament militar, en l'àmbit de la detecció de solcs de submarins (Stewart i Grant, 1999). Sembla que aquesta tendència es va estancar, i

afortunadament la recerca posterior va ser civil i enfocada al pur coneixement de la física dels geofluids aquàtics. Les mesures de turbulència en sistemes aquàtics naturals han estat i estan plenes de dificultats tècniques, entre les quals podem destacar el fet d'haver de mesurar magnituds definides sobre un ampli ventall d'escala espacials (o temporals), les més petites de les quals generalment són de l'ordre dels mil·límetres (o mil·lisegons), però en alguns casos —com en la salinitat i en general en les concentracions de constituents— cal arribar fins als submil·límetres. Per a escales temporals i espacials tan petites, les amplituds de les variables que s'han d'estudiar són també molt petites i, per tant, calen instruments amb molta resolució (per exemple, la mil·lèsima de grau en temperatura) i de resposta ràpida. Malauradament, en aquests rangs és molt difícil controlar la contaminació del senyal, i per tant en aquest tipus d'estudis no només els sensors són de gran importància, sinó que també ho és que el tipus de vehicles o suports en els quals s'incorporen no vibrin en el rang de freqüències del senyal. A aquest tipus de dificultats, per a l'estudi experimental de la turbulència en medis naturals, s'ha d'afegir la natura intermitent de la turbulència, que sovint requereix un mostreig exhaustiu.

En aquest capítol descrivim la instrumentació de la microestructura utilitzada en aquest treball i els paràmetres físics que aquest tipus de mesures proporciona. La inferència de variables físiques a partir de les mesures realitzades sovint no és trivial i cal recórrer al coneixement general que es té de la turbulència per poder-les obtenir. Aquests aspectes més teòrics i conceptuals lliguen el que ja hem exposat en els capítols 1 i 2 amb el següent, i també els exposarem en aquest capítol. Finalment, revisarem altres aspectes metodològics —experimentals i matemàtics— que repercuteixen en la qualitat dels resultats que presentem.

3.2. Descripció de l'instrumental

Els sistemes de mesura de microestructura més estesos són els perfiladors, la majoria dels quals mostregen la columna d'aigua en caiguda lliure per evitar tensions de cables que puguin contaminar el senyal. Tot i això, els perfiladors a vegades també s'utilitzen

per fer mesures horitzontals o obliqües, i en aquest cas cal disposar d'algun sistema de propulsió (Lueck, 2005). Últimament hi ha hagut un gran progrés en el desenvolupament dels anomenats AUV (*autonomous underwater vehicles*, vehicles autònoms submarins) i, evidentment, els investigadors en turbulència se n'han beneficiat enormement (Goodman et al., 2006).

Els perfiladors verticals es van desenvolupar principalment a partir de la dècada del 1980, si bé no ha estat fins als últims deu anys que s'han començat a comercialitzar. Així, actualment en el mercat podem trobar l'SCAMP o *self contained autonomous microprofiler* (Stevens et al., 1999), l'MSS o *microstructure sonde* (Prandke i Stips, 1998) i el TURBOMAP o *turbulence ocean microstructure acquisition profiler* (Wolk et al., 2002). Per al treball que aquí presentem hem utilitzat l'MSS. Els perfiladors generalment tenen forma cilíndrica i allargada, i normalment s'utilitzen en sentit descendent, si bé hi ha dispositius complementaris per fer mesures en sentit ascendent i cada vegada hi ha més dades preses en aquest sentit (Stips et al., 2002). Pel que fa a la longitud dels perfiladors, si són prou llargs són arrossegats menys pels corrents, però en contrapartida són més difícils de manejar i, per tant, cal arribar a un terme mitjà. Pel que fa a les dades que presentarem en aquest treball, el perfilador que vam utilitzar tenia una longitud d'1 m. Els sensors de mesura estan situats a la part anterior —respecte al sentit de mesura— del perfilador, de manera que els remolins que es generen al voltant seu no afectin la mesura. Per quantificar aquesta contaminació, en general s'accepta que les mesures amb escales inferiors a la meitat de la longitud del perfilador no són afectades pels remolins que es generen al voltant (Prandke i Stips, 1998). Els sensors més habituals en un perfilador es poden classificar en sensors de precisió o sensors d'estructura fina, amb una resolució fins als centímetres, i sensors de resposta ràpida o de microestructura, amb una resolució fins als mil·límetres (figura 3.1). Entre els sensors de precisió més habituals que s'incorporen en els perfiladors hi ha el típic triplet CTD, amb conductivitat, temperatura i fondària (pressió), i els dispositius òptics per mesurar partícules en suspensió, tant orgàniques com inorgàniques. Les mesures d'estructura fina permeten conèixer les condicions instantànies del flux mitjà sobre el qual es genera la turbulència. Tanmateix, els paràmetres turbulents només es poden obtenir a partir dels sensors de microestructura, i els més habituals són els de temperatura i els de cisallament.

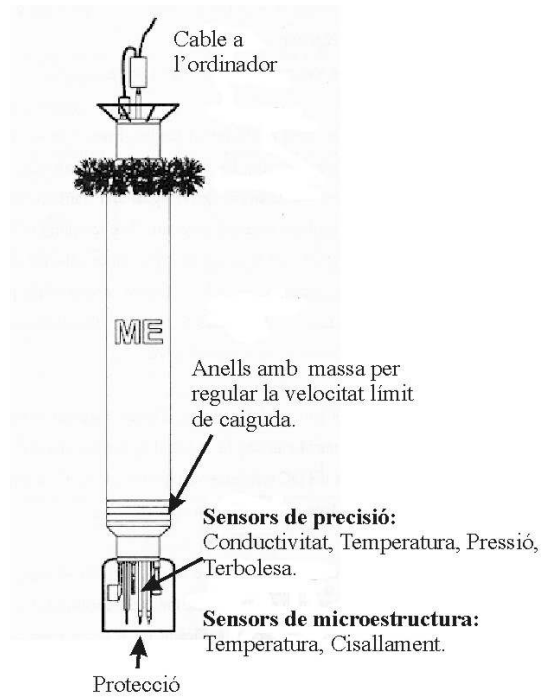


Figura 3.1. Perfilador MSS.

Respecte als sensors CTD presents al perfilador MSS, el sensor de conductivitat elèctrica consisteix en una cel·la de set pols amb una resolució de 0.0001 mS/cm i una constant temporal de 150 ms . El sensor de precisió de temperatura és del tipus Pt 100, amb una precisió de 0.01°C . Aquest sensor, que està fet de platí, té una resistència de 100.00Ω a 0°C , i la variació d'aquesta resistència en funció de la temperatura es coneix amb molta precisió. La constant temporal del sensor de precisió de temperatura és de 150 ms i per tant no ens permetrà resoldre les escales turbulentes, que mesurarem amb un altre sensor de temperatura de resposta ràpida (microestructura). El sensor de pressió té una constant temporal de 30 ms . Els sensors de microestructura es comenten amb més detall en els subapartats següents: el sensor de cisallament en el subapartat 3.2.1 i el de temperatura en el subapartat 3.2.2.

3.2.1. Sensor de cisallament de microestructura

Mesurar el cisallament implica obtenir les variacions verticals de la component horitzontal de la velocitat. El sensor de cisallament de petita escala mesura la tensió que exerceixen les fluctuacions de la velocitat a l'extrem d'una estructura tubular i la

transforma en voltatge a partir del fenomen de la piezoelectricitat. La velocitat del vehicle contribueix a la força transversal mesurada, ja que aquesta és proporcional a l'angle entre la velocitat turbulenta mesurada i la velocitat de caiguda del perfilador. Per això hi ha una velocitat mínima de caiguda perquè el sensor de cisallament sigui operatiu. En el nostre cas, per a velocitats inferiors a 40 cm/s el sensor de cisallament no és operatiu. Aquesta restricció amb la velocitat de caiguda no existeix en el cas que només es treballi amb dades de microestructura tèrmica, com en el cas desenvolupat en el capítol 4.

Els perfiladors, si bé mesuren en el temps, permeten obtenir sèries espacials dels camps turbulents. Això és possible gràcies a la validesa de l'anomenada *hipòtesi de Taylor* (o del camp congelat). Aquesta hipòtesi considera que, si travessem la regió de fluid que volem estudiar mitjançant un perfilador i aquest va a prou velocitat, durant el temps de travessar-la, el fluid no haurà experimentat canvis significatius. Llavors, les freqüències f (en $s^{-1} = Hz$) es relacionen amb els nombres d'ona k (en $cpm = m^{-1}$) mitjançant $k = f/V$, on V és la velocitat de caiguda del perfilador (Tennekes i Lumley, 1982). El perfilador utilitzat en aquest treball mostreja a 1024 Hz, i durant les campanyes en què es van fer les mesures es va utilitzar amb una velocitat de caiguda entre 0.2 i 0.5 m/s; per tant, la resolució espacial variaria entre 5120 i 2048 dades per metre. Tanmateix, el temps de resposta teòrica dels sensors fa que, efectivament, no puguem resoldre les variables físiques a escala tan petita. Així, en el cas del sensor de cisallament, amb una constant temporal de 3 ms i caient a velocitats entre 0.4 i 0.5 m/s, obtenim entre 833 i 667 dades per metre.

Tanmateix, l'obtenció directa de la velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta utilitzant les mesures de cisallament de petita escala, a partir de les expressions matemàtiques presentades en el capítol 1, està encara limitada per la contaminació del senyal. Així, Moum i Lueck (1985) situen el nivell de soroll al voltant de 10^{-10} W/kg, però la majoria d'investigadors troben limitacions per a dissipacions encara més elevades; aquest és el cas de Yamazaki (Yamazaki i Osborn, 1993), que situa el nivell inferior de resolució a 10^{-9} W/kg, o Paka et al. (1999), que el situen a 5×10^{-10} W/kg. En l'anàlisi de les mesures que es van fer a l'Atlàntic nord amb el mateix perfilador utilitzat en aquest treball, es va determinar que el nivell de soroll

permetia arribar a determinar dissipacions d'energia cinètica turbulenta superiors o iguals a 3×10^{-9} W/kg (Lozovatsky et al., 2005). Aquest valor és comparable amb els valors de dissipació dels esglaons turbulents estudiats en el capítol 4, i, per tant, els valors de la velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta que presentarem s'han obtingut a partir de mesures de la microestructura tèrmica, tal com discutirem amb més detall en l'apartat 3.4.

3.2.2. Sensor de temperatura de resposta ràpida

El sensor de microestructura tèrmica incorporat al perfilador MSS és un microtermistor del tipus FP07 de la casa Thermometrics. Aquest sensor té una resolució de 0.001°C i una constant de temps de 7 ms , que finalment, igual que en el cas del sensor de cisallament, determinarà l'escala més petita que podrem resoldre. La precisió d'aquest tipus de sensors és relativament baixa (0.1°C) i per això sovint els perfiladors també contenen sensors de precisió de temperatura, tal com hem comentat en introduir l'apartat 3.2, que ens permetran caracteritzar el camp mitjà. Així, considerant velocitats de caiguda entre 0.2 i 0.5 ms , obtenim resolucions d'entre 714 i 286 dades per metre. En concret, en la campanya en què es van mesurar les estructures de triple difusió mostrades en el capítol 4, la velocitat límit de baixada va ser de 0.4 ms , fet que implica una resolució espacial de 357 dades per metre, això és, una dada de temperatura cada 3 mm .

En general, l'escala espacial més petita que cal resoldre experimentalment dependrà del que mesurem. Així, en el cas de les fluctuacions turbulentes de la velocitat (de les quals depenen també els fluxos dels escalars), l'escala mínima és determinada per l'anomenat *nombre d'ona de Kolmogorov*, $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$, o més correctament per l'escala espacial vinculada, $\eta = 2\pi/k_d$. Tanmateix, ja hem dit que en aquest estudi hem treballat sobretot amb dades de temperatura, i en aquest cas el nombre d'ona equivalent al de Kolmogorov és el de Batchelor, $k_{dT} = (\varepsilon/\nu\kappa_T^2)^{1/4}$, i l'escala espacial corresponent, $\eta_T = 2\pi/k_{dT}$. En general, per a cada cas particular es compleix que $k_{dT} = k_d \text{Pr}^{1/2}$, on Pr és el nombre de Prandtl, que per al cas de l'aigua a 20°C és $\text{Pr} = (\nu/\kappa_T) \approx 7$, i per tant el

nombre d'ona de Batchelor és més gran que el de Kolmogorov, o, el que és equivalent, si treballem amb la temperatura tindrem fluctuacions turbulentes a escales més petites que les corresponents a les fluctuacions de la velocitat. Anàlogament, si volguéssim mesurar el camp de salinitat de microestructura tindriem $k_{ds} = (\varepsilon / \nu \kappa_S^2)^{1/4}$, amb l'escala més petita, que s'hauria de resoldre igual a $\eta_S = 2\pi / k_{ds}$, de manera que $k_{dT} = k_{ds}(\tau_S)^{1/2}$, on $\tau_S = \kappa_S / \kappa_T$ és el nombre de Schmidt, que per a sals habituals en aigua a 20 °C val $\tau_S \approx 10^{-2}$. Per tant, pel que fa a la relació entre les escales més petites afectades per les fluctuacions turbulentes dels diferents escalars, tenim que $\eta_T = \eta \text{Pr}^{-1/2}$ i $\eta_S = \eta_T \tau_S^{1/2}$. Pel que fa al valor absolut d'aquestes escales, si considerem per exemple una velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta típica de la barreja en limnologia, $\varepsilon = 10^{-8} \text{W/kg}$, tindrem que $\eta \approx 2 \text{ cm}$, i per tant $\eta_T \approx 0.8 \text{ cm}$ i $\eta_S \approx 0.08 \text{ cm}$. En aquest treball, però, el nivell de dissipació de l'energia cinètica turbulenta serà inferior, i les escales que cal resoldre són lleugerament superiors i, per tant, més grans que la resolució espacial màxima que obtenim amb el sensor de temperatura (3 mm).

3.2.3. Altres mesures de variables turbulentes

Recentment s'ha començat a introduir la mesura turbulenta del camp de salinitat a partir de mesures de microestructura de temperatura i conductivitat elèctrica (Nash i Moum, 2002). La dificultat inherent en aquestes mesures és que les escales espacials més petites de la salinitat generalment arriben fins a les dècimes de mil·límetre, tal com hem comentat en el subapartat anterior. Tanmateix, el nivell de soroll en aquestes mesures sol ser menor.

Durant la dècada del 1980 també es van començar a desenvolupar els anomenats ADCP (*acoustic Doppler current profilers*), l'ús dels quals s'ha generalitzat en els últims anys gràcies a la seva comercialització. Aquests aparells ens permeten mesurar un perfil del camp de velocitats a partir del rebot d'ones acústiques i l'efecte Doppler. Els ADCP es fan treballar normalment fixats sobre una superfície (el fons del sistema aquàtic estudiat

o una plataforma en superfície) o en la part inferior de l'embarcació, però en tot cas no es desplacen a través de la columna d'aigua. Tot i això, aquests tipus de mesures permeten obtenir el vector velocitat (tres components) en funció de la coordenada vertical. La resolució espacial dels perfils de velocitat obtinguts amb els ADCP està en relació inversa amb el gruix espacial mostrejat. Per tant, un mostreig focalitzat sobre una regió molt petita en la vertical permet incrementar la resolució en aquesta regió i, fins i tot, mesurar la turbulència, si la freqüència del mostreig és prou elevada.

Un cas límit d'ADCP són els ADV (*acoustic Doppler velocimeter*), que, basant-se en el mateix principi físic, mesuren les tres components del camp turbulent de velocitat en un únic punt de l'espai. La tendència futura en aquest tipus d'instruments s'encaminarà a obtenir mesures de turbulència en un domini espacial més gran (Simpson et al., 2005), i per tant disposarem de mesures directes dels fluxos en sistemes aquàtics, tal com de fet es fa a l'atmosfera des de fa temps.

3.2.4. Mesures de petita escala de la terbolesa

El turbidímetre de dispersió òptica utilitzat en aquest treball va ser subministrat pel fabricant Alec Electronics i incorporat al perfilador MSS (Wolk et al., 2002 i 2005). El sensor emet llum i, a partir del seu retorn (*backscatter*), determina la terbolesa. L'emissor consta de sis fonts, distribuïdes en una regió circular de 20 mm de diàmetre, que emeten llum entre 400 i 480 nm i la focalitzen sobre un punt situat a 15 mm del receptor. La resolució espacial d'aquest sensor és d'uns 4 mm quan el perfilador cau a una velocitat de 50 cm/s; per tant, encara que generalment se solen caracteritzar aquests dispositius com a sensors de precisió, de fet aquesta resolució espacial correspondria al rang de microestructura, però no seria suficient per resoldre les escales més petites del camp de concentració (igual que per a la salinitat submil·limètrica).

El senyal de retorn, però, no depèn només de la concentració de partícules, sinó també de la seva forma, mida i, fins i tot, característiques fisicoquímiques. Per això, per a aquest treball el turbidímetre va ser calibrat dins un contenidor amb les parets interiors negres, aïllat de la llum de fons del laboratori i utilitzant mostres d'aigua que contenien

el mateix tipus de partícules que es troben sobre el llit fluïditzat de l'estany de Banyoles, que és la zona que estudiarem en el capítol 4. El contenidor era gros, en el sentit que permetia que davant del sensor hi hagués una distància més gran que el volum de control; en el nostre cas aquesta distància era superior als 10 cm. Així mateix, estava equipat amb un dispositiu d'hèlix per mantenir una barreja homogènia arreu del sistema.

Es va repetir l'experiment amb quinze concentracions diferents, que comprenien tot el rang de treball del dispositiu òptic, i en cada un dels casos es va extreure una mostra de 250 cm^3 per calcular la concentració de partícules. Com que les partícules presents a la suspensió tenen diàmetres superiors a $1\ \mu\text{m}$ (Serra et al., 2002), els sòlids d'aquestes mostres van ser filtrats amb filtres de microfibrà amb un diàmetre dels porus d' $1\ \mu\text{m}$ i posteriorment es van assecar en un forn a 100°C durant dues hores. La massa de les partícules es va mesurar amb una balança amb una precisió de 0.0001 g . La relació entre la concentració de partícules en suspensió (C en mg/l) i el senyal del sensor (SS) es representa en la figura 3.2 amb punts, i els errors experimentals de SS es representen amb triangles (els de C són inapreciables en la figura). Com es veu en la figura, C i SS presenten una clara dependència lineal ($r^2 = 0.997$).

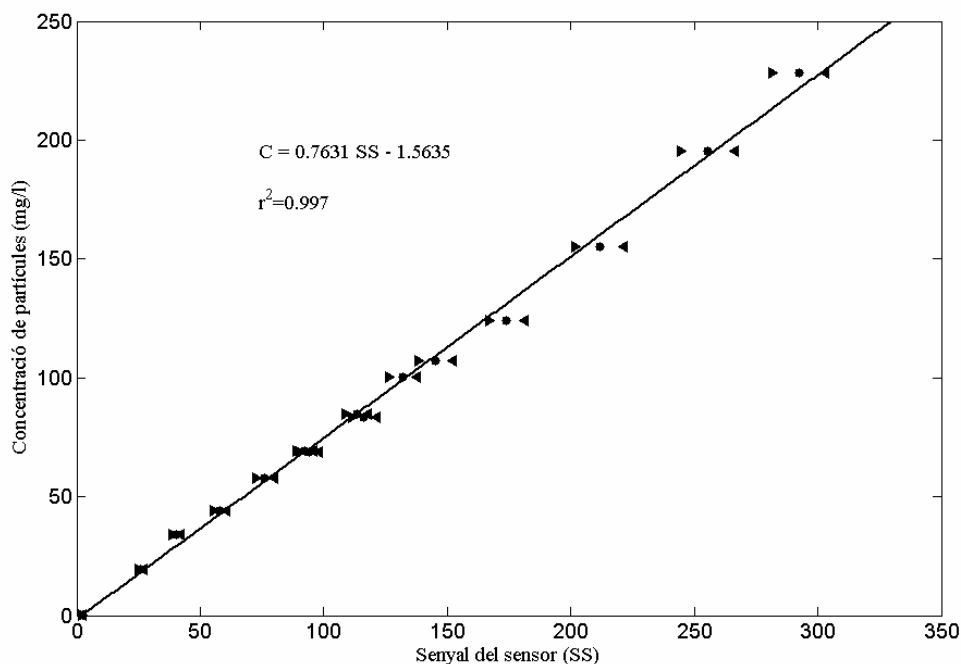


Figura 3.2. Recta de calibratge del turbidímetre òptic.

3.3. Obtenció de l'espectre unidimensional a partir de les mesures. Espectres universals

En l'apartat anterior hem parlat de les mesures de microestructura realitzades amb perfiladors de caiguda lliure. En les regions on es pot assumir que el sistema té una certa homogeneïtat estadística local, les dades obtingudes ens serviran per obtenir els espectres unidimensionals turbulents i, a partir d'aquests espectres, la velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta. Així, en aquest apartat, després de parlar de com s'obté l'espectre experimental de la turbulència, revisarem els models teòrics d'espectres unidimensionals i veurem que comparant-los amb els experimentals s'obté informació física rellevant per determinar l'estat turbulent del sistema. Finalment, el mètode estadístic emprat per ajustar els espectres experimentals a un model teòric es desenvoluparà al llarg de l'apartat 3.4.

Per determinar l'espectre experimental cal, en primer lloc, descompondre la columna d'aigua en petits segments d'una longitud determinada, L_h , en què la turbulència es pot considerar homogènia, i en aquests segments es calculen les correlacions unidimensionals canviant la mitjana sobre la col·lectivitat, que havíem introduït en les expressions 1.44, per una mitjana espacial. La longitud L_h en general depèn del sistema (estratificació i barreja); tanmateix, en una primera aproximació, en limnologia, s'acostuma a considerar segments d'1 m per calcular la correlació unidimensional definida a 1.44, que reproduïm a continuació:

$$f_{\theta}(r_3) = \overline{\theta(x_3)\theta(x_3 + r_3)} \quad (3.1)$$

La barra horitzontal simbolitza la mitjana respecte a tots els punts x_3 dins el segment homogeni. Llavors, a partir de la correlació 3.1, es calcula l'espectre experimental per mitjà d'una transformada de Fourier, tal com s'explicita a 1.45 (Stull, 1988). Tanmateix, els detalls del procediment es poden ignorar, ja que hi ha una gran varietat de programari comercial que permet obtenir l'espectre d'una sèrie espacial. Finalment, tal com detalla Mathieu (2000), si a més es fa la mitjana d'un nombre determinat d'espectres (encara que limitat), corresponents a diferents realitzacions de l'experiment, en què considerem que l'estat turbulent no ha canviat, l'espectre experimental obtingut serà més robust, estadísticament parlant.

Tot i que en el capítol 1 ja hem introduït els espectres tridimensionals i unidimensionals de la velocitat i la temperatura, en aquesta secció repassarem breument el que hem exposat en aquell capítol i farem èmfasi en els aspectes metodològics que ens seran de més interès per a la part experimental d'aquest treball. Seguidament, obtindrem els espectres unidimensionals del cisallament i el d'un camp escalar —com la temperatura o la salinitat— a partir dels models tridimensionals mostrats en el capítol 1.

3.3.1. L'espectre del cisallament

Tal com ja hem fet en el capítol 1, en aquest capítol treballarem amb els espectres i nombres d'ona adimensionalitzats, els quals —igual que en els apartats 1.6.1 i 1.7— indicarem amb un barret. Així, el nombre d'ona tridimensional, l'unidimensional, l'espectre tridimensional de l'energia i l'espectre transversal, utilitzant els criteris 1.24, prenen les formes sense dimensions \hat{k} , \hat{k}_3 , $\hat{E}(\hat{k})$ i $\hat{F}_{trans}(\hat{k}_3)$, respectivament. Cal remarcar que, encara que les expressions adimensionalitzadores (1.24) s'han introduït per al cas dels nombres d'ona i l'espectre tridimensional, també les utilitzarem amb els nombres d'ona i l'espectre unidimensional (en aquest cas el transversal).

Quan utilitzem aquestes magnituds adimensionals, la relació 1.41b entre l'espectre tridimensional i l'unidimensional (en condicions d'isotropia) segueix sent vàlida, de manera que:

$$\hat{F}_{trans}(\hat{k}_3) = \frac{1}{2} \int_{\hat{k}_3}^{\infty} \frac{\hat{E}(\hat{k})}{\hat{k}} \left(1 + \frac{\hat{k}_3^2}{\hat{k}^2} \right) d\hat{k} \quad (3.2)$$

Anàlogament, tal com hem vist en l'expressió 1.50, l'espectre de cisallament i el transversal es relacionen amb $F_{cis}(k_3) = k_3^2 F_{trans}(k_3)$. Si definim l'espectre de cisallament adimensional $\hat{F}_{cis}(\hat{k}_3)$ en la forma següent:

$$F_{cis}(k_3) = (\varepsilon^3 / \nu)^{1/4} \hat{F}_{cis}(\hat{k}_3) \quad (3.3)$$

a partir d'1.50 i les formes adimensionals dels espectres de cisallament i de l'espectre transversal —donades a 1.24 i 3.3—, trobem una expressió formalment idèntica a 1.50 i que pren la forma:

$$\hat{F}_{cis}(\hat{k}_3) = \hat{k}_3^2 \hat{F}_{trans}(\hat{k}_3) \quad (3.4)$$

Finalment, considerant la condició de normalització (1.52), justament amb les adimensionalitzacions mostrades, tenim que:

$$\int_0^\infty \hat{F}_{cis}(\hat{k}_3) d\hat{k}_3 = 2/15 \quad (3.5)$$

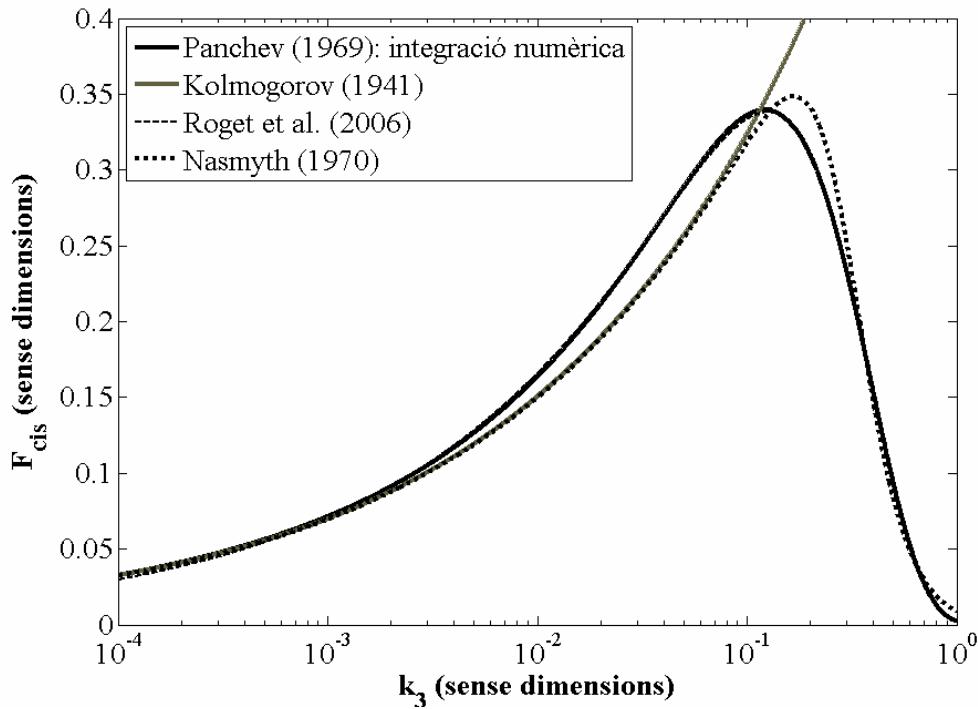


Figura 3.3. Espectre del cisallament adimensional, i en condicions isòtropes, en funció del nombre d'ona adimensional. Així, el nombre d'ona sense dimensions igual a la unitat equival en forma dimensional al nombre d'ona de Kolmogorov k_d .

Si apliquem la discussió anterior a l'espectre unidimensional de Panchev i Kesich per a la velocitat (1.26), trobem que la integral (3.2) no té solució analítica, i per tant hem hagut de recórrer a la integració numèrica per obtenir el corresponent espectre de cisallament. El resultat que hem obtingut d'aquesta integració s'ha presentat en la figura 3.3 amb traçat continu negre, on es pot veure que el pic de l'espectre de cisallament es produeix aproximadament en un ordre de magnitud per sota de k_d (de fet a $0.12 k_d$). Recordeu que en l'apartat 1.6.2 hem determinat que el pic de l'espectre de dissipació es produeix en un nombre d'ona més petit que el de Kolmogorov, k_d (de fet a $0.2 k_d$). De fet, l'espectre del cisallament es pot considerar nul per a nombres d'ona

superiors a k_d . Així, si volem mesurar el camp turbulent del cisallament, ho hem de fer amb una resolució espacial igual a $\eta = 2\pi / k_d$ —tal com hem avançat en l'apartat 3.2.2.

En aquesta figura també s'ha representat l'espectre de Kolmogorov (1941), amb traçat continu clar, que hauria de ser vàlid per als nombres d'ona més baixos representats en la figura, això és, al rang inercial. Comparant ambdós espectres, veiem que efectivament coincideixen per a \hat{k}_3 petits. L'espectre de Kolmogorov, que ja havíem presentat en el capítol 1 amb la forma dimensional (1.23), pren la forma adimensional $\hat{E}(k) = C\hat{k}^{-5/3}$ —utilitzant 1.30—. Llavors, considerant 3.2, es pot calcular l'espectre transversal, que pren la forma següent:

$$\hat{F}_{trans}(\hat{k}_3) \Big|_{\text{rang inercial}} = C \frac{24}{55} \hat{k}_3^{-5/3} \quad (3.6a)$$

Però l'espectre representat en la figura és el del cisallament per al rang inercial, el qual, a partir de 3.6a i per mitjà de l'expressió 3.4, pren la forma següent:

$$\hat{F}_{cis}(\hat{k}_3) \Big|_{\text{rang inercial}} = C \frac{24}{55} \hat{k}_3^{1/3} \quad (3.6b)$$

on el valor $24C/55$ és l'anomenada *constant transversal de Kolmogorov*, i la constant tridimensional és $C = 1.6$, tal com hem detallat en el capítol 1.

En la mateixa figura, també s'hi ha representat l'ajust que Roget et al. (2006) van proposar com a aproximació analítica a l'espectre de cisallament de Panchev i Kesich:

$$\hat{F}_{cis}(\hat{k}_3) = 0.9372 \hat{k}_3^{0.3748} \exp(-6.011 \hat{k}_3^{1.548}) \quad (3.7)$$

Els quatre coeficients de 3.7 difereixen lleugerament dels que es van publicar, ja que posteriorment es va optimitzar el mètode d'ajust. En la figura 3.3 aquesta forma analítica i l'espectre de Panchev s'encavalquen quasi absolutament. Per tant, si acceptem el model de Panchev i Kesich (1969), i darrerament sembla que la tendència entre el col·lectiu oceanogràfic apunta en aquest sentit (Gregg, 1999), la forma analítica 3.7 ens permet utilitzar mètodes —com el que presentarem en la secció 3.5— per determinar de manera automàtica la dissipació d'energia dels sistemes aquàtics perfilats verticalment.

Finalment, l'espectre experimental de Nasmyth (1970), la forma analítica del qual donen Prandke et al. (2000), pren la forma següent:

$$\hat{F}_{cis}(\hat{k}_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{8.05 \left(\frac{\hat{k}_3}{2\pi}\right)^{1/3}}{1 + \left(\frac{20\hat{k}_3}{2\pi}\right)^{3.7}} \quad (3.8)$$

Aquest espectre també s'ha representat en la figura 3.3 i, com es pot veure, difereix força de l'espectre de Pachev i Kesich per a nombres d'ona petits.

Ara arriba el moment de dimensionalitzar l'espectre teòric de cisallament per mitjà de l'expressió 3.3, per ajustar-ho a dades experimentals. Fins aquí hem utilitzat les unitats de nombres d'ona més usuals en física, els rad/m , això és, amb nombre d'ona cíclic, però en l'àmbit de l'oceanografia generalment es treballa amb $cpm = m^{-1}$. Així, en la figura 3.4 el nombre d'ona representat és $K = k_3/(2\pi)$ (en cpm) i l'espectre de cisallament és $S_{cis} = 2\pi F_{cis}$ (en s^{-2}/cpm), perquè es compleixi la condició de normalització (1.52), escrita ara en la forma no cíclica com a:

$$\varepsilon = \frac{15}{2} \nu \int_0^\infty S_{cis}(K) dK \quad (3.9)$$

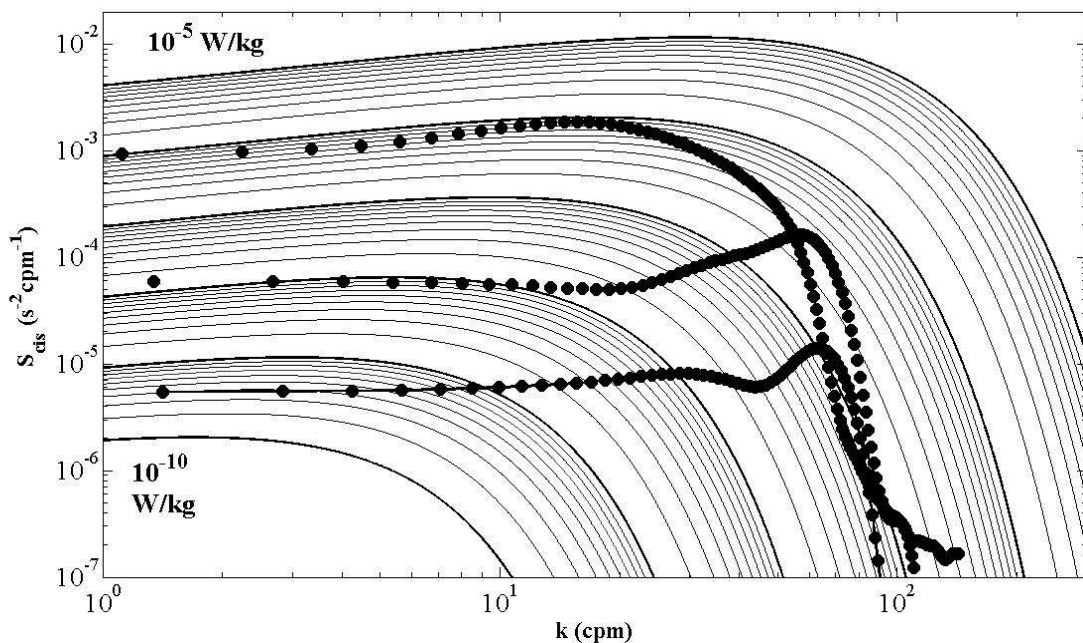


Figura 3.4. Espectre de cisallament en funció del nombre d'ona per a diferents dissipacions. Així mateix, es representen tres espectres experimentals amb diferents valors dissipatius.

En la figura 3.4 podem veure l'espectre de cisallament amb el nombre d'ona no cíclic per a diferents velocitats de dissipació d'energia cinètica turbulenta, juntament amb tres espectres experimentals. Podem veure que els espectres experimentals segueixen bé la forma de l'espectre teòric per a un cert rang dels nombres d'ona més baixos. Per a un cert rang elevat de nombres d'ona, l'espectre és afectat pel soroll ambiental i finalment acaba anant cap a zero en el límit de resolució del sensor.

Tot i que l'obtenció de l'espectre de cisallament ha format part del treball que presentem aquí, per a l'estudi de la turbulència de les mesures presentades en el capítol 4 l'amplitud del senyal de cisallament de petita escala és comparable a l'amplitud del soroll, i per tant hem hagut de recórrer a les mesures de microestructura tèrmica per determinar la velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta. De l'espectre tèrmic turbulent en parlem seguidament.

3.3.2. L'espectre unidimensional d'un camp escalar

Anàlogament al que hem comentat en la secció anterior respecte a l'espectre transversal de la velocitat, la relació 1.47 —que ens permet obtenir l'espectre unidimensional de l'escalar $F_\theta(k_3)$ a partir de l'espectre tridimensional $E_\theta(k)$ en condicions isòtropes— és igualment aplicable quan considerem les magnituds adimensionals \hat{k} , \hat{k}_3 , $\hat{E}_\theta(\hat{k})$ i $\hat{F}_\theta(\hat{k}_3)$. Si seguim els criteris per adimensionalitzar que es donen en l'expressió 1.30 i considerem la relació 1.56 —de normalització de l'espectre unidimensional—, trobem:

$$1 = 6 \int_0^\infty \hat{k}_3^2 \hat{F}_\theta(\hat{k}_3) d\hat{k}_3 \quad (3.10)$$

En aquest marc, si considerem els espectres adimensionals de Batchelor (1.32) i Kraichnan (1.33) en tres dimensions, a partir d'1.47 obtenim que les seves formes unidimensionals són:

$$\text{Batchelor: } \hat{F}_\theta(\hat{k}_3) = q \left[\frac{\exp(-q\hat{k}_3^2)}{\hat{k}_3} - \sqrt{q\pi} (1 - \text{erf}(\sqrt{q}\hat{k}_3)) \right] \quad (3.11)$$

$$\text{Kraichnan : } \hat{F}_\theta(\hat{k}_3) = q \frac{\exp(-\sqrt{6q}\hat{k}_3)}{\hat{k}_3} \quad (3.12)$$

on la funció d'error està definida en la forma:

$$\text{erf}(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-x^2) dx \quad (3.13)$$

i els valors del paràmetre turbulent q ja s'han discutit en l'apartat 1.6.2.

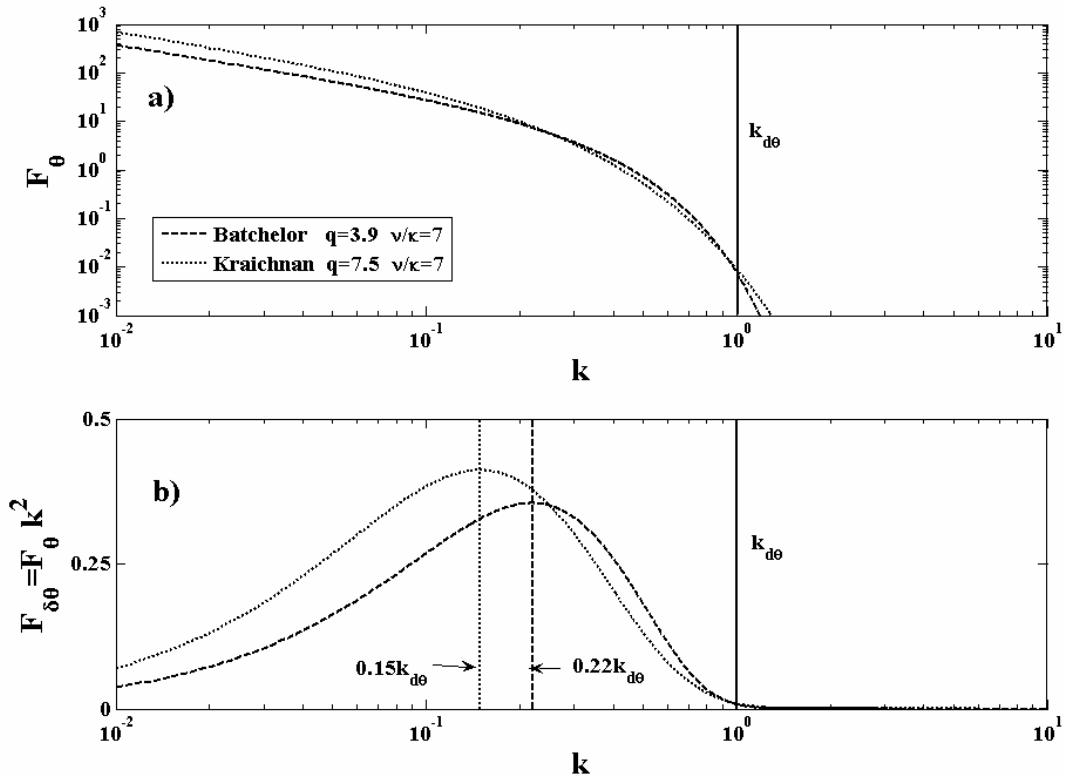


Figura 3.5. a) Espectres unidimensionals (i adimensionals) de Batchelor (1959) i Kraichnan (1968), amb els valors del paràmetre turbulent q que es van donar en l'apartat 1.7, i avaluats per al cas tèrmic a uns 20 °C, amb $Pr = \nu / \kappa_T \approx 7$. b) Espectre unidimensional del gradient per als mateixos casos.

En la figura 3.5.a s'han representat ambdós models i s'hi ha indicat l'escala de Batchelor, $k_{d\theta}$. En la figura 3.5.b es mostra l'espectre unidimensional del gradient de temperatura ($\hat{F}_{\delta\theta} = \hat{F}_\theta \hat{k}_3^2$), el qual, dimensionalitzat i integrat d'acord amb 1.56, ens dóna la dissipació de variància (ε_θ). Efectivament, i tal com hem comentat en altres seccions d'aquest capítol, veiem que per a nombres d'ona superiors al de Batchelor ($\hat{k}_{d\theta} = 1$) l'amplitud de l'espectre unidimensional de l'escalar es pot considerar nul·la.

D'altra banda, en la figura 3.5.b es veu que els espectres del gradient tenen els seus màxims en un nombre d'ona menor que el de Batchelor, tot i que en ambdós models aquests màxims són lleugerament diferents: $0.22 k_{d\theta}$ en el cas de l'espectre de Batchelor i $0.15 k_{d\theta}$ en el de Kraichnan. Per a aquest treball, s'han utilitzat ambdós espectres per determinar les dissipacions i s'ha constatat que els valors obtinguts difereixen en menys d'un 30 %.

3.4. Ajust de l'espectre experimental a un model teòric: estimació de la màxima versemblança (EMV)

En aquest apartat presentem un mètode robust per ajustar un espectre obtingut a partir de dades experimentals a un model d'espectre teòric i així trobar els paràmetres físics dels quals depèn aquest últim. Si limitem l'anàlisi al cas de l'espectre d'un camp escalar, aquests paràmetres són la dissipació d'energia cinètica turbulenta (ε) i la dissipació de variància de l'escalar (ε_θ). Encara que ε_θ es pot obtenir integrant amb 1.56, el valor de ε només es pot obtenir ajustant l'espectre experimental de l'escalar al model teòric corresponent.

El valor de ε també es pot obtenir a partir de l'espectre del cisallament, integrant amb l'expressió 3.9. Però en aquest cas el soroll ambiental present en els nombres d'ona més grossos de l'espectre del cisallament (figura 3.4) no ens permetria obtenir el valor real de ε . Per obtenir ε per integració de l'espectre del cisallament caldria resoldre bé, i sense soroll, tot el rang d'escales turbulentes, cosa que no sempre és possible. Llavors, si es resol bé un rang de l'espectre i s'ajusta a un model teòric, aquest ens permet inferir l'espectre en el rang que no podem resoldre i, per tant, obtenir-ne finalment la informació necessària. De totes maneres, encara que s'han mostrat tres espectres experimentals en la figura 3.4, el procediment d'ajust de l'espectre del cisallament a un model teòric no s'ha desenvolupat en aquest text, ja que ens hem centrat en l'ajust de l'espectre tèrmic unidimensional.

L'ajust d'un espectre teòric a les mesures experimentals és un mètode habitual d'obtenció de variables turbulentes que generalment s'ha abordat per mitjà de mètodes del tipus mínims quadrats (vegeu per exemple Luketina i Imberger, 2001). Un mètode alternatiu és el que proposen Ruddick et al. (2000), que consideren una certa variabilitat estadística entre l'espectre experimental, que indicarem amb $S_{\text{exp}}(K)$, i el teòric, que serà mínima per al cas del millor ajust. Concretament, a partir de l'estimació de la màxima versemblança (EMV, o MLE en anglès, *maximum likelihood estimation*), aquests autors troben l'espectre teòric, $S_{\text{teo}}(K, k_{d\theta}, \varepsilon_\theta)$, que més s'ajusta a l'experimental $S_{\text{exp}}(K)$. Més concretament, proposen de considerar que l'espectre teòric, al qual es vol ajustar l'espectre experimental, sigui el resultat de sumar l'espectre obtingut a partir d'un dels models de turbulència presentats en l'apartat 3.3, que escriurem com a $S_\theta(K, k_{d\theta}, \varepsilon_\theta)$, i l'espectre del soroll, $S_s(K)$, en la forma:

$$S_{\text{teo}}(K, k_{d\theta}, \varepsilon_\theta) = S_\theta(K, k_{d\theta}, \varepsilon_\theta) + S_s(K) \quad (3.14)$$

Tot i que hem comentat que l'espectre de temperatura depèn tant de ε_θ com de ε (a través de $k_{d\theta}$), aplicarem el mètode de l'EMV considerant només la variabilitat respecte a ε , ja que ε_θ l'obtidrem directament a partir de l'espectre experimental utilitzant la integral 1.56. Complementàriament, i considerant que no sempre tindrem espectres experimentals que siguin comparables amb models universals, es defineixen diversos indicadors que ens serviran per tenir un criteri numèric a l'hora de rebutjar els espectres experimentals que no s'ajustin bé al model teòric.

Tot i que els conceptes sobre els quals es basa l'EMV es poden trobar en obres com les de Priestley (1981) o Eliason (1993), aquí els resumim breument. Suposem que la magnitud y té una variabilitat estadística reflectida en una distribució contínua de probabilitat $f(y, a)$, on a és un paràmetre (o una família de paràmetres) que volem determinar. Si fem N mesures independents de la magnitud y , això és $\{y_i; i = 1, 2, \dots, N\}$, resolta sobre intervals de classe de mida Δy , llavors podem estimar la probabilitat d'obtenir la mesura y_i com a $p_i = f(y_i)\Delta y$, de manera que la funció de versemblança, $\Lambda(a)$, es defineix com la probabilitat d'obtenir les N mesures independents esmentades:

$$\Lambda(a) \equiv \prod_{i=1}^N p_i = \prod_{i=1}^N f(y_i, a) \Delta y \tag{3.15}$$

Llavors, considerem que la millor estimació del paràmetre a és aquella que fa màxima la funció de versemblança, i l'anomenarem \hat{a} (amb un barret). Tanmateix, en lloc de maximitzar $\Lambda(a)$, sovint, i de manera absolutament equivalent, es maximitza el seu logaritme, que designarem com a $\lambda(a)$:

$$\lambda(a) = \ln(\Lambda(a)) = \sum_{i=1}^N \ln(f(y_i, a)) + N \ln(\Delta y) \tag{3.16}$$

Per maximitzar 3.16 es pot prescindir del terme constant $N \ln(\Delta y)$.

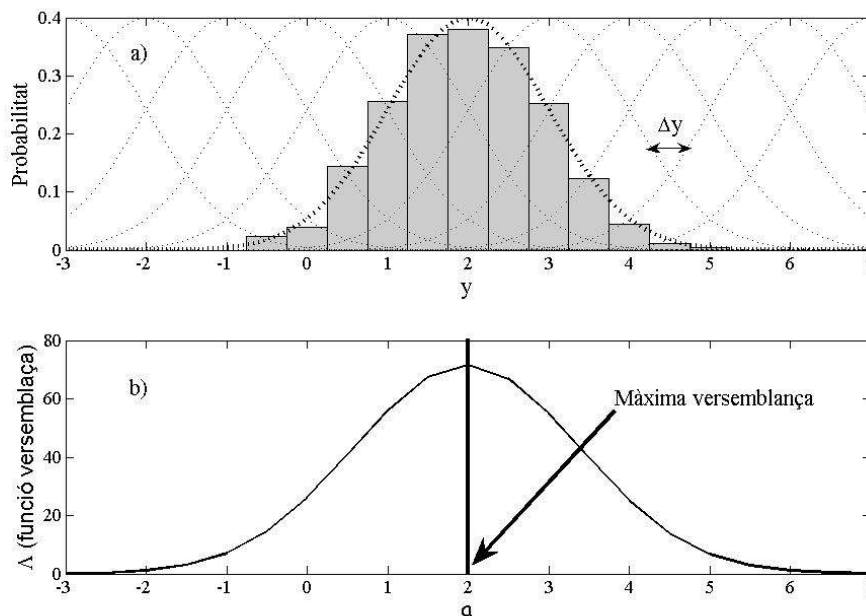


Figura 3.6. a) Histograma de les 500 mesures realitzades sobre y , i en discontinu es representa la probabilitat donada a 3.17 per a diversos valors del paràmetre a . b) Funció de versemblança en funció del paràmetre a , calculada amb 3.15.

Com a exemple, en la figura 3.6.a es presenta l’histograma corresponent a 500 mesures de la magnitud y , amb la probabilitat normalitzada i amb intervals de classe $\Delta y = 0.5$. Si considerem que la magnitud ha de seguir una distribució de tipus normal en què l’únic paràmetre lliure és l’esperança matemàtica a , ja que la desviació estàndard σ està fixada com a paràmetre en aquest exemple amb $\sigma = 1$, tenim que la funció f , introduïda prèviament, depèn de y i del paràmetre a en la forma:

$$f(y, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.17)$$

Aquesta funció s'ha representat en la figura 3.6.a en discontinu per a diversos valors de a . Seguidament s'ha calculat la funció de versemblança $\Lambda(a)$, definida a 3.15, per a cada valor de a i s'ha representat en la figura 3.6.b. Com es pot veure, $\Lambda(a)$ mostra un màxim quan a és igual a 2, i per tant la millor estimació del paràmetre a , que és determinada per \hat{a} , correspon a $\hat{a} = 2$. La distribució de probabilitat (3.17) amb l'esperança matemàtica $a = 2$ es representa en la figura 3.6.a amb un traç discontinu però més intens. D'entre totes les distribucions de probabilitat representades en discontinu en la figura 3.6.a, la que mostra més semblança amb les dades de l'exemple és la corresponent a una esperança matemàtica $a = 2$ —traçat discontinu més intens—.

En termes generals, donat un conjunt de N dades, si considerem que segueixen una distribució normal —equació 3.17— amb esperança a i desviació estàndard σ , podem calcular el logaritme de la funció de versemblança amb 3.16:

$$\lambda(a, \sigma) = -N \ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - a)^2 \quad (3.18)$$

Buscant el màxim de 3.16 respecte als dos paràmetres, trobem l'estimació de màxima versemblança, amb els valors dels paràmetres que són la mitjana i la desviació estàndard de la població:

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{a})^2 \quad (3.19)$$

Jenkins i Watts (1968) argumenten quin tipus de distribució té la variabilitat estadística de l'espectre experimental S_{exp} en funció del mètode de càlcul d'aquest espectre, en el cas que el camp turbulent mesurat prengui una distribució normal de probabilitat. Seguint aquest treball, Ruddick et al. (2000) proposen que la distribució de probabilitat per a la variabilitat entre un espectre experimental i el model teòric té la forma següent:

$$f(S_{\text{exp}}) = \frac{d}{S_{\text{teo}}} \chi_d^2 \left(\frac{S_{\text{exp}} d}{S_{\text{teo}}} \right) \quad (3.20)$$

On χ_d^2 és la distribució contínua de probabilitat khi al quadrat amb d graus de llibertat, distribució amb mitjana d i variància $2d$, i els factors multiplicadors al davant fan que la

distribució estigui normalitzada a 1. Llavors la funció logaritme de la versemblança la podem escriure com a:

$$\lambda(k_{d\theta}) = \sum_{i=1}^N \text{Ln} \left[\frac{d}{S_{\theta}(K_i, k_{d\theta}, \varepsilon_{\theta}) + S_s(K_i)} \chi_d^2 \left(\frac{S_{\text{exp}}(K_i)d}{S_{\theta}(K_i, k_{d\theta}, \varepsilon_{\theta}) + S_s(K_i)} \right) \right] \quad (3.21)$$

El paràmetre amb què maximitzarem 3.21 és el nombre d'ona de Batchelor, $k_{d\theta}$, que depèn de ε .

En la figura 3.7.a es pot veure un espectre experimental (en vermell), juntament amb l'espectre teòric que té màxima la versemblança (en blau). L'espectre teòric utilitzat és el de Batchelor (1959) més el model de soroll, que en aquest cas és de tipus blanc (espectre constant). En la figura 3.7.b es mostren els diferents paràmetres estadístics que s'utilitzen com a criteris per acceptar o rebutjar l'ajust (Sánchez, 2001), que es comenten a continuació.

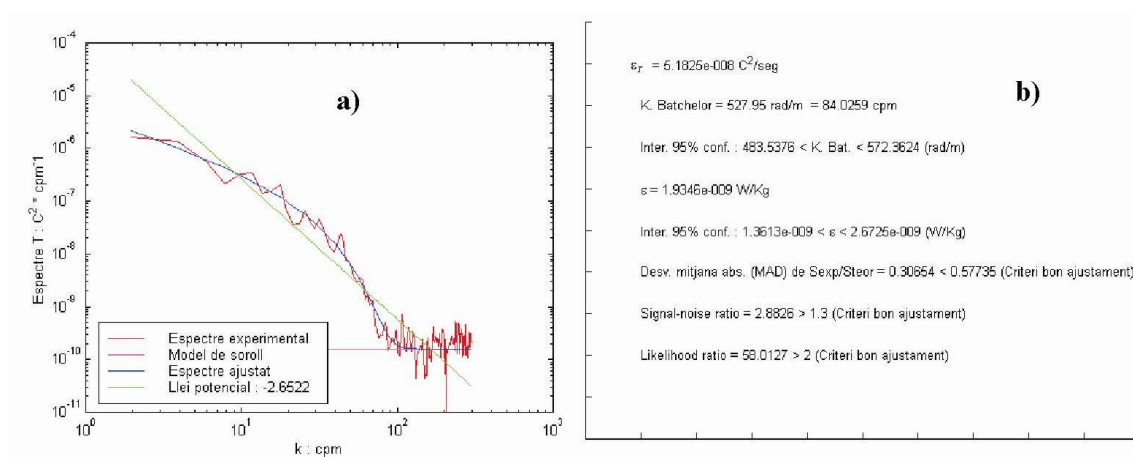


Figura 3.7. a) Exemple d'un ajust d'espectre unidimensional de la temperatura al model teòric de Batchelor (1959). b) Dissipacions obtingudes i paràmetres estadístics de l'ajust.

El primer criteri consisteix a verificar que l'espectre experimental no tingui un comportament de tipus potencial. En la figura 3.7.a es representa (en verd) la funció potencial que s'ajusta més bé a l'espectre experimental, en el rang on aquest supera el soroll, i que simbolitzarem amb S_{pot} . Noteu que en una representació logarítmica la funció potencial té una aparença lineal. En aquest marc es defineix el paràmetre que anomenem LR (*likelihood ratio*) com a:

$$LR \equiv \log_{10} \left(\frac{\Lambda(S_{teo})}{\Lambda(S_{pot})} \right) \quad (3.22)$$

És a dir, com el logaritme del quocient entre les funcions de versemblança corresponents al millor ajust de l'espectre de Batchelor, S_{teo} , i al millor ajust d'una dependència potencial. Llavors, sobre la base d'aquest paràmetre el criteri utilitzat és validar l'ajust quan $LR > 2$.

Un segon paràmetre estadístic és l'SNR (*signal noise ratio*), definit com a:

$$SNR \equiv \log_{10} \left(\frac{S_{exp}}{S_s} \right) \quad (3.23)$$

Aquest paràmetre es defineix amb la intenció de rebutjar senyals amb espectres experimentals tan pròxims al model de soroll que no és possible extreure'n informació. A 3.23 veiem que aquest paràmetre es defineix com el logaritme de la mitjana del quocient entre l'espectre experimental i el model de soroll. El criteri d'acceptació de l'ajust es fixa en $SNR > 1.3$.

Finalment, un tercer paràmetre estadístic és el que anomenarem *MAD* (*mean absolute deviation*), que es defineix a partir de la desviació mitjana absoluta (simbolitzada amb DMA) del quocient entre l'espectre experimental i l'espectre teòric amb màxima versemblança:

$$MAD = DMA(S_{exp} / S_{teo}) \quad (3.24)$$

El criteri per acceptar l'ajust és que $MAD < \sqrt{2/d}$, on d recordem que és el nombre de graus de llibertat de la distribució, khi, que Sánchez (2001) va fixar igual a 6 a partir del comportament estadístic d'un gran nombre d'espectres experimentals.

3.5. Escales espacials i estructura de la turbulència

En els estudis de turbulència en sistemes aquàtics naturals és habitual l'ús de diferents escales espacials que determinen les característiques del règim turbulent sobre la base de quines són les forces que dominen. Així, per exemple, l'escala d'Ozmidov ens dona

una mesura de l'escala en què la força de flotabilitat afecta la inercial i, per tant, on la turbulència deixa de ser isòtropa. Anàlogament, abans hem parlat de l'escala de Kolmogorov, que hem relacionat amb l'escala en què l'energia cinètica turbulenta es dissipa. Aquestes escales s'anomenen dinàmiques i són escales teòriques que no ens diuen res de l'estructura real del flux turbulent. En canvi, l'escala de Thorpe, que utilitzarem en aquest treball i que introduïm en l'apartat 3.5.1, sí que ens permet caracteritzar l'estructura de la turbulència que observem, i en aquest cas parlariem d'escales cinemàtiques. D'altra banda, en l'apartat 3.5.2 introduïrem l'anàlisi d'ondetes o *wavelets*, que també ens permeten caracteritzar l'estructura de la turbulència i determinar-ne l'espectre. En general, les eines matemàtiques i els conceptes introduïts en aquesta secció s'utilitzaran en el capítol 4 per caracteritzar el règim multidifusiu mesurat a l'estany de Banyoles.

3.5.1. L'escala de Thorpe

L'escala de Thorpe s'obté a partir dels anomenats *desplaçaments de Thorpe*. Thorpe (1977) va definir els desplaçaments que porten el seu nom com els desplaçaments verticals necessaris per convertir un perfil de densitat mesurat, que contingui inversions locals a causa de la turbulència, en un perfil monòtonament estable. Llavors, l'escala de Thorpe es defineix com la desviació quadràtica mitjana (RMS) d'aquests desplaçaments, calculada en un segment al llarg de la columna d'aigua d'una llargada superior a la del desplaçament màxim. El desplaçament màxim de Thorpe se sol interpretar com la mida del remolí més gros i l'escala de Thorpe com la mida característica dels remolins.

En condicions d'estratificació tènue, un petit soroll en el senyal pot generar un desplaçament de Thorpe gran que no sigui real. Per tant, és molt important com es controla el soroll en el procés de reordenament associat als desplaçaments de Thorpe. Normalment, abans de reordenar el senyal, i considerant la resolució dels sensors, es fixa un llindar per sota del qual el senyal no es reordena. Basant-se també en la idea d'un llindar, Ferron et al. (1998) van proposar de generar un senyal intermedi abans del procés de reordenament; aquest senyal intermedi es construeix a partir del perfil mesurat

i considerant les limitacions instrumentals. Més tard, Piera et al. (2002) van proposar de fer servir les ondetes (comentades en el pròxim apartat) per netejar el senyal abans d'ordenar-lo. En la figura 3.8 es presenta un exemple en què es veu com es reordena un senyal qualsevol, i s'obtenen els desplaçaments de Thorpe a partir dels dos mètodes esmentats. Concretament, en la figura 3.8.a s'ha representat un senyal original (sense filtrar) i l'ordenat (monotonitzat), i en la figura 3.8.c es representen els desplaçaments verticals que han estat necessaris per obtenir el senyal mesurat, a partir del perfil ordenat —això és, els desplaçaments de Thorpe. Les figures 3.8.b i 3.8.d són anàlogues a les figures 3.8.a i 3.8.c, però ara, en comptes d'ordenar el senyal considerant un llinar, s'ha netejat prèviament, fent servir les ondetes, i llavors s'ha reordenat sense considerar cap llinar. Els resultats que es presenten en aquest treball (capítol 4) per a l'escala de Thorpe s'han obtingut traient el soroll amb ondetes, tot i que els resultats obtinguts amb els altres mètodes eren pràcticament iguals.

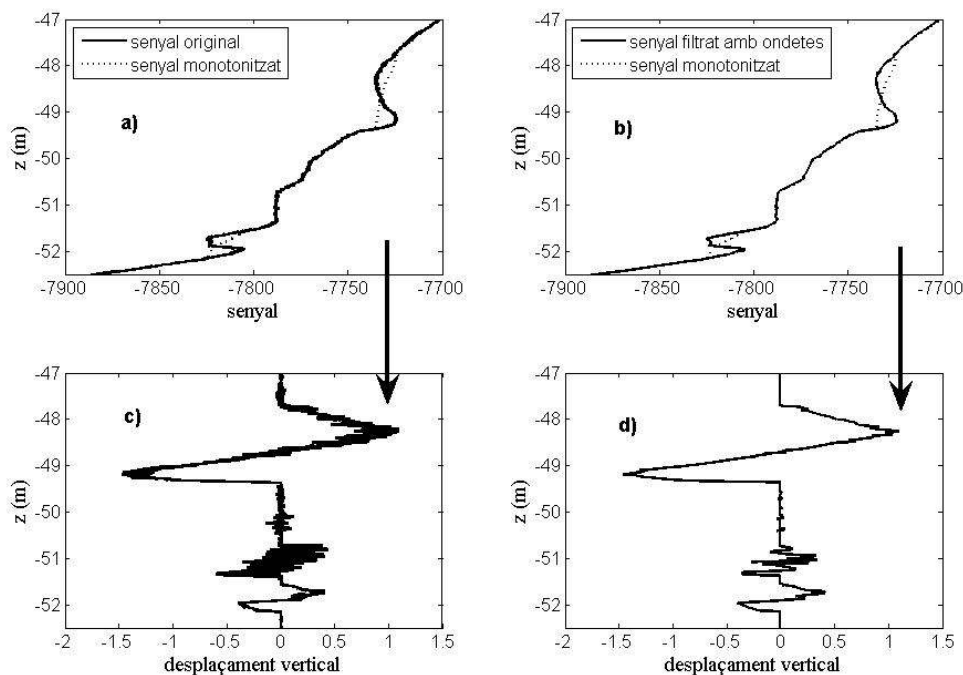


Figura 3.8. *a)* Es mostren un senyal original (en unes unitats arbitràries) i el resultat de monotoniczar-ho. *b)* El mateix que en la figura *a* però amb el senyal filtrat amb ondetes. *c)* Desplaçaments verticals de la figura *a*. *d)* Desplaçament vertical a partir de la figura *b*.

A Roget et al. (2006) es planteja una distribució de probabilitat de tipus Weibull (Weibull, 1951) per als desplaçaments verticals i l'escala de Thorpe, aplicable en zones de turbulència activa. Aquesta distribució originàriament va ser plantejada amb la

intenció de modelitzar la resistència al trencament d'alguns materials, però, assumint una certa analogia amb el procés de *cascading* de l'energia en un sistema turbulent, s'ha proposat de considerar-la escaient per als desplaçaments de Thorpe. En aquest cas, la distribució de probabilitat acumulada o DPA de les escales de Thorpe L_{th} prendria la forma:

$$DPA(L_{th} | \lambda_w, c_w) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{L_{th}}{\lambda_w}\right)^{c_w}\right] \quad (3.25)$$

on λ_w i c_w són els paràmetres de la distribució, anomenats *factor d'escala* i *de forma*, respectivament.

Fixem-nos que la definició de l'escala de Thorpe porta implícit el fet de considerar que hi ha remolins que capgiren el fluid i que nosaltres el tornem a ordenar. Tanmateix, és possible imaginar estructures turbulentes dins d'un flux que no s'hagin generat localment, sinó que hi hagin estat arrossegades. En aquest cas, doncs, no té sentit aplicar el mètode de Thorpe per determinar la mida de les estructures que s'hi observen i cal buscar mètodes alternatius. La descomposició d'un senyal a partir de diferents ondetes és una bona eina per a aquest propòsit, i, de fet, nosaltres la utilitzarem en aquest treball per caracteritzar la mida de les estructures dins d'un plomall convectiu (capítol 4). Les idees subjacents en l'anàlisi d'ondetes s'exposen en l'apartat següent.

3.5.2. Anàlisi multiescalar amb ondetes

Les ondetes són, de fet, elements especialment pensats per a l'anàlisi multiescalar (Foufoula-Georgiou i Kumar, 1994). Concretament, a partir d'una família de funcions que capten la forma del senyal que volem identificar a les diferents escales, un senyal es pot descompondre com la suma d'aquests elements, de manera que els coeficients corresponents ens donen una idea de la importància de les estructures corresponents a cada escala i a cada punt de la sèrie analitzada. Mallat (1989) va proposar un algoritme de filtratge que descompon el senyal en escales grosses i petites. Fent això es generen dos senyals, un que conserva les tendències generals del senyal (coeficients d'aproximació) i un altre que conté les característiques més locals (coeficients de

detall). Aquest procés de descomposició es va fent de manera recursiva sobre els coeficients d'aproximació, deixant intactes els de detall, fins a identificar o localitzar les estructures existents a totes les escales. Per tant, la descomposició d'ondetes ens permet analitzar estructures que varien en l'espai (o el temps) cosa que no permet l'anàlisi de Fourier. En aquest treball hem utilitzat la descomposició en ondetes en el capítol 4 per analitzar l'estructura d'un plomall convectiu i visualitzar la seva variació a mesura que s'allunya de la font de calor.

Si bé la base dels processos de filtratge correspon a les anomenades *transformades discretes d'ondetes* (*discret wavelet transform* o DWT), utilitzades en l'algoritme de filtratge desenvolupat per Mallat (1989), a continuació descriurem l'anomenada *transformada contínua d'ondetes* (*continuous wavelet transform* o CWT), que difereix de la DWT en el fet que la segona considera totes les escales i posicions possibles (continu).

Per desenvolupar la CWT es comença considerant l'anomenada *funció mare*, en la forma $\Psi(z)$. Aquesta funció pot acceptar les operacions de translació a una nova posició p i dilatació segons un factor d'escala e , i generar una nova ondeta centrada a p i dilatada amb $e > 0$:

$$\Psi(z) \xrightarrow{\text{translació } p + \text{dilatació } e} \Psi\left(\frac{z-p}{e}\right) \quad (3.26)$$

Considerant un senyal qualsevol $\theta(z)$, dependent d'una coordenada espacial z , sempre que Ψ compleixi les condicions de ser una ondeta (Perrier et al., 1995), es defineix la transformada contínua d'ondetes $\tilde{\theta}(p, e)$ en la forma:

$$\tilde{\theta}(p, e) = \frac{1}{\sqrt{e}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(z) \Psi^*\left(\frac{z-p}{e}\right) dz \quad (3.27)$$

En la figura 3.9 podem veure una comparació simbòlica entre la transformada de Fourier i la transformada d'ondetes. La transformada de Fourier expressa un senyal donat com un sumatori (integral) de sinusoides de totes les escales (longituds d'ona), i això és així per a tota la sèrie considerada. En canvi, la transformada d'ondetes considera el senyal descompost en estructures –que es correlacionen amb la funció triada (funció mare)– localitzades en l'espai i de diferents escales. Foufoula-Georgiou i

Kumar (1994) presenten una interessant revisió de la utilització d'ondetes en estudis geofísics amb aplicacions, entre altres, a l'estudi de la turbulència.

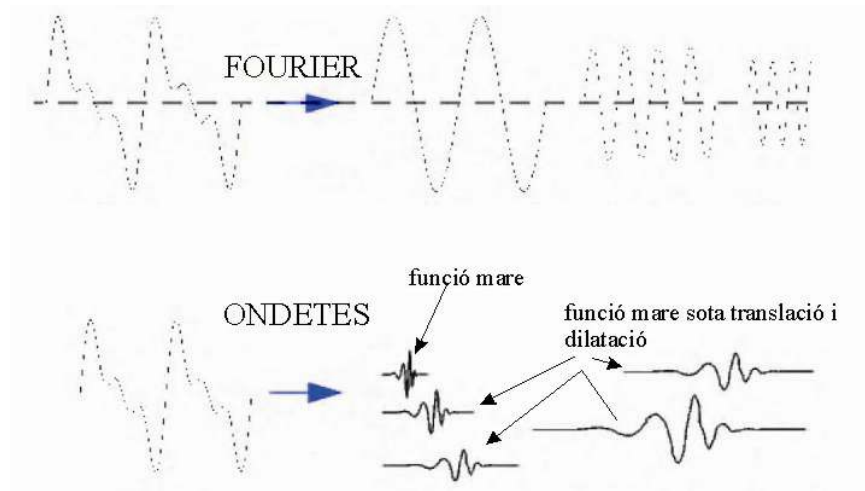


Figura 3.9. Comparació entre la transformada de Fourier i la transformada d'ondetes.

De la mateixa manera que amb la transformada de Fourier, podem definir un espectre d'ondetes i la seva integral sobre totes les escales serà igual a la variància total. Així, l'equació que ens dóna la variància és determinada per (Perrier et al., 1995):

$$\overline{\theta^2} = C_\psi \int_0^\infty \frac{de}{e^2} \int_{-\infty}^\infty |\tilde{\theta}(p, e)|^2 dp \tag{3.28}$$

on la constant C_ψ depèn del tipus d'ondeta utilitzada. Alternativament, podem definir l'espectre $E'(e)$ integrant en la forma:

$$E'(e) = C_\psi \int_{-\infty}^\infty dp |\tilde{\theta}(p, e)|^2 \tag{3.29}$$

Així mateix, sobre cada escala e es pot associar un pseudonombre d'ona K (Perrier et al., 1995), amb una relació del tipus $K = D_\psi / e$, sent D_ψ una constant dependent del tipus d'ondeta utilitzat. Així doncs, amb $dK = -deD_\psi / e^2$, juntament amb 3.28 i 3.29, i definint l'espectre unidimensional amb $E(K) = E'(e) / D_\psi$, trobem:

$$\overline{\theta^2} = \int_0^\infty E(K) dK \tag{3.30}$$

L'expressió 3.30 és anàloga a la identitat de Parseval per als espectres calculats amb la transformada de Fourier.

A la figura 3.10 es representa la forma de l'ondeta Daubechies d'ordre 2 —db2— utilitzada al capítol 4 per analitzar l'estructura d'un plomall convectiu. Aquesta ondeta no té una dependència analítica —s'obté en forma numèrica—. Tanmateix, és l'ondeta ortogonal més senzilla que presenta semblances amb una dependència sinusoidal —al menys a escala local—, tal com s'aprecia a la figura 3.10. Aquesta semblança és precisament la raó per la que hem escollit aquesta família d'ondetes per a l'anàlisi que es presenta a l'apartat 4.2.2 de l'estructura d'un plomall convectiu, que d'altra banda també es podria haver fet amb el mètode clàssic de Fourier, tot i que en aquest cas, hauria calgut primer segmentar els perfils.

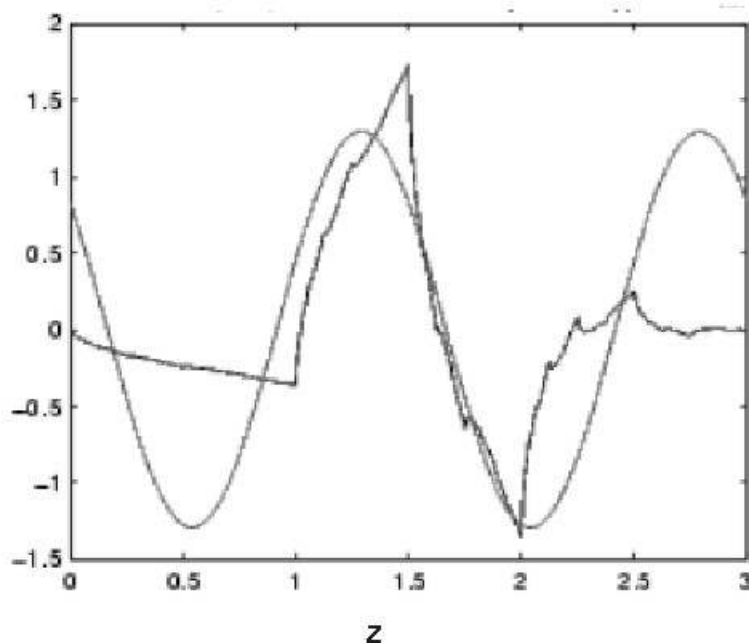


Figura 3.10: Forma de l'ondeta db2 esmentada en el text, on l'eix horitzontal correspon a l'espai (per exemple en metres). També es pot veure la funció sinusoidal que té el mateix nombre d'ona que l'ondeta. En el cas concret d'aquesta figura la longitud d'ona i el nombre d'ona són 1.5 m i 0.6 m^{-1} .

3.6. Bibliografia

Batchelor, G. K. (1959), "Small-scale variation of convected quantities like temperature in a turbulent fluid. Part 1: general discussion and the case of small conductivity", *Journal of Fluid Mechanics*, 5, 113-133.

- Eliason, S. R. (1993), *Maximum likelihood estimation: logic and practice*. Quantitative Applications in the Social Sciences, Sage Publications, 96 p.
- Ferron, B., H. Mercier, K. Speer, A. Gargett i K. Polzin (1998), “Mixing in the Romanche fracture zone”, *Journal of Physical Oceanography*, 28(10), 1929-1945.
- Foufoula-Georgiou, E. i P. Kumar [ed.] (1994), *Wavelets in geophysics*, Academic Press, 373 p.
- Goodman, L., E. Levine i R. Lueck (2006), “On measuring the terms of the turbulent kinetic energy budget from an AUV”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 23(7), 977-990.
- Gregg, M. C. (1999), “Uncertainties and limitations in measuring ϵ and χ ”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 16(11), 1483-1490.
- Jenkins, G. M. i D. G. Watts (1968), *Spectral analysis and its applications*, Holden-Day, 525 p.
- Kolmogorov, A. N. (1941), “Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence”, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, 32, 16-18.
- Kraichnan, R. H. (1968), “Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence”, *Physics of Fluids*, 11, 945-953.
- Lorke, A. i A. Wüest (2002), “Probability density of displacement and overturning length scales under diverse stratification”, *Journal of Geophysical Research*, 107 (3214), 7-1 i 7-11.
- Lozovatsky, I. D., M. Figuera, E. Roget, H. J. S. Fernando i S. Shapovalov (2005), “Observations and scaling of the upper mixed layer in the North Atlantic”, *Journal of Geophysical Research*, 110.
- Lueck, R. G. (2005), “Horizontal and vertical turbulence profilers”, *Marine turbulence, theories, observations and models*, Cambridge University Press, 630 p.
- Luketina, D. A. i J. Imberger (2001), “Determining turbulent kinetic energy dissipation from Batchelor curve fitting”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 18(1), 100-113.
- Mallat, S. G. (1989), “A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation”, *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), 674-693.
- Mathieu, S. (2000), *An introduction to turbulent flow*, Cambridge University Press.
- Moum, J. N. i R. G. Lueck (1985), “Causes and implications of noise in oceanic dissipation measurements”, *Deep-Sea Research*, 32, 379-390.

- Nash, J. D. i J. N. Moum (2002), “Microstructure estimates of turbulent salinity flux and the dissipation spectrum of salinity”, *Journal of Physical Oceanography*, 32(8), 2312-2333.
- Nasmyth, P. W. (1970), *Oceanic turbulence. Ph. D. dissertation*, Universitat de British Columbia, Vancouver.
- Paka, V. T., V. N. Navatov, I. Lozovatsky i T. M. Dillon (1999), “Ocean microstructure measurements by BAKLAN and GRIF”. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 16, 1519-1532.
- Panchev, S. i D. Kesich (1969), “Energy spectrum of isotropic turbulence at large wavenumbers”, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, 22, 627-630.
- Perrier, V., T. Philipovitch i C. Basdevant (1995), “Wavelet spectra compared to Fourier spectra”, *Journal of Mathematical Physics*, 36(3).
- Piera, J., E. Roget i J. Catalán (2002), “Turbulent patch identification in microstructure profiles: a method based on wavelet denoising and Thorpe displacement analysis”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 19 (9).
- Prandke, H. i A. Stips (1998), “Test measurements with an operational microstructure-turbulence profiler: detection limit of dissipation rates”, *Aquatic Sciences*, 60, 191-209.
- Prandke, H., K. Holtsh i A. Stips (2000), “MITEC technology development: the microstructure-turbulence measuring system MSS”, *EUR 19733 EN*, Ispra Joint Research Center, Comissió Europea.
- Priestley, M. B. (1981), *Spectral analysis and time series*, Academic Press, 890 p.
- Roget, E., I. Lozovatsky, X. Sánchez i M. Figueroa (2006), “Microstructure measurements in natural waters: methodology and applications”, *Progress in Oceanography*, 70, 126-148.
- Ruddick, B. R., A. Anis i K. Thompson (2000), “Maximum likelihood spectral fitting: the Batchelor spectrum”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 17, 1541-1555.
- Sánchez, X. (2001), “Determinació de la dissipació turbulenta amb l'ajust de l'espectre tèrmic. Mètode MLE”, treball de recerca a la UdG (DEA), no publicat, 66 p.
- Serra, T., J. Colomer, E. Gacia, M. Soler i X. Casamitjana (2002), “Effects of a turbid hydrothermal plume on the sedimentation rates in a karstic lake”, *Geophysical Research Letters*, 29(21).

- Simpson, J., T. Rippeth, E. Williams i K. F. E. Betteridge (2005), “Acoustic Doppler techniques”, *Marine turbulence, theories, observations and models*, Cambridge University Press, 630 p.
- Stevens, C., M. Smith i A. Ross (1999), “SCAMP: measuring turbulence in estuaries, lakes, and coastal waters”, *NIWA - Water and Atmosphere*, 7(2), 20-21.
- Stewart, R. W. i H. L. Grant (1999), “Early measurements of turbulence in the ocean: motives and techniques”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 16, 1467-1473.
- Stips, A., H. Burchard, K. Bolding i W. Eifler (2002), “Modelling of convective turbulence with a two-equation $k - \varepsilon$ turbulence closure scheme”, *Ocean Dynamics*, 52, 153-168.
- Stull, R. B. (1988), *An introduction to boundary layer meteorology*, Kluwer Publishers, 666 p.
- Tennekes, H. i J. L. Lumley (1982), *A first course in turbulence*, MIT Press.
- Thorpe, S. A. (1977), “Turbulence and mixing in a Scottish loch”, *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, A286, 125-181.
- Weibull, W. (1951), “A statistical distribution function of wide applicability”, *Journal of Applied Mechanics*, 18, 293-297.
- Wolk, F., L. Seuront i H. Yamazaki (2001), “Spatial resolution of a new micro-optical probe for chlorophyll and turbidity”, *Journal of Tokyo University of Fisheries*, 87, 13-21.
- Wolk F., H. Yamazaki, L. Seuront i R. G. Lueck (2002), “A new free-fall profiler for measuring biophysical microstructure”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 19, 780-793.
- Wolk F., H. Yamazaki i L. Seuront (2005), “Optical sensors”, *Marine turbulence, theories, observations and models*, Cambridge University Press, 630 p.
- Yamazaki, H. i T. Osborn (1993), “Direct estimation of heat flux in a seasonal thermocline”, *Journal of Physical Oceanography*, 23, 503-516.

CAPÍTOL 4

DINÀMICA CONVECTIVA

I FLUX DE CALOR AL FONTS DE

L'ESTANY DE BANYOLES

4.1. INTRODUCCIÓ	121
4.2. DINÀMICA DE PLOMALLS CONVECTIUS A LA SURGÈNCIA BI	123
4.2.1. FLUX TÈRMIC A LA LUTOCLINA	125
4.2.2. EL PLOMALL TÈRMIC	131
4.3. DINÀMICA TRIPLE DIFUSIVA SOBRE UN LLIT FLUÏDITZAT CALENT	136
4.3.1. EL PERFIL DE LA DENSITAT	140
4.3.2. LES INTERFÍCIES DIFUSIVES DE LA TEMPERATURA	142
4.3.2.1. El nombre de Rayleigh tèrmic a les interfícies	142
4.3.2.2. Fluxos tèrmics	145
4.3.3. LES CAPES CONVECTIVES	146
4.3.3.1. Les escales turbulentes	146
4.3.3.2. Els fluxos turbulents	150
4.3.3.3. Velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta	152
4.3.4. VALIDACIÓ DELS MODELS DEL FLUX TÈRMIC	153
4.4. BIBLIOGRAFIA	159

4.1. Introducció

L'estany de Banyoles (Girona) —figura 4.1— cobreix una superfície d' 1.12 km^2 i té un volum d'aigua de 0.01612 km^3 . L'aportació més important d'aigua, amb una entrada total de $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ aproximadament, es produeix a través de diverses surgències situades al fons de l'estany. Aquesta aigua, captada a les zones muntanyoses de l'Alta Garrotxa, passa per un conjunt d'aqüífers i surt per diverses cubetes amb forma cònica localitzades al fons de l'estany. L'aigua entra a l'estany com un flux vertical i amb velocitats d'entre 10^{-6} i 10^{-5} m/s (Roget, 1987; Casamitjana i Roget, 1993). Les partícules sòlides, resultat de la corrosió de l'aqüífer, són arrossegades pel flux d'aigua entrant i es forma dins les surgències còniques el que es coneix com un *llit fluiditzat* (vegeu l'apartat A.3 de l'apèndix A). El gruix d'aquests llits varia segons la cubeta i l'època de l'any, però sempre presenten una interfície superior molt abrupta de concentració de partícules. Aquestes interfícies, anomenades *lutoclines*, ocupen tota la cubeta a una certa fondària; per tant, poden arribar a cobrir àrees horitzontals de més de 200 m de longitud característica. Quan s'assoleixen les condicions estacionàries (apartat A.3), la sedimentació de les partícules és compensada pel flux vertical d'entrada i la lutoclina queda fixada a una certa fondària (Roget et al., 1994).

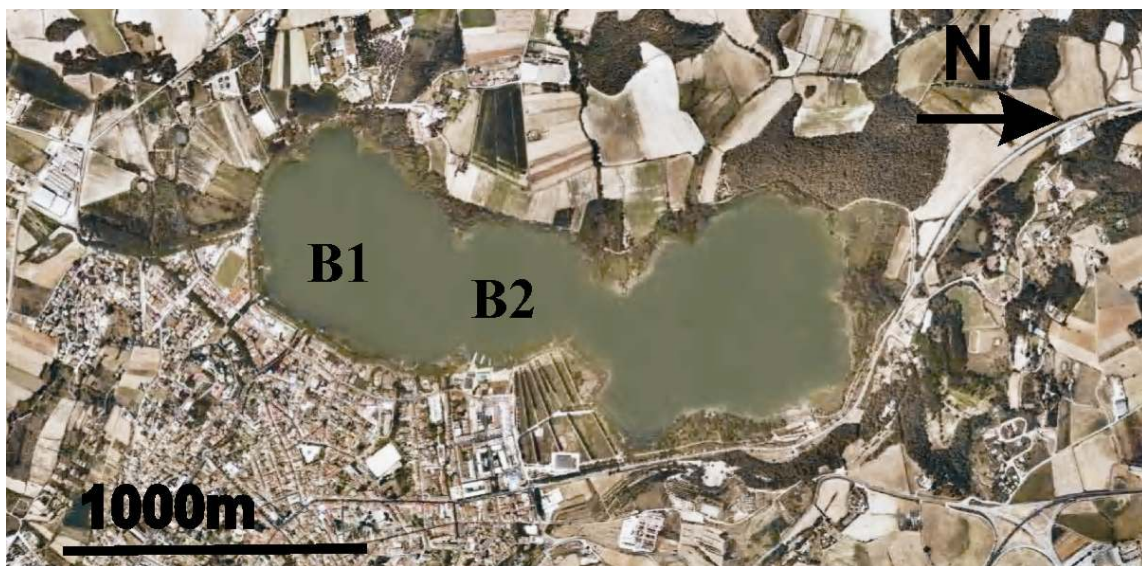


Figura 4.1. Vista superior de l'estany de Banyoles. Font: Institut Cartogràfic de Catalunya. S'hi situen les cubetes còniques B1 i B2 esmentades més endavant en el text.

La lutoclina, amb gruixos típics de pocs centímetres, separa la zona inferior de les cubetes amb elevada terbolesa i fraccions volumètriques de partícules d'entre 0.05 i 0.1, de la superior, molt més clara i amb fraccions volumètriques de l'ordre de 10^{-6} . L'aigua que entra per les cubetes és més calenta que la del fons de l'estany (fins a uns 10° a l'hivern), i, coincidint amb la lutoclina, apareix també una interfície molt abrupta de temperatura. Aquesta entrada d'aigua calenta determina un flux de calor, d'origen geotèrmic, que és determinant per entendre la circulació general de l'estany, principalment durant els mesos d'hivern (Roget et al., 1993). D'altra banda, en algunes cubetes l'aigua entrant també té una concentració d'espècies iòniques, quantificada amb la salinitat, superior a la de l'estany. Aquesta aigua més salada s'acumula per sobre de la lutoclina (Casamitjana i Roget, 1986) i llavors es comporten com a meromíctiques. En resum, doncs, les aportacions freàtiques són calentes, amb elevada terbolesa i, segons en quines cubetes, amb una salinitat lleugerament superior que la de la resta de l'aigua de l'estany, que és més freda, clara i dolça. Ambdues masses d'aigua estan separades per interfícies horitzontals molt localitzades de partícules, temperatura i salinitat. Globalment la lutoclina és estable, ja que els efectes gravitacionalment estabilitzadors de les concentracions són superiors als inestabilitzadors de la temperatura, i per tant la densitat decreix en altura. Tot i això, sobre la lutoclina es desenvolupen processos convectius que formen plomalls i eventualment es formen estructures del tipus esglaons multidifusius, just per sobre del llit fluïditzat. La tendència difusiva a incrementar els gruixos de les interfícies és més marcada en el cas tèrmic que en el de les concentracions, ja que la difusivitat tèrmica supera com a mínim en un factor 100 les corresponents a les concentracions. Per tant, una vegada el gruix de la interfície tèrmica ha superat el de les concentracions, apareix una zona d'inestabilitats i es formen estructures amb prou flotabilitat per moure's en sentit ascendent, bé en forma de petites tèrmiques o de grans plomalls.

En aquest capítol analitzarem diferents dinàmiques convectives basant-nos en mesures fetes en les dues principals surgències subterrànies, les situades en les cubetes BI i BII, segons el conveni establert per Moreno-Amich i García-Berthou (1989), amb les posicions corresponents localitzades en la figura 4.1. Concretament, en l'apartat 4.2 tractarem la surgència BI, on es desenvolupen plomalls convectius que poden arribar a assolir la superfície de l'estany. En l'apartat 4.3, en canvi, descriurem la dinàmica observada en una de les campanyes a la cubeta BII, quan es van trobar esglaons

convectius del tipus triple difusius, que de fet són una generalització de les estructures de doble difusió analitzades en el capítol 2. En ambdós casos estudiarem els fluxos de calor associats.

4.2. Dinàmica de plomalls convectius a la surgència BI

En aquest apartat, centrat en la cubeta que rep el cabal més important d'aigua freàtica, s'han revisat un conjunt de dos-cents vint-i-quatre perfils obtinguts en set campanyes històriques, distribuïdes al llarg de diferents èpoques de l'any, en les quals es van fer mesures de perfils tèrmics d'elevada resolució espacial.

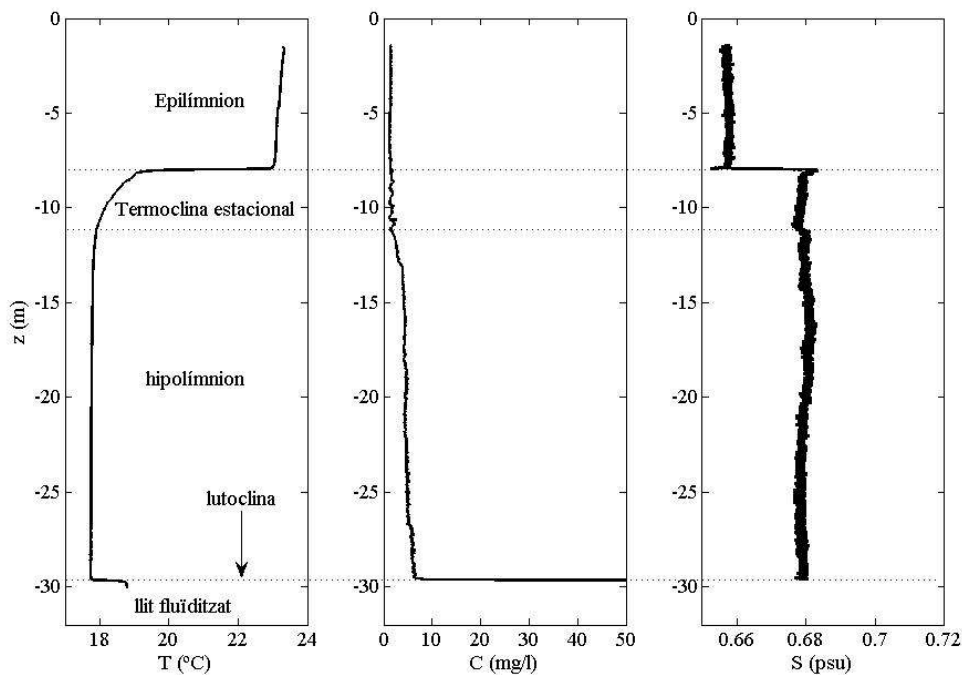


Figura 4.2. Perfils de temperatura $T(z)$, concentració de partícules sòlides $C(z)$ i la salinitat $S(z)$, a la cubeta BI, durant la campanya 160903 (16 de setembre de 2003), on la coordenada z apunta en el sentit contrari a la gravetat.

En la figura 4.2 hem representat els perfils de temperatura, concentració de partícules i salinitat característics de la cubeta BI, durant l'època d'estratificació. Si ens fixem en el perfil de temperatura, de dalt a baix, trobem l'epilimnion —en contacte amb el medi atmosfèric i barrejat pel vent i/o la convecció superficial, depenent de l'època—, la

termoclina estacional —amb un gradient tèrmic acusat—, l'hipolimnion —una zona interior amb una estratificació molt petita—, la lutoclina —amb un gradient tèrmic important que coincideix amb el de les partícules— i, finalment, l'interior calent del llit fluïditzat. Al llarg de tot l'any, la temperatura a l'interior del llit fluïditzat de la cubeta BI es manté molt constant, en un valor d'uns 19°C . Pel que fa al perfil de concentració de partícules, aquest es manté pràcticament constant per sota de la termoclina, tot i que presenta un lleuger augment en fondària, fins a arribar a la lutoclina, on es produeix un increment bruscat que arriba a valors d'uns 130g/l dins el llit fluïditzat; aquesta quantitat, de fet, és equivalent a una fracció volumètrica d'un 5%. Tanmateix, en la figura 4.2 només hem representat fins als 50mg/l , perquè es pugui veure més clarament l'increment de concentració per sota de la termoclina. Aquest increment és degut a les petites partícules que són arrossegades pels plomalls convectius, tal com s'explica a Colomer et al. (2001), en què es van descriure per primera vegada els plomalls de l'estany de Banyoles. L'estratificació de la salinitat, calculada a partir dels perfils de la temperatura i la conductivitat elèctrica, també s'ha representat en la figura 4.2. La salinitat és molt constant en tot l'hipolimnion. Dins el llit fluïditzat no es pot obtenir la salinitat directament a partir de la temperatura i la conductivitat elèctrica, ja que aquesta última és molt reduïda pels efectes del sediment. És per aquest motiu que el perfil de salinitat està tallat just a sobre de la lutoclina. De totes maneres, Casamitjana i Roget (1986), prenent mostres d'aigua per analitzar al laboratori després que les partícules sedimentessin, van trobar que, almenys aquell cop, a la cubeta BI, diferentment del que passava en altres cubetes, no hi havia variacions significatives de la salinitat entre l'hipolimnion i l'interior del llit fluïditzat.

Amb aquest supòsit sobre la salinitat, podem calcular la raó d'estabilitat de la densitat a la regió de gradients de la lutoclina, definida a 2.36a, considerant que l'efecte gravitacionalment estabilitzador és només el de la concentració de partícules (C), i l'instabilitzador és la temperatura (T), de manera que:

$$R_{\rho} = \frac{\gamma\Delta C}{\alpha\Delta T} \quad (4.1)$$

On α i γ són, respectivament, els coeficients d'expansió tèrmica i contracció per a les partícules, i ΔC , ΔT són els increments de concentració de partícules i temperatura a les interfícies localitzades a la lutoclina (apèndix A). Tenint en compte que la

variabilitat anual de ΔT a BI és entre 1 i 10 °C, aproximadament, i que ΔC es manté constant al voltant de 130 g/l, la raó d'estabilitat 4.1 pren valors d'entre 600 i 60, de manera que el perfil de densitat és estàticament estable amb $R_\rho > 1$, tal com hem discutit en el capítol 2.

4.2.1. Flux tèrmic a la lutoclina

En la figura 4.3.a hem tornat a representar un perfil tèrmic característic de la cubeta BI, però ara l'eix d'abscisses és la fondària, de manera que la lutoclina està localitzada a la part dreta de la figura. En la figura 4.3.b hem representat, de manera ampliada, la zona de la lutoclina, on s'indiquen les temperatures T_0 , T_1 i T_2 , corresponents respectivament a la zona homogènia dins el llit fluïditzat, al punt de màxim gradient tèrmic (en valor absolut) —amb línia de punts— i a la regió inferior de l'hipolímnion. El màxim del gradient tèrmic és, de fet, un punt d'inflexió en el perfil de la temperatura, el qual, pel que fa a la variació en fondària, passa d'un comportament còncau a convex.

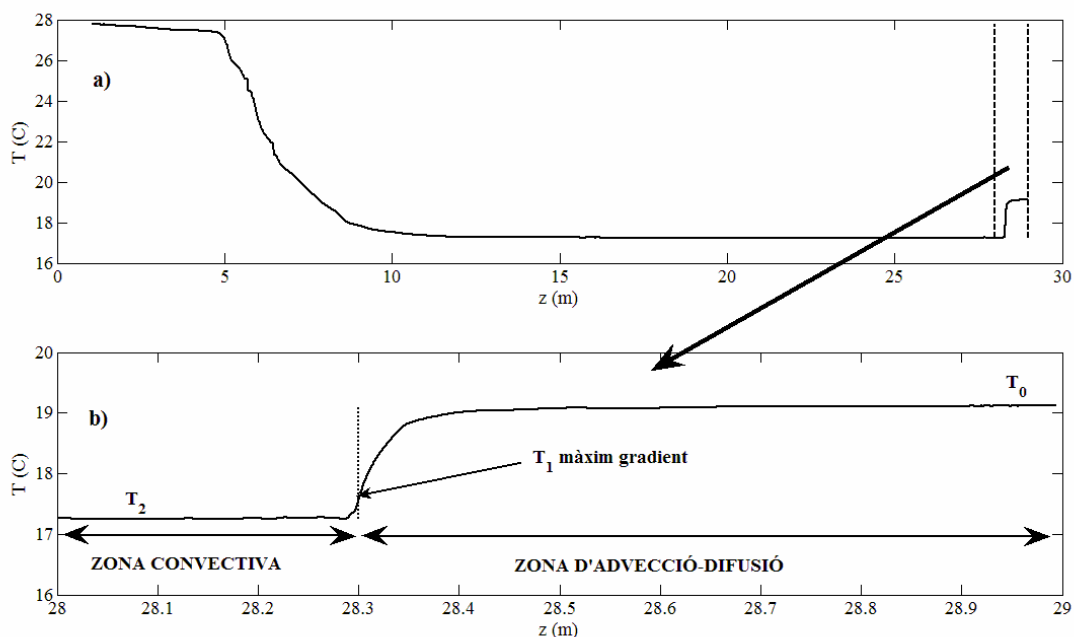


Figura 4.3. Perfil tèrmic corresponent a la campanya 210703 (21 de juliol de 2003). a) Perfil tèrmic de tota la columna sobre la cubeta. b) Detall de la lutoclina.

Aquests tipus de perfils són els que es desenvolupen perpendicularment a la discontinuïtat entre dos medis diferents, i en aquest sentit podem també imaginar-nos la lutoclina com una superfície matemàtica sense extensió vertical que separa el llit fluïditzat calent del fons de l'estany més fred. Aquesta aproximació, de fet, és la que farem servir més endavant en aquest capítol, i calcularem el paràmetre de transferència convectiva que s'utilitza en enginyeria per parametritzar els fluxos convectius (Burmeister, 1993).

Tornant a la figura 4.3.b, la regió situada immediatament per sota del punt d'inflexió és la que anomenarem *zona d'advecció-difusió*, ja que podem suposar que el règim no és turbulent i que està determinat pels efectes combinats de la difusió molecular i una advecció vertical produïda pel flux d'aigua entrant. La garantia que és així ens la dona el fet que la lutoclina està molt localitzada en fondària en tota la regió que ocupa, amb extensions horitzontals d'uns 200 m de diàmetre. Per tant, podem escriure l'equació del flux tèrmic (1.4) de manera simplificada, negligint el flux turbulent, de manera que:

$$F_T = -\kappa_T \frac{d\bar{T}}{dz} + \bar{T}\bar{U} \quad (4.2)$$

On \bar{T} és el perfil tèrmic mitjà relatiu al valor de referència T_2 i \bar{U} és la velocitat de l'aigua amb origen freàtic, que en fondàries pròximes a la lutoclina es pot considerar constant (és a dir, tot el domini representat en la figura 4.3.b). Pel que fa al terme de transport turbulent $\overline{wT'}$ de l'expressió 1.4, veiem que és important en la zona marcada en la figura 4.3.b com a convectiva, on de fet és el terme dominant, tal com veurem més endavant en aquest capítol. Si apliquem 4.2 al punt de màxim gradient (que simbolitzem amb MG), tenim que:

$$F_T = -\kappa_T \left. \frac{d\bar{T}}{dz} \right|_{MG} + \bar{U}(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) \quad (4.3a)$$

Tanmateix, si avaluem l'expressió 4.2 a la zona homogènia del llit fluïditzat, el flux tèrmic queda reduït a l'expressió següent:

$$F_T = \bar{U}(T_0 - T_2) \quad (4.3b)$$

Llavors, considerant que el règim és estacionari, es poden igualar 4.3a i 4.3b, de manera que la velocitat \bar{U} es pot calcular amb:

$$\bar{U} = \frac{-\kappa_T \left. \frac{d\bar{T}}{dz} \right|_{MG}}{(T_0 - T_1)} \quad (4.4)$$

Hem calculat $d\bar{T}/dz|_{MG}$, per a les set campanyes esmentades, considerant tots els perfils experimentals disponibles. Llavors, amb l'expressió 4.4, juntament amb T_0 , T_1 i el gradient tèrmic al punt MG, hem obtingut la velocitat \bar{U} per a cada una de les campanyes. Els valors resultants estan compresos entre $4.0 \times 10^{-6} m/s$ i $6.9 \times 10^{-6} m/s$, amb un valor mitjà de $(5 \pm 1) \times 10^{-6} m/s$. Roget et al. (1994), basant-se en un mètode alternatiu de càlcul de la velocitat al laboratori, a partir d'una mostra d'aigua i assumint condicions estacionàries del llit fluïditzat, troben valors de $11 \times 10^{-6} m/s$ (22 de maig de 1986) i $8 \times 10^{-6} m/s$ (19 de setembre de 1986 i 5 de novembre de 1986). Aquests valors i els que s'han obtingut en aquest text són del mateix ordre de magnitud. Així mateix, la diferència entre les diferents velocitats obtingudes —a partir dels dos mètodes— respon a la variabilitat temporal de la recàrrega de l'aqüífer (Soler et al., 2007). Llavors, si substituïm el valor de velocitat que hem trobat a partir de 4.4, per a cada una de les set campanyes estudiades, en l'equació 4.3a, trobem que el flux de calor que entra al llac per la cubeta BI varia entre 10 i $200 W/m^2$, depenent de l'època de l'any. Aquests valors concorden amb els que han presentat Casamitjana et al. (1988) basant-se en altres tipus de consideracions.

Amb la intenció d'estimar la velocitat vertical característica de la convecció w , generada a la zona d'interfície tèrmica situada just per sobre del punt de màxim gradient —marcat amb línia de punts en la figura 4.3—, podem utilitzar la relació de Hunt (Hunt, 1984):

$$w = c(q_0 h)^{1/3} \quad (4.5)$$

On c és una constant d'ordre 1, $q_0 = \alpha g F_T$ és el flux de flotabilitat i h és una escala característica. En el nostre cas igualarem h a la mida de la interfície tèrmica que apareix per sobre del punt de màxim gradient, que calcularem mitjançant l'increment tèrmic i el gradient amb $h = (T_1 - T_2)/(d\bar{T}/dz)_{MG}$. Els valors de h obtinguts per a les set campanyes són tots de l'ordre d'1 cm, i les velocitats convectives característiques van entre 3×10^{-4} i $8 \times 10^{-4} m/s$, és a dir, són més d'un ordre de magnitud superiors a les estimacions anteriors de la velocitat advection \bar{U} . Per tant, és raonable idealitzar la fondària del màxim gradient (representada amb línia de punts en la figura 4.3) com una superfície horitzontal calenta, sobre la qual es desenvolupen els processos convectius.

En aquest cas, tradicionalment s'ha utilitzat una llei potencial que lligui el flux tèrmic F_T amb l'increment de temperatura entre la superfície i en aquest cas l'hipolimnion, això és, $(T_1 - T_2)$. Les lleis potencials per al flux tèrmic, que hem introduït en el capítol 2 per modelitzar els processos convectius de tipus Raileigh-Bénard i doble difusió, en el nostre cas prendrien la forma següent:

$$F_T = C(T_1 - T_2)^p \quad (4.6)$$

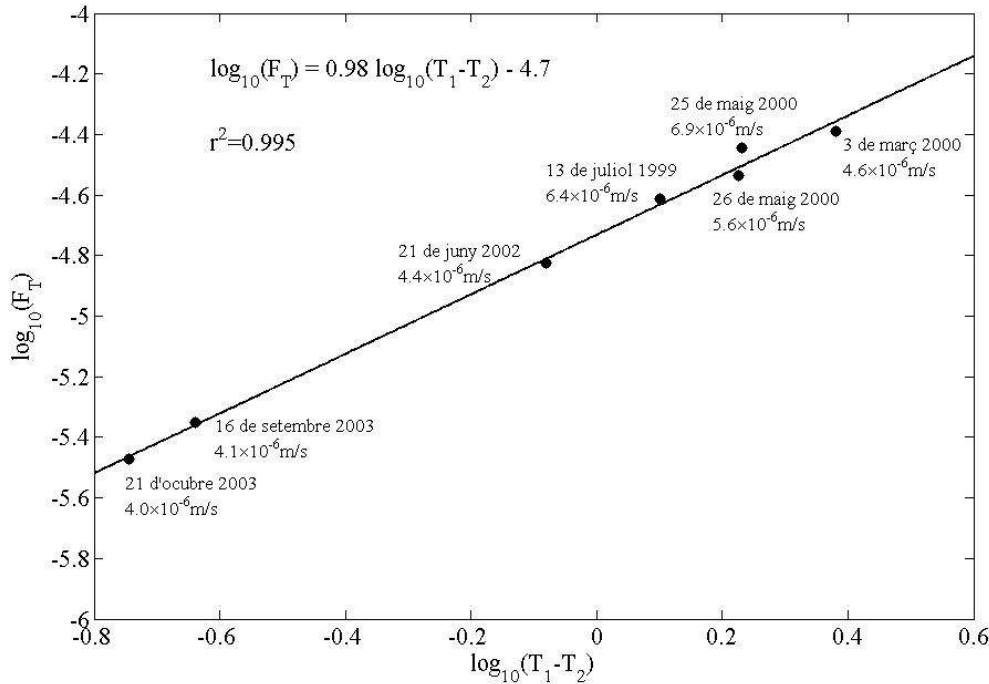


Figura 4.4. Logaritme del flux tèrmic calculat com a funció del logaritme de la diferència tèrmica entre el punt de màxim gradient i l'hipolimnion per a set campanyes (dos-cents vint-i-quatre perfils). Els punts experimentals són el resultat de fer la mitjana sobre tots els perfils de cada una de les campanyes.

Amb aquesta idea, en la figura 4.4 hem representat el logaritme de F_T , calculat amb l'expressió 4.3a, en funció del logaritme de l'increment tèrmic, per a les set campanyes estudiades. Com es pot veure, els punts experimentals s'ajusten molt bé a una recta ($r^2 = 0.995$), de manera que el pendent de la recta és igual a la potència p introduïda a 4.6. Això indica que els mecanismes de transferència de calor, lligats a la dinàmica convectiva en la interfície de la cubeta BI, no varien d'una època de l'any a una altra. Més concretament, el valor de p obtingut amb l'ajust de les dades experimentals és 0.98, i, per tant, pràcticament igual a 1. La llei del tipus 4.6 amb $p = 1$ és utilitzada habitualment en l'àmbit de l'enginyeria per estudiar la convecció natural i forçada sobre

una superfície horitzontal (Incropera i Dewitt, 1996), i és coneguda com a *lleï del refredament de Newton*. En aquesta lleï, el valor de C en l'expressió 4.6 pren valors diferents depenent del tipus de fluid i de la natura del forçament, però, a diferència de les dependències que hem donat en el capítol 2, aquesta és independent de la mida vertical del sistema (assumida com a infinita en aquest cas). A partir de 4.6 i dels paràmetres sorgits de la regressió lineal que apareix en la figura 4.4, podem escriure la següent lleï tèrmica per a la cubeta BI:

$$F_T = (2 \times 10^{-5} \text{ m/s}) (T_1 - T_2) \quad (4.7)$$

O, equivalentment, si en comptes de considerar el flux tèrmic considerem el flux de calor (a partir d'1.5):

$$F_Q = (83 \text{ W/m}^2\text{K}) (T_1 - T_2) \quad (4.8)$$

El terme numèric que apareix multiplicant l'increment de temperatura en l'expressió 4.8 rep generalment el nom de paràmetre de transferència convectiva. La lleï per al flux de calor (4.8) és dins el rang de convecció natural (no forçada) per al cas de l'aigua (Incropera i Dewitt, 1996).

En la figura 4.4, i al costat dels punts experimentals corresponents a cada campanya, s'ha incorporat la data en què es van dur a terme les campanyes i la velocitat de la surgència \bar{U} , calculada amb l'expressió 4.4. Noteu que en les expressions 4.7 i 4.8 el flux de calor no s'ha parametritzat en funció de l'increment de temperatura entre l'hipolimnion i el llit fluïditzat ($T_0 - T_2$), sinó que es considera la temperatura en el punt d'inflexió de la lutoclina (T_1) i l'increment $T_1 - T_2$, el qual no es pot determinar si no es fan mesures d'alta resolució espacial —com és el cas en aquest text. El valor de T_1 , característic de la interfície, depèn en cada cas de T_0 i T_2 , però també de la velocitat d'entrada d'aigua. La variabilitat del flux de calor és més deguda a les variacions de T_0 i T_2 que a les de \bar{U} . En aquestes circumstàncies, doncs, sembla raonable parametritzar el flux de calor total en funció de $\Delta T \equiv T_0 - T_2$. De manera semblant al que hem fet en la figura 4.4, en la figura 4.5 es representa el logaritme del flux tèrmic en funció del logaritme de ΔT per a les set campanyes estudiades.

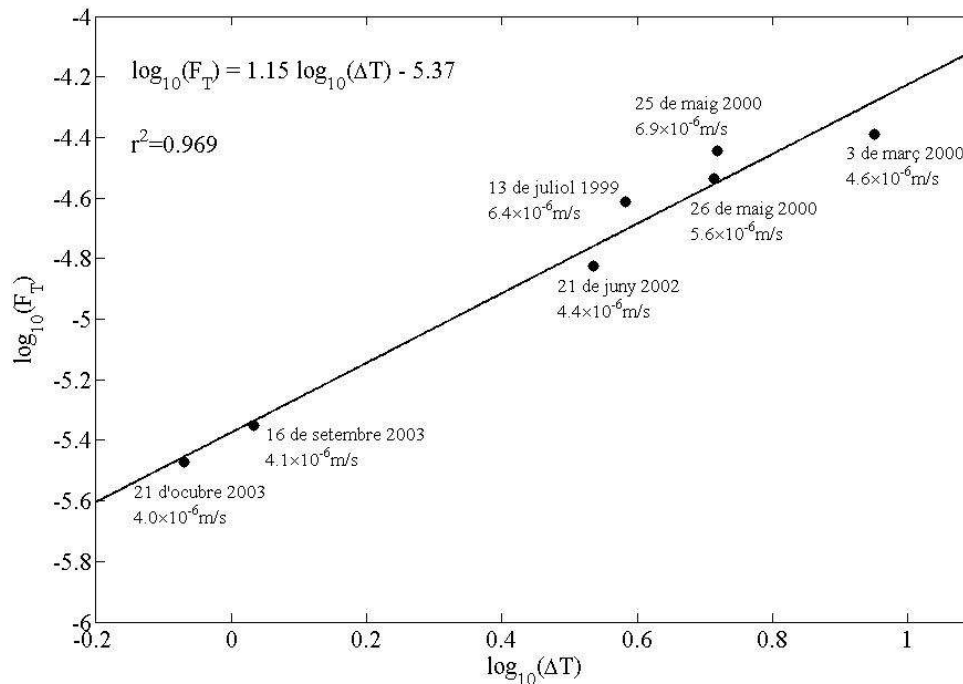


Figura 4.5. Logaritme del flux tèrmic calculat com a funció del logaritme de la diferència tèrmica entre l'interior del llit fluïditzat i l'hipolimnion per a set campanyes (dos-cents vint-i-quatre perfils).

L'ajust d'una tendència lineal a les dades de la figura 4.5 amb ΔT dona una correlació pitjor ($r^2 = 0.969$) que la que hem obtingut en la figura 4.4 amb $T_1 - T_2$ ($r^2 = 0.995$). El pendent de la recta ajustada en la figura 4.5 és superior a 1 —de fet, 1.15—. Podem justificar la relativa baixa correlació dels logaritmes del flux tèrmic i ΔT pel fet que el flux depèn també de \bar{U} , tal com hem esmentat anteriorment. Per tant, si el que volem és donar una expressió aproximada que ens lligui el flux tèrmic amb ΔT per mitjà d'una llei potencial, a partir de l'ajust lineal de la figura 4.5 trobem:

$$F_T = 4.27 \times 10^{-6} \Delta T^{1.15} \quad (4.9)$$

El prefactor de la llei potencial 4.9 porta unitats del sistema internacional. A partir de 4.9, el flux de calor es pot determinar a partir de la següent llei potencial:

$$F_Q = 18 \Delta T^{1.15} \quad (4.10a)$$

A 4.10a el prefactor també està escrit amb unitats del sistema internacional. Si forcem una dependència lineal entre el flux de calor i l'increment total de temperatura, trobem la dependència següent, que no ha estat representada però presenta un coeficient de correlació $r^2 = 0.89$:

$$F_Q = 21\Delta T \quad (4.10b)$$

D'acord amb l'anàlisi anterior, doncs, les equacions 4.10a i 4.10b ens proporcionen una bona aproximació del flux de calor freàtic, només coneixent la temperatura de l'hipolímnion i la del llit fluïditzat, sense necessitat de fer mesures de la velocitat d'entrada a la surgència, molt més dificultoses. Tanmateix, també en aquest cas, a partir de l'anàlisi feta en aquesta secció, es veu que la velocitat de l'aigua al nivell de la lutoclina es pot obtenir fent una mesura d'un perfil tèrmic d'altra resolució —utilitzant 4.4—, i, per tant, sense necessitat d'extreure cap mostra.

4.2.2. El plomall tèrmic

En l'apartat anterior hem vist com es determina el flux de calor i la velocitat vertical a la surgència, amb un mètode alternatiu al que s'havia utilitzat fins ara. A partir d'aquests valors, i també de manera complementària a la discussió que ja hem fet en l'apartat anterior, en què hem comparat la velocitat advection i una estimació de la convectiva, podem estudiar si per sobre de la lutoclina el flux es comporta com un doll o com un plomall. Això ho farem seguint Colomer et al. (2001), en què s'avalua la longitud de Morton h_{mor} , definida com (Fisher et al., 1979):

$$h_{mor} = \frac{M_0^{3/4}}{Q_0^{1/2}} \quad (4.11)$$

El numerador de l'expressió 4.11 és el flux mitjà de velocitat (o de quantitat de moviment per unitat de massa), $M_0 = \pi D^2 \bar{U}^2 / 4$. El denominador correspon al flux de flotabilitat q_0 integrat, que anomenarem Q_0 i que pren la forma $Q_0 = \pi D^2 q_0$. Així doncs, la longitud de Morton, definida en l'expressió 4.11, compara els forçaments que determinen un comportament de tipus doll o de tipus plomall. Substituint en l'expressió 4.11 un diàmetre de $D = 200m$, una velocitat igual que la mitjana sobre les set campanyes amb $\bar{U} = 5 \times 10^{-6} m/s$ i els fluxos tèrmics mínim ($F_T = 3 \times 10^{-6} m/s$) i màxim ($F_T = 4 \times 10^{-5} m/s$) obtinguts en totes les campanyes estudiades, trobem que en tots els casos la longitud de Morton està entre 1 i 3 mm. És a dir, el fluid tindria un

comportament de tipus doll fins a una altura per sobre de la lutoclina igual a $h_{mor} \sim 1$ mm, que, comparada amb l'abast vertical del fenomen, resulta negligible. Per tant, la columna d'aigua és afectada per un plomall convectiu, que arriba fins a una altura (anomenada *d'equilibri*) que es pot estimar a partir de:

$$h_{eq} = 2.6(q_0 D)^{1/3} / N \quad (4.12)$$

On N és la freqüència de Brunt-Vaisala, que depèn de l'estratificació tèrmica de fons $d\bar{T}/dz$ en la forma $N^2 = g\alpha d\bar{T}/dz$ (Colomer et al. 2001).

Mentre el plomall ascendeix, arrossega l'aigua en contacte amb la perifèria. A més, a la base del plomall, on les diferències de temperatura entre el plomall i el seu voltant solen ser més grans, sol haver-hi intrusions, tal com passa en el mantell terrestre, per exemple, on les capes més denses del fons són arrossegades pels plomalls tèrmics (Lin i Van Eken, 2006). A Banyoles, a l'hivern, aquest fenomen és afavorit precisament per les diferències tèrmiques que hi ha entre els dos lòbuls, de manera que l'aigua del lòbul nord, més freda, flueix cap al lòbul sud i forma una capa lleugerament més freda a sobre del fons, localitzada majoritàriament a uns 20 m de fondària (Roget et al., 1993). Com veurem, aquesta aigua al final es precipita dins de la cubeta que brolla (BI), localitzada en una depressió del fons.

En la figura 4.6 es presenten tres perfils tèrmics mesurats sobre la surgència BI, en una campanya que es va fer el 3 de març de 2000. Els perfils presentats són característics dels mesurats en tres estacions diferents situades radialment en la zona ocupada per la lutoclina, des de la perifèria cap al centre de la surgència. En les figures 4.6.a i 4.6.b, es veu que aquests perfils presenten una capa horitzontal d'aigua més freda just a sobre de la lutoclina, el gruix de la qual disminueix des de l'estació més perifèrica (a) fins a la més interior (b), fins que desapareix completament en el perfil de la figura 4.6.c, que es pot considerar indicatiu de la zona més cèntrica de la surgència. Aquesta variació del gruix de la capa d'aigua més freda sobre la lutoclina ens indica una intrusió lateral que es va barrejant a mesura que penetra cap a l'interior de la surgència. En la figura 4.6.d es representa esquemàticament la intrusió lateral en el plomall i s'indiquen les localitzacions de les tres estacions de mostreig representades en les figures a, b i c. Com es pot veure, l'estació c és l'única estació situada en una regió on el plomall es pot desenvolupar, ja que en la resta l'aigua de la capa més inferior és més freda. Per

estudiar l'estructura del plomall, ens centrarem només en els cinc perfils disponibles de l'estació *c*, que van ser mesurats durant un interval d'una hora aproximadament.

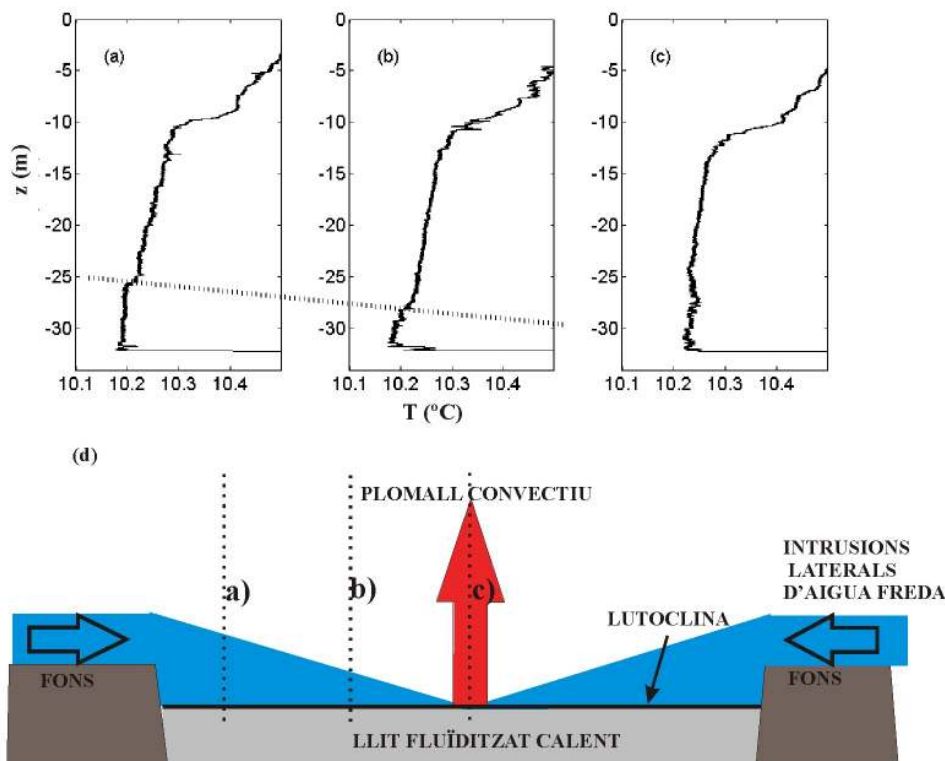


Figura 4.6. *a) b) i c)* Perfils tèrmics característics mesurats en tres estacions diferents (*a, b, c*), durant la campanya 030300 (3 de març de 2000). *d)* Representació esquemàtica de la posició radial dels perfils respecte a l'eix de la cubeta, que és on està localitzat el plomall (fletxa vermella). Les entrades laterals d'aigua freda es representen de color blau.

En aquest cas, l'estratificació tèrmica de fons era $d\bar{T}/dz = 4 \times 10^{-3} K/m$, de manera que $N^2 = 6 \times 10^{-6} s^{-2}$. D'altra banda, el flux tèrmic determinat per a aquesta campanya és $F_T = 4.1 \times 10^{-5} Km/s$ i el flux de flotabilitat, $q_0 = 4 \times 10^{-8} m^2/s^3$. Llavors, d'acord amb l'expressió 4.12, si considerem $D \approx 200m$, tenim una estimació de l'altura màxima del plomall de $h_{eq} \approx 21m$. Això és, la part superior del plomall estarà a una fondària d'uns $11m$, ja que la base del plomall estaria a una profunditat de $32m$. Amb una simple inspecció visual del perfil presentat en la figura 4.6.c, no podem contrastar el valor de h_{eq} calculat; tanmateix, una anàlisi de les estructures tèrmiques dins del plomall, feta amb ondetes, sí que ens permetrà fer-ho, tal com presentem seguidament.

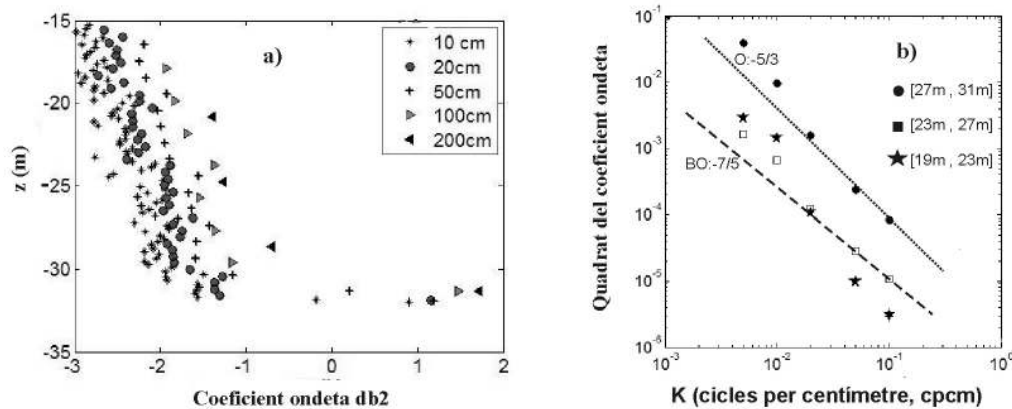


Figura 4.7. a) Valor absolut del coeficient de les ondetes (escala logarítmica) per a diferents fondàries i per a diferents escales, concretament 10 cm, 20 cm, 50 cm, 100 cm i 200 cm. b) Representació de l'espectre mitjà d'ondetes, en funció del nombre d'ona en cm^{-1} , per als rangs de fondàries [19,23]m (estrelles), [23,27]m (quadrats) i [27,31]m (rodones). Les dependències potencials de tipus Obukhov ($-5/3$) i Bolgiano-Obukhov ($-7/5$) es mostren simbòlicament amb traçats discontinus de punts i de ratlles, respectivament.

Per tal de caracteritzar una estructura del plomall, no homogènia en la vertical, s'ha optat per l'utilització de les ondetes ja que ens permet fer un anàlisi global de tota la columna que no seria possible amb la descomposició de Fourier. Tot i així també hauríem pogut aplicar la descomposició de Fourier si haguéssim segmentat prèviament la columna en regions on poguéssim assumir estacionarietat (espacial) en el senyal. Per aquest anàlisi hem considerat els cinc perfils de temperatura disponibles al centre de la cubeta BI, i s'han calculat els coeficients de la descomposició amb ondetes per a les escales corresponents als nombres d'ona $1/200$, $1/100$, $1/50$, $1/20$ i $1/10$ cm^{-1} (cicles per centímetre). Per a aquesta descomposició, explicada en l'apartat 3.5.2, s'ha utilitzat com a funció mare l'anomenada db2 (Daubechies d'ordre 2) que tal com hem comentat en l'apartat 3.5.2 té una estructura senzilla y comparable, per exemple, a una funció sinus localitzada. La variació dels valors mitjans dels coeficients en fondària s'ha representat en la figura 4.7.a. A partir d'aquesta figura podem deduir l'existència d'estructures tèrmiques de mides que van des de 10 cm fins a 200 cm a totes les fondàries compreses entre la lutoclina i 15 m, i aquestes presenten una major amplitud tèrmica en les capes més profundes, i per tant més pròximes a la font de calor que genera el plomall. Això, de fet, és el que caldria esperar si suposem que les estructures que observem tenen a veure amb la dinàmica convectiva del plomall. Fixem-nos que

aquesta anàlisi dels perfils tèrmics ens corrobora l'estimació aproximada que hem fet de l'altura d'equilibri del plomall a partir de l'equació 4.12 —11 m—. Per a fondàries menors, no representades en la figura, els valors dels coeficients tornen a augmentar de manera aleatòria, segurament com a reflex de la dinàmica de la capa superficial barrejada (epilímnion).

En l'apartat 1.7 havíem definit l'espectre unidimensional $F_\theta(k_3)$ d'un camp escalar genèric Θ , dependent del nombre d'ona unidimensional k_3 . Aquest espectre s'obté mesurant les fluctuacions de l'escalar θ al llarg d'una direcció fixada (per exemple x_3). Sota isotropia, F_θ és independent de la direcció de mesura i es relaciona amb l'espectre tridimensional $E_\theta(k)$ segons l'expressió 1.47. Utilitzant aquesta expressió, podem veure que, si l'espectre tridimensional té una dependència de tipus potencial amb $E_\theta \propto k^p$, llavors l'espectre unidimensional pren també la forma $F_\theta \propto k_3^p$, on p és una potència. D'altra banda, en l'apartat 1.6.2 hem vist que Obukhov va introduir la coneguda dependència $E_\theta \propto k^{-5/3}$, a partir de la hipòtesi de l'existència d'un subrang on la turbulència és independent de les condicions de producció —per tant isòtropa— i, a més, les dissipacions són negligibles —subrang inercial—. Aquesta dependència implica un espectre unidimensional també del tipus $F_\theta \propto k_3^{-5/3}$. Així mateix, l'espectre de l'energia $E(k)$, dins el rang inercial, té també la dependència $E \propto k^{-5/3}$, introduïda per Kolmogorov. Tanmateix, en condicions d'estratificació —per tant, inherentment anisòtropes— sovint s'ha dubtat de l'aparició del subrang inercial i s'han proposat espectres alternatius com per exemple el de Bolgiano-Obukhov (Bolgiano, 1959; Obukhov, 1959), el qual, pel que fa a la temperatura, té una dependència del tipus $E_\theta \propto k^{-7/5}$, i, pel que fa a l'energia, del tipus $E \propto k^{-11/5}$. Atesa la natura anisòtropa del rang d'aplicació d'aquest espectre (el rang de flotabilitat), *a priori* no es pot afirmar que l'espectre tèrmic unidimensional hagi de prendre la forma $-7/5$. Tot i això, l'espectre de Bolgiano-Obukhov ($-7/5$) s'ha mesurat en casos de convecció turbulenta (Shang i Xia, 2001), si bé estudis experimentals recents fets a l'atmosfera (Lilley et al., 2004) mostren un comportament diferent per als espectres unidimensionals segons si es mesuren seguint la direcció horitzontal o la vertical, en concordança amb la natura anisòtropa

d'una estratificació de fons. En el primer cas mostren un escalat de tipus $-5/3$ i en el segon cas, de tipus $-7/5$.

Pel que fa a l'estructura interna del plomall, i considerant que l'espectre d'ondetes local és proporcional al mòdul al quadrat dels coeficients, tal com hem comentat en l'apartat 3.5.2 (Perrier et al., 1995), la figura 4.7.a ens serveix també per obtenir una primera aproximació de l'espectre tèrmic unidimensional (corresponent a la direcció vertical), en unes unitats arbitràries, com a funció del nombre d'ona. Concretament, per als intervals de fondàries de [19,23]m, [23,27]m i [27,31]m s'ha calculat la mitjana dels coeficients d'ondeta i el seu valor al quadrat s'ha representat en la figura 4.7.b en funció del nombre d'ona. A primera vista sembla que per als nombres d'ona més grans, o equivalentment per a les escales més petites, l'espectre unidimensional corresponent al rang de fondàries [27,31]m (rodones) té un comportament de tipus Obukhov, amb $K^{-5/3}$, però en canvi el corresponent al rang [23,27]m (quadrats) és del tipus Bolgiano-Obukhov, amb $K^{-7/5}$. De fet, és raonable que l'espectre calculat més a prop de l'origen del plomall correspongui al rang inercial ($-5/3$), ja que es tracta de la regió més energètica dins el plomall. En canvi, les regions per sobre mostrarien clarament l'anomenat *rang de flotabilitat*, amb un espectre del tipus $-7/5$. De totes maneres, caldria fer una anàlisi més extensa —considerant més perfils— i més acurada matemàticament abans de proposar l'espectre característic per a les diferents zones de la columna d'aigua afectada pel plomall.

4.3. Dinàmica triple difusiva sobre un llit fluiditzat calent

Ja fa temps que el règim difusiu de la convecció per doble difusió (DDRD), i com a generalització d'aquesta convecció la convecció per triple difusió (apartat 2.6), va deixar de ser una curiositat i es va convertir en un candidat per ser un dels mecanismes importants de barreja oceànica (Mack, 1985; Gargett i Holloway, 1992). De totes maneres, i en paraules de Kelley et al. (2003), encara cal dedicar-hi molt d'esforç per

obtenir mesures en sistemes aquàtics naturals, parametritzar els fluxos (apartat 2.7) i implementar-los en models de circulació a escala grossa (Merryfield et al., 1999).

En aquest context, creiem que el treball que aquí presentem és una petita aportació per entendre millor el procés de DDRD i, per tant, per facilitar l'elaboració de models més ajustats. Una part del material que desenvoluparem en aquest apartat ja ha estat publicat per Sánchez i Roget (2007), que presenten per primera vegada els espectres tèrmics per al rang de les escales turbulentes en un règim DDRD. Pel que fa a estudis anteriors en què també s'hagin utilitzat sensors de microestructura per estudiar esglaons multidifusius, tenim els de Padman i Dillon (1989) i Robertson et al. (1995), que van fer mesures a l'oceà. Tanmateix, el nivell de soroll dels aparells utilitzats en aquests estudis no els va permetre resoldre totes les escales turbulentes. En llacs, malgrat els estudis a què ens hem referit en la introducció del capítol 2, tampoc no s'havien obtingut els paràmetres turbulents, cosa que sí que ha estat possible a l'estany de Banyoles.

Les dades analitzades en aquest apartat es van obtenir amb l'instrumental descrit en l'apartat 3.2, a la cubeta BII (figura 4.1), el dia 5 de juliol de 2002, en condicions de calma. Durant dues hores i mitja es van mesurar tretze perfils en els quals, just a sobre de la lutoclina, es va trobar una estratificació escalonada. Tal com discutirem en aquest apartat, aquesta estratificació és el resultat del fenomen conegut com a triple difusió en règim difusiu (apartat 2.6), en què els factors estabilitzadors són la salinitat i la concentració de partícules, i el factor inestabilitzador és la temperatura. La generalització de la DDRD a la multidifusió, i més concretament a la triple difusió, va ser introduïda teòricament i experimentalment en sistemes aquàtics per Griffiths (1979*a* i 1979*b*). Un cas de convecció per multidifusió en un llac, que ja hem comentat en el capítol 2 d'aquest treball, és el que han descrit recentment Schmid et al. (2004), on els factors estabilitzadors són diferents tipus de sals, sílices i CO₂.

Pel que fa a l'estany de Banyoles, en la figura 4.8.*a* podem observar la imatge d'un ecosondatge corresponent a la cubeta BII, en la qual, tal com hem dit, estudiarem la convecció per multidifusió. En aquesta figura es pot observar que al fons de la cubeta hi ha una lutoclina molt ben determinada i localitzada a uns 35 m de fondària (vegeu l'eix de les *z* en la figura 4.8.*b*). En la figura 4.7.*b* s'ha representat un dels perfils de temperatura enregistrat durant la campanya que estudiem. Tal com hem indicat en la figura, apareixen diferents zones i interfícies tèrmiques que enunciarem en sentit

ascendent. La primera zona és l'interior del llit fluïditzat —tèrbol, calent i salat—, una interfície tèrmica coincident amb la lutoclina, una termoclina (topogràfica) coincident amb la boca de la depressió on es troba la cubeta i, finalment, una altra termoclina de tipus estacional. La interfície tèrmica coincident amb la lutoclina és molt abrupta i en el nostre cas la variació corresponent de temperatura és d'uns 2° C. La termoclina topogràfica, localitzada a uns 20 m de fondària, manté l'interior de la cubeta aïllada de la resta de l'estany, la dinàmica principal del qual en aquella època està determinada per ones internes estacionàries, al nivell de la termoclina estacional, amb molt baixa dissipació (Roget et al. 1997). La termoclina estacional durant la campanya estava localitzada a una fondària d'uns 5 m, tal com es pot veure en la figura 4.8.b.

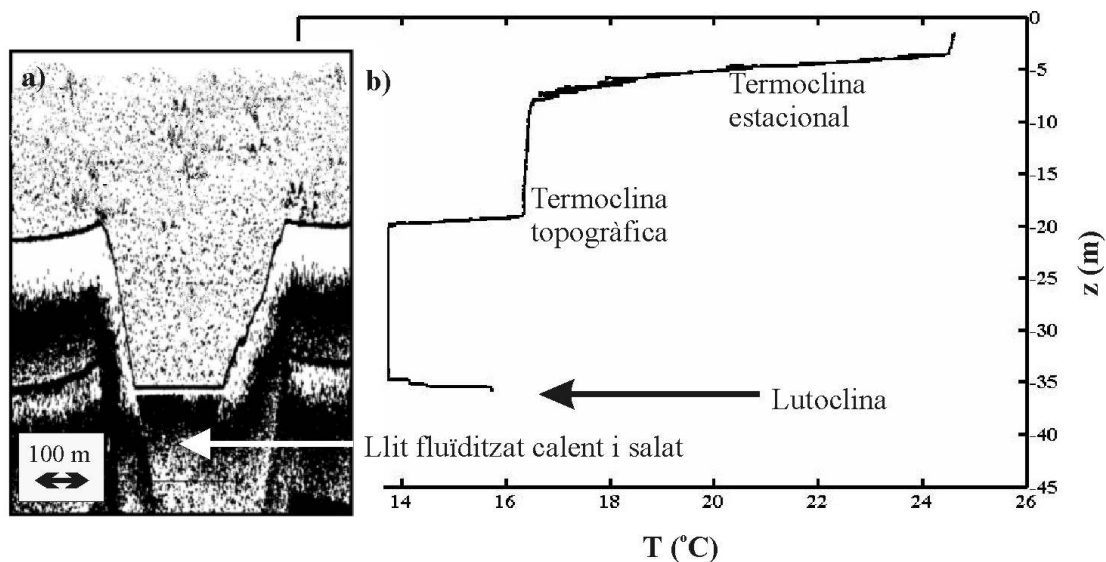


Figura 4.8. a) Imatge d'ecosonda de la cubeta BII. b) Perfil de temperatura acoblat a la imatge d'ecosonda.

A diferència de la cubeta BI, analitzada en l'apartat 4.2, on sempre es troba un llit fluïditzat amb la lutoclina gairebé a la mateixa fondària, a la cubeta BII s'hi observa un llit fluïditzat només ocasionalment. Normalment s'hi troba un llit de sediments compactat al fons, amb la lutoclina situada a 44 m de fondària. Soler et al. (2007), fent mesures setmanals, caracteritzen els episodis de fluïdització de la BII, i un d'aquests episodis, anomenat pels autors F9, és el que correspon a la campanya analitzada en aquest apartat. Aquesta fluïdització es va produir entre els mesos de maig i setembre del 2002, i la màxima altura es va assolir durant el mes de juliol, és a dir, quan es va dur a terme la campanya descrita en aquest apartat.

Una mirada més detallada a la regió que hi ha just per sobre de la lutoclina de la figura 4.8.b ens permet observar l'estructura tèrmica en esglaons, típica de la convecció per multidifusió. De manera més detallada, en la figura 4.9 es representa el perfil de temperatura, $T(z)$, ara juntament amb el de salinitat, $S(z)$, i el de la concentració de partícules, $C(z)$. Com es pot veure, l'estructura de tipus esglaons pot ser fàcilment observada per als tres camps escalars, que presenten interfícies difusives a 34.7 m, 35.2 m i 35.4 m de fondària. Les capes delimitades per aquestes interfícies s'han enumerat en la figura 4.9 d'acord amb el conveni que utilitzarem al llarg de tot l'apartat: la capa 0 correspon al llit fluïditzat, les capes 1 i 2 corresponen a regions convectives consecutives, i la capa 3, a la zona interior de l'estany situada sobre les estructures multidifusives. Com que la constant temporal del sensor de conductivitat és molt més gran que les constants corresponents als sensors de temperatura i terbolesa (apartat 3.2), les interfícies de salinitat en la figura 4.9 semblen artificialment més suaus que les altres. A més, tal com ja hem comentat en l'apartat 4.2, no s'ha pogut resoldre la salinitat dins el llit fluïditzat (capa 0) a causa de l'efecte de la concentració de partícules sobre la conductivitat elèctrica. Noteu també que, a causa de l'elevat temps de resposta del sensor de conductivitat i a causa del fet que la capa 1 té una extensió vertical més petita que la 2, la salinitat no arriba a establir-se en el que seria el valor característic de la capa, que no podem determinar. Per això s'ha treballat més extensament amb l'esglaó 2 que amb l'1, on no ha estat possible extrapolar totes les anàlisis fetes en el primer.

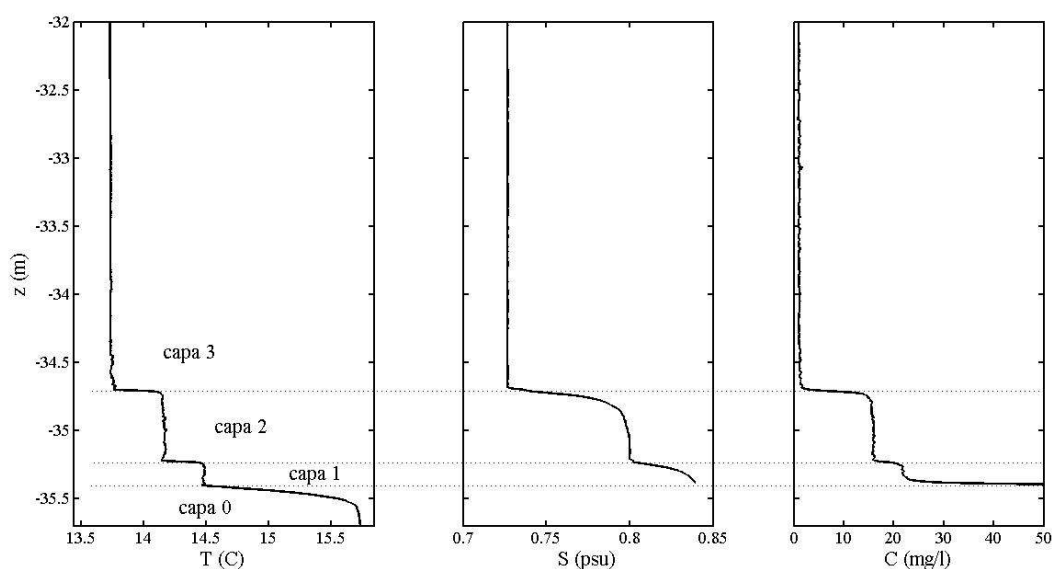


Figura 4.9. Perfils característics de temperatura (T), salinitat (S) i concentració de partícules a la regió de la lutoclina.

En els subapartats següents estudiarem les estructures multidifusives mesurades sobre el llit fluiditzat a la cubeta BII. En el subapartat 4.3.1 analitzarem el perfil de densitat considerant els criteris d'estabilitat per a la convecció per multidifusió que hem presentat en el capítol 2. En el subapartat 4.3.2 estudiarem les interfícies difusives i el transport de calor a través seu, i en el subapartat 4.3.3, els esglaons convectius, on també determinarem el flux de calor. Finalment, en el subapartat 4.3.4 contrastarem els valors experimentals de flux tèrmic amb els diferents models presentats en el capítol 2.

4.3.1. El perfil de la densitat

Tal com hem vist en l'apartat 2.6, una estratificació estàticament estable (densitat decreixent en altura) pren una estructura amb la forma d'esglaons quan el camp inestable (la temperatura) es difon més ràpidament que els estables (concentracions), i la raó de les contribucions estabilitzadores respecte a les inestabilitzadores —això és, la raó d'estabilitat R_ρ — pren valors entre 1 i 10. En el cas en què les concentracions estabilitzadores són la concentració de partícules i la salinitat, tenim que la raó d'estabilitat, definida en l'expressió 2.37a, pren la forma següent:

$$R_\rho = (\beta\Delta S + \gamma\Delta C)/(\alpha\Delta T) \quad (4.13)$$

on ΔS , ΔC i ΔT són les variacions de la salinitat, la concentració i la temperatura en la interfície, i els coeficients α , β i γ són els coeficients d'expansió tèrmica i de contracció —per a la salinitat i les partícules, respectivament (tots definits en l'apèndix A). Els valors concrets dels diferents termes de l'expressió 4.13, en la interfície 2-3 (la que separa les capes 2 i 3) per a cada un dels tretze perfils de la campanya, s'han resumit en la taula 4.1. Les tres primeres columnes són les variacions de la temperatura, la concentració de partícules i la salinitat (ΔT_{2-3} , ΔC_{2-3} i ΔS_{2-3} , respectivament); la quarta i la cinquena són les contribucions de la salinitat i les partícules en l'expressió 4.13, i la darrera columna és la raó d'estabilitat per a cada perfil. En la darrera filera, on consten les mitjanes i els errors absoluts, veiem que la contribució salina a la raó d'estabilitat és: $(\beta\Delta S_{2-3})/(\alpha\Delta T_{2-3}) = 0.97 \pm 0.02$, mentre que la corresponent a les partícules és $(\gamma\Delta C_{2-3})/(\alpha\Delta T_{2-3}) = 0.15 \pm 0.01$. És a dir, la salinitat per si mateixa no

determinaria que la interfície 2-3 fos estàticament estable —densitat decreixent en altura—, de manera que les partícules tenen un paper determinant en l'existència del règim multidifusiu. Així, si avaluem les dues contribucions (taula 4.1), llavors $(R_\rho)_{2-3} = 1.12 \pm 0.03$, de manera que no només l'estratificació és estable, sinó que també, ja que $1 < R_\rho < 10$, es donen les condicions per a l'existència d'una configuració pròpia de la multidifusió, tal com hem vist en l'apartat 2.6. Aquests mateixos càlculs no s'han pogut fer en la interfície 1-2 (entre les capes 1 i 2), perquè, tal com hem comentat abans, el camp de la salinitat no s'ha resolt bé dins la capa 1. Sobre la figura 2.7, en què s'han caracteritzat les configuracions estables i inestables de la multidifusió a partir d'un estudi d'estabilitat lineal, podem situar les nostres dades aproximadament sobre la recta de sobreestabilitat (SE), ja que, tal com hem vist en l'apartat 2.6, aquesta recta correspon a una raó d'estabilitat $R_\rho \approx 1.13$.

$\Delta T_{2-3}(K)$	$\Delta C_{2-3}(mg/l)$	$\Delta S_{2-3}(psu)$	$\beta\Delta S_{2-3}/\alpha\Delta T_{2-3}$	$\gamma\Delta C_{2-3}/\alpha\Delta T_{2-3}$	$(R_\rho)_{2-3}$
0.42	14.8	0.0732	0.975	0.158	1.13
0.43	14.4	0.0736	0.953	0.150	1.10
0.42	14.5	0.0737	0.963	0.153	1.12
0.40	13.9	0.0720	0.993	0.154	1.15
0.42	14.5	0.0734	0.957	0.152	1.11
0.40	13.8	0.0710	0.991	0.155	1.15
0.41	14.4	0.0720	0.959	0.154	1.11
0.43	15.5	0.0738	0.953	0.161	1.11
0.44	14.4	0.0740	0.925	0.145	1.07
0.45	13.3	0.0753	0.935	0.133	1.07
0.42	14.8	0.0720	0.954	0.158	1.11
0.40	14.9	0.0727	1.015	0.167	1.18
0.40	13.3	0.0710	0.994	0.150	1.14
0.42 ± 0.02	14.4 ± 0.6	0.0729 ± 0.0012	0.97 ± 0.02	0.15 ± 0.01	1.12 ± 0.03

Taula 4.1. Incrementos de temperatura, concentració de partícules i salinitat en la interfície 2-3 per a cada un dels tretze perfils, juntament amb les raons d'estabilitat parcials per a cada constituent i la raó d'estabilitat total. La darrera filera correspon als valors mitjans i els errors absoluts.

En l'apèndix A s'ha estimat que la difusivitat de les partícules en la interfície d'un llit fluïditzat és d'un ordre de magnitud de $10^{-11} m^2 / s$. També sabem que la difusivitat salina és d'un ordre de magnitud de $10^{-9} m^2 / s$. Tal com es requereix perquè es formin esglaons multidifusius, totes dues són inferiors a la difusivitat tèrmica, i aquesta última és de l'ordre de $10^{-7} m^2 / s$. Així doncs, en el nostre cas, el camp que té la difusivitat més petita (les partícules) és el que contribueix menys a estabilitzar el perfil de la densitat, però tot i això sense la seva contribució aquest perfil seria inestable. En un camp completament diferent, el del plasma en sistemes astrofísics, Menou i Balbus (2004) van trobar també que un segon element, amb la difusivitat molt petita, acaba d'estabilitzar un règim de triple difusió.

4.3.2. Les interfícies difusives de la temperatura

4.3.2.1. El nombre de Rayleigh tèrmic a les interfícies

Howard (1964), per a la convecció RB (apartat 2.4), va modelitzar com les interfícies tèrmiques evolucionen difusivament i incrementen la seva mida fins que apareix una inestabilitat. Turner (Turner 1965, 1968, 1973; Turner et al., 1970) també va considerar que el procés de creixement d'una capa convectiva de tipus DDRD finalitza quan la interfície superior assoleix un nombre de Rayleigh crític, i és llavors que neix una segona capa. Posteriorment es va observar que les inestabilitats (ditem "prebarreja") poden existir al davant de la capa, això és, per sobre de la interfície superior d'aquesta, durant el seu procés de formació. Malgrat que aquesta prebarreja pot alentir el procés de creixement de la primera capa, la seva existència no és essencial per a la formació d'una segona capa a sobre de la primera (Molemaker i Dijkstra, 1997). De totes maneres, aquesta segona capa només es formarà quan la diferència de flotabilitat a través de la interfície superior de la capa sigui prou gran per impedir el pas dels remolins (Fernando, 1987). Una vegada la segona capa s'ha format, la primera deixa de créixer (Huppert i Linden, 1979). En aquest context s'ha posat en dubte la idea inicial de Turner, ja que, a més, en el mateix laboratori de Turner (Turner 1965, 1968, 1973; Turner et al., 1970) es va trobar que el nombre de Rayleigh crític que regiria la formació d'un segon esglaó era més d'un ordre de magnitud superior que l'esperat d'acord amb la teoria de l'estabilitat.

Alguns estudis posteriors de diversos autors van corroborar els resultats experimentals de Turner, i, per tant, van treure validesa a la idea del nombre de Rayleigh crític.

Tanmateix, independentment de l'estructura de les parts superiors i inferiors de les interfícies, teòricament difusives, cal suposar almenys que la part central d'aquestes interfícies contenen un nucli amb un comportament de tipus difusiu, i de fet així ho entén la comunitat científica (Fernando, 1989a i 1989b). Llavors, considerant l'existència d'aquest nucli difusiu, sembla més escaient considerar el nombre de Rayleigh definit entre aquest nucli i les parts externes de la interfície, de manera que en aquest cas es podria definir el nombre de Rayleigh tèrmic interfacial, Ra_{δ_T} , a partir de l'expressió 2.3, en la forma següent:

$$Ra_{\delta_T} \equiv (g\alpha(\Delta T/2)\delta_T^3)/(v\kappa_T) \quad (4.14)$$

On $\Delta T/2$ és l'increment de temperatura entre el nucli difusiu i la capa (barrejada) adjacent, que de fet és la meitat de l'increment tèrmic entre dues capes convectives consecutives. Així mateix, δ_T és la mida del front difusiu, i es calcula com la meitat de la mida de la interfície amb:

$$\delta_T = -(\Delta T/2)/(dT/dz)_{MG} \quad (4.15)$$

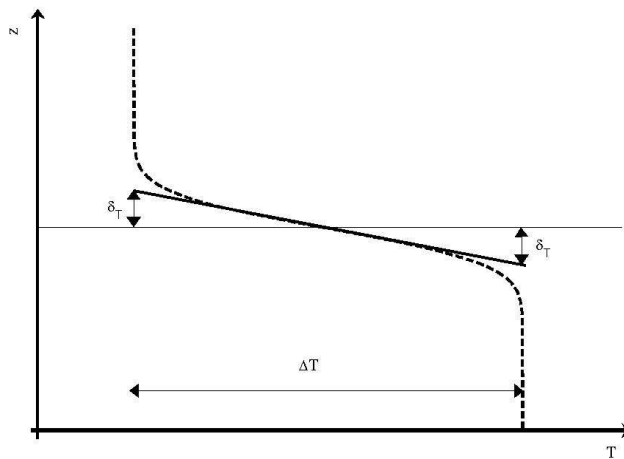


Figura 4.10. Interfície tèrmica amb increment de temperatura (ΔT) i gruix (δ_T) calculat segons el criteri descrit en el text.

A 4.15 $(dT/dz)_{MG}$ és el gradient tèrmic en el nucli difusiu, determinat igual que en l'apartat 4.2.1 com el punt de la interfície on el gradient pren el valor màxim (MG). En

la figura 4.10 s'ha representat esquemàticament la idea subjacent a la definició que hem donat a 4.14 del nombre de Rayleigh, calculat amb $\Delta T/2$ i δ_T .

L'altra possible definició del nombre de Rayleigh, la clàssica, es basa també en l'expressió 2.3 però considera tot el salt tèrmic a la interfície ΔT , i el seu gruix total $2\delta_T$, és a dir $Ra_{\delta T}^{cl} \equiv g\alpha\Delta T(2\delta_T)^3/(\nu\kappa_T)$. Per tant, la definició de $Ra_{\delta T}$ segons l'expressió 4.14 dóna resultats setze vegades més petits que la definició clàssica.

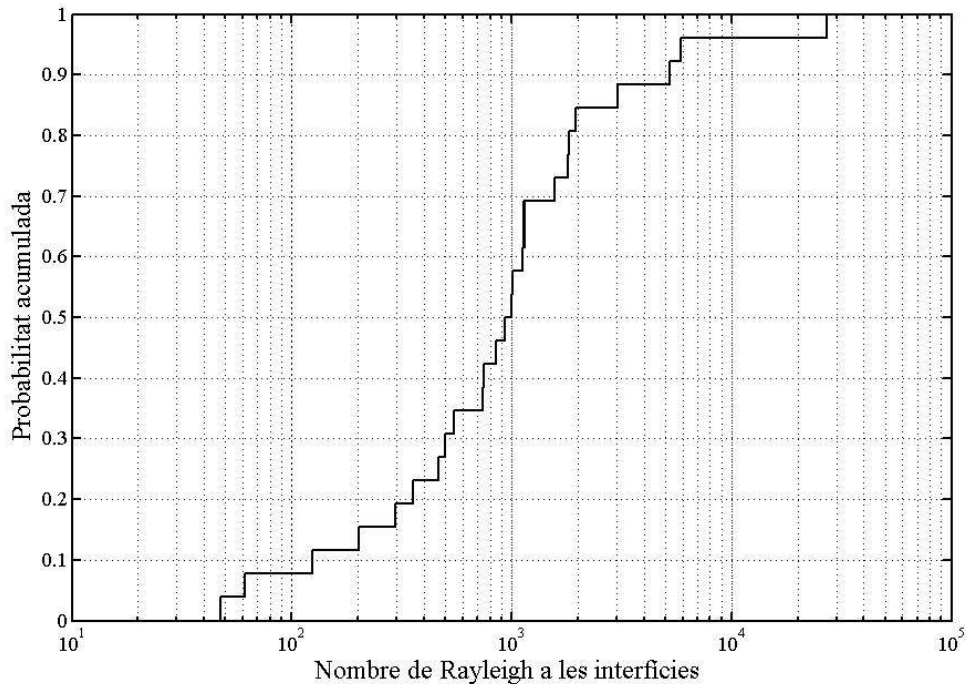


Figura 4.11. Distribució de probabilitat acumulada com a funció del nombre de Rayleigh tèrmic a les interfícies 1-2 i 2-3.

Considerant la definició 4.14, s'ha calculat $Ra_{\delta T}$, per a les interfícies difusives 2-3 i 1-2, per a tots els perfils mesurats en la campanya, i n'ha resultat una distribució de probabilitat amb una mediana i una mitjana de 1000 i 2300 respectivament. A partir de la distribució de probabilitat acumulada, representada en la figura 4.11, podem veure que el 89 % dels nombres de Rayleigh interfacials són més petits de 3000 i que el màxim valor és aproximadament 10000. Les mides mitjanes de les interfícies 2-3 i 1-2 són $\delta_{2-3} = 0.015 \pm 0.004$ m i $\delta_{1-2} = 0.021 \pm 0.013$ m respectivament. Aquests resultats concorden amb l'anàlisi de l'estabilitat lineal desenvolupada en l'apartat 2.3, per al cas de la convecció purament tèrmica (Rayleigh-Bénard), que preveu que el nombre de Rayleigh crític és de l'ordre de 1000. En aquest sentit, la idea de Turner sembla, doncs,

vigent, almenys des del punt de vista estadístic, ja que, tal com hem comentat, pot existir el que hem anomenat prebarreja i aquesta es podria donar abans que la capa anterior deixés de créixer. També, segons Fernando (1989*a* i 1989*b*), les estructures convectives dins les capes podrien afectar els contorns de les interfícies difusives. D'altra banda, recordant que la definició clàssica del nombre de Rayleigh és més gran —en un factor 16— que la definició proposada a 4.14, certs valors experimentals amb un ordre de magnitud 10^4 , esmentats en la bibliografia, donarien valors de $Ra_{\delta T} \propto 1000$ si féssim servir la definició que hem proposat a 4.14, i, per tant, en comptes de contradir la idea de Turner la reforçarien.

4.3.2.2. Fluxos tèrmics

Tradicionalment, els fluxos tèrmics (F_T) a les interfícies difusives s'obtenen amb el mètode del gradient tèrmic (Burmeister, 1993). Seguint aquest mètode, els fluxos tèrmics es van calcular a partir del gradient avaluat en el punt on aquest és màxim (MG), punt que vinculem al nucli difusiu de la interfície, és a dir:

$$F_T = -\kappa_T \left(d\bar{T} / dz \right)_{MG} \quad (4.16)$$

Aplicant 4.16 a les interfícies 0-1, 1-2 i 2-3, tenim que:

$$F_T|_{0-1} = (4.2 \pm 1.2) \times 10^{-6} \text{ C m/s} \quad , \quad F_T|_{1-2} = (2.8 \pm 1.9) \times 10^{-6} \text{ C m/s}$$

$$F_T|_{2-3} = (4.2 \pm 1.3) \times 10^{-6} \text{ C m/s}$$

Els valors anteriors són el resultat de fer la mitjana sobre els fluxos difusius corresponents al conjunt de perfils de la campanya, i l'error absolut s'ha determinat a partir de la desviació estàndard. Tanmateix, cal recordar que l'expressió del flux tèrmic total, donada a 4.2, té una contribució difusiva i una altra d'advection, que en aquest cas hem negligit. Això és així perquè el flux advection calculat a cada interfície, a partir de la velocitat característica de l'aigua que sustenta el llit fluïditzat (10^{-6} m/s) i la diferència tèrmica entre el nucli difusiu i la capa següent (10^{-1} °C), és almenys un ordre de magnitud inferior al difusiu. Si ens fixem, doncs, en els valors dels fluxos (difusius) obtinguts a les diferents interfícies, veiem que són iguals entre ells (dins el marge d'error), i per tant podem considerar que els esglaons estan en estat estacionari.

4.3.3. Les capes convectives

4.3.3.1. Les escales turbulentes

Tot i que hi ha lleis d'escala acceptades que relacionen les diferents magnituds que caracteritzen la turbulència en el context dels transports convectiu i multidifusiu (Hunt, 1984; Fernando 1989a), els mecanismes dominants en les capes convectives encara no són gaire clars i els models físics que s'apliquen es basen en diferents hipòtesis, tal com hem comentat en els apartats 2.5 i 2.7. En aquest context, presentarem alguns detalls quantitativs de l'estructura de petita escala de les capes convectives estudiades a Banyoles, que ens permetran discutir alguna de les qüestions desenvolupades en el capítol 2 i obtenir els fluxos tèrmics en les capes convectives.

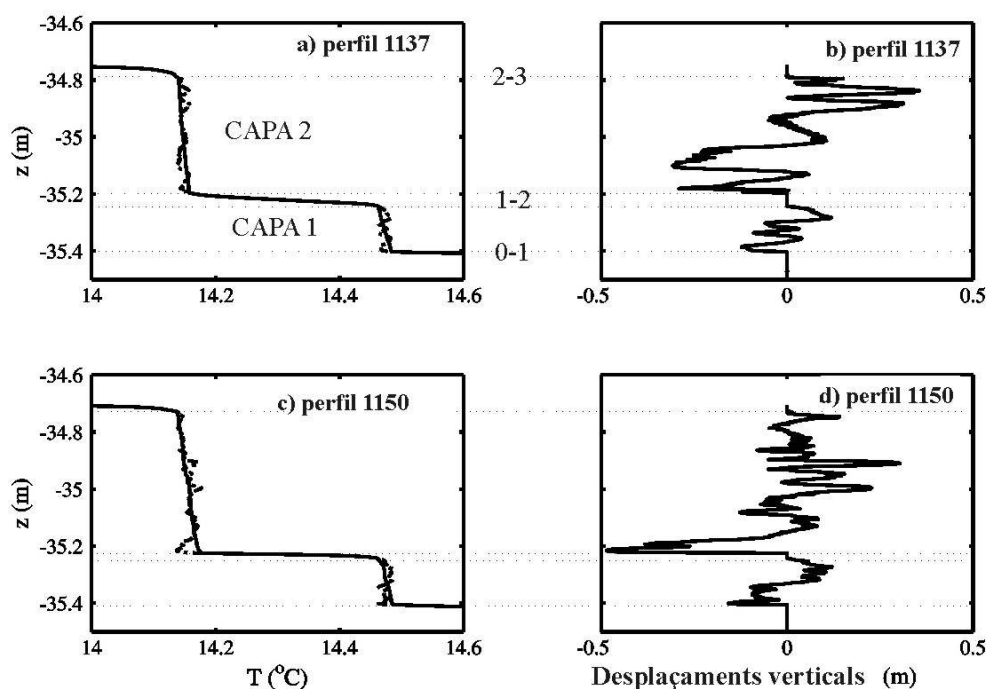


Figura 4.12. *a)* i *c)* Dos exemples de perfils de la temperatura de microestructura (línia discontinua), amb els corresponents perfils monotonitzats (línia contínua). *b)* i *d)* Desplaçaments de Thorpe dels perfils anteriors.

En la figura 4.12 es presenta la microestructura tèrmica a la zona de les capes convectives per a dos dels perfils mesurats. Les figures *a* i *c* mostren els perfils de temperatura, juntament amb els corresponents perfils monotonitzats (vegeu

l'apartat 3.5), que veiem que presenten un comportament lineal en les capes convectives, si bé *a priori* no hauria de ser necessàriament així. Considerant els tretze perfils, hem pogut determinar una estratificació tèrmica de fons per a cada una de les capes:

$$\left(\overline{dT/dz}\right)_1 = -(0.13 \pm 0.07)^\circ C/m \quad \text{i} \quad \left(\overline{dT/dz}\right)_2 = -(0.04 \pm 0.02)^\circ C/m$$

I en ambdós casos la desviació estàndard dels gradients mesurats és aproximadament la meitat del valor mitjà.

Si analitzem la relació entre l'estratificació tèrmica en la capa convectiva ($\overline{dT/dz}$) i la corresponent a l'escala grossa —introduïda en l'apartat 2.6—, definida com a $\overline{\overline{dT/dz}} \equiv -\Delta T/D$ (on ΔT i D són l'increment tèrmic vertical i la distància entre els centres de dues interfícies difusives consecutives), trobem que el quocient entre l'estratificació tèrmica de l'escala grossa i la interior de la capa convectiva val 19 i 15 a les capes 1 i 2, respectivament.

D'altra banda, els desplaçaments verticals de Thorpe, introduïts en l'apartat 3.5, s'han representat en les figures 4.12.b i 4.12.d per al cas dels dos perfils mostrats en les figures 4.12.a i 4.12.c. Com es pot veure en les figures b i d, les zones corresponents a les interfícies difusives mostren desplaçaments de Thorpe nuls, tal com era d'esperar. Així mateix, en la majoria dels casos els desplaçaments de Thorpe són més petits que el gruix de l'esglaó, si bé hi ha algun cas en què s'assoleix aquest gruix. Per abordar l'anàlisi de les escales espacials des d'un punt de vista estadístic, s'han obtingut les escales de Thorpe (L_{Th}), definides en l'apartat 3.5 com el valor quadràtic mitjà dels desplaçaments. El valor mitjà d'aquestes escales —considerant tots els perfils de la campanya— per a cada una de les dues capes convectives és:

$$L_{Th}|_1 = 0.048 \pm 0.019 \text{ m} \quad \text{i} \quad L_{Th}|_2 = 0.135 \pm 0.039 \text{ m}$$

Aquests valors, tal com havíem comentat, es poden considerar com l'escala característica de les fluctuacions (remolins) de la turbulència. Si es comparen les mides de les capes convectives D_1 i D_2 amb les escales de Thorpe, en tots dos casos es troba que $D/L_{Th} = 3.5$. Aquest resultat està d'acord amb la parametrització de Lozovatsky i Fernando (2002), que indica que el quocient entre l'escala de Thorpe i la mida d'un clap turbulent (en aquest cas la mida de la capa D) escalen en la forma $D = 3.3L_{Th}$ quan la

turbulència és prou activa. Aquesta parametrització, encara que ha estat introduïda per a la turbulència produïda per cisallament, sembla que té aplicació en el cas de la convecció multidifusiva.

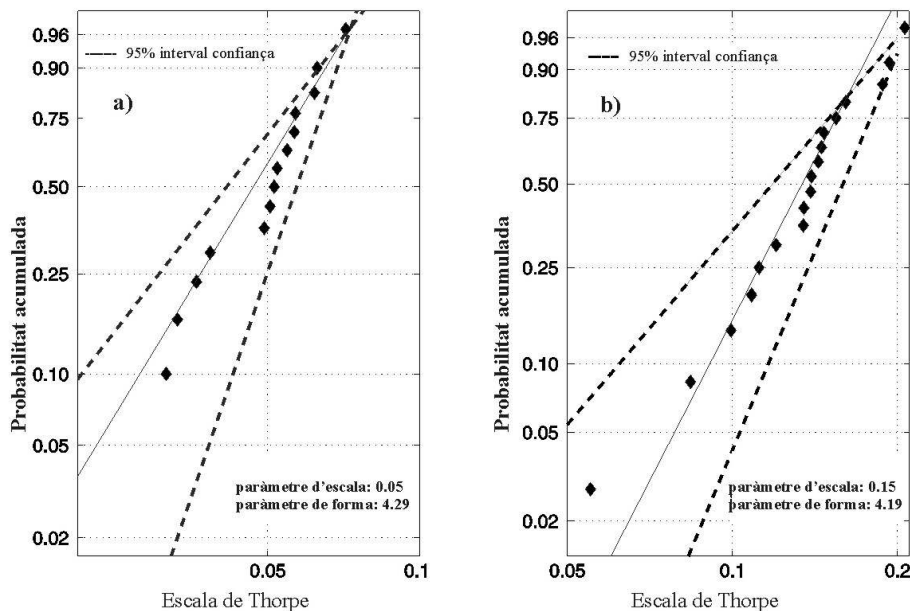


Figura 4.13. Funció de probabilitat acumulada dels desplaçaments de Thorpe dins les capes 1 (a) i 2 (b) (rombes). També és representa la probabilitat acumulada corresponent a la distribució de Weibull (traçat continu).

Una descripció més detallada de les escales turbulents en cada esglaó es pot donar a partir de la probabilitat acumulada de l'escala de Thorpe local (l_{Th}), que simbolitzem amb minúscula per diferenciar-la de l'escala de Thorpe mitjana de tota la capa (L_{Th}). En aquest cas l_{th} s'ha calculat a partir d'una única sèrie que contenia els desplaçaments de tots els perfils mesurats (un després de l'altre). La longitud de segment que es va utilitzar per calcular cada un dels l_{th} va ser de 10 cm i 30 cm a les capes 1 i 2, respectivament, que corresponen aproximadament al doble de l'escala turbulenta característica, L_{th} . En la figura 4.13.a i 4.13.b es representen les probabilitats acumulades corresponents a les capes 1 i 2. Les probabilitats acumulades segueixen bé —de fet dins el 95% de l'interval de confiança— la distribució de Weibull, introduïda en l'apartat 3.5.1, i trobem que el paràmetre d'escala és aproximadament igual a l'escala de Thorpe L_{th} , i el paràmetre de forma pren valors aproximats en tots dos casos i iguals

a 4 aproximadament, cosa que apunta el fet que la turbulència presenta dinàmiques semblants en totes dues capes.

D'altra banda, si considerem que els perfils tèrmics monotonitzats, com els de la figura 4.12, corresponen a l'estratificació mitjana $\bar{T}(z)$ dins les capes convectives, llavors podem calcular les fluctuacions de la temperatura. Aquestes fluctuacions es poden calcular sostraint del perfil tèrmic el corresponent perfil monotonitzat. Un cop tenim les fluctuacions tèrmiques, podem calcular l'espectre unidimensional vertical (apartats 1.7 i 3.3), el valor mitjà del qual, considerant tots els perfils disponibles i per a cada capa, s'ha representat en la figura 4.14. Aquests espectres s'utilitzaran en els apartats següents per obtenir les dissipacions ε i ε_T , definides en les taules 1.2 i 1.3. Cal remarcar que els espectres de la figura 4.14 són en les unitats no cícliques definides en l'apartat 3.3; és a dir, el nombre d'ona K és en cicles per metre (cpm o m^{-1}) i l'espectre S , en C^2/cpm . En la figura 4.14 també s'han representat els espectres teòrics que prediuen els diferents models de què hem parlat en el capítol 1 i que contrastarem en l'apartat 4.3.3.3.

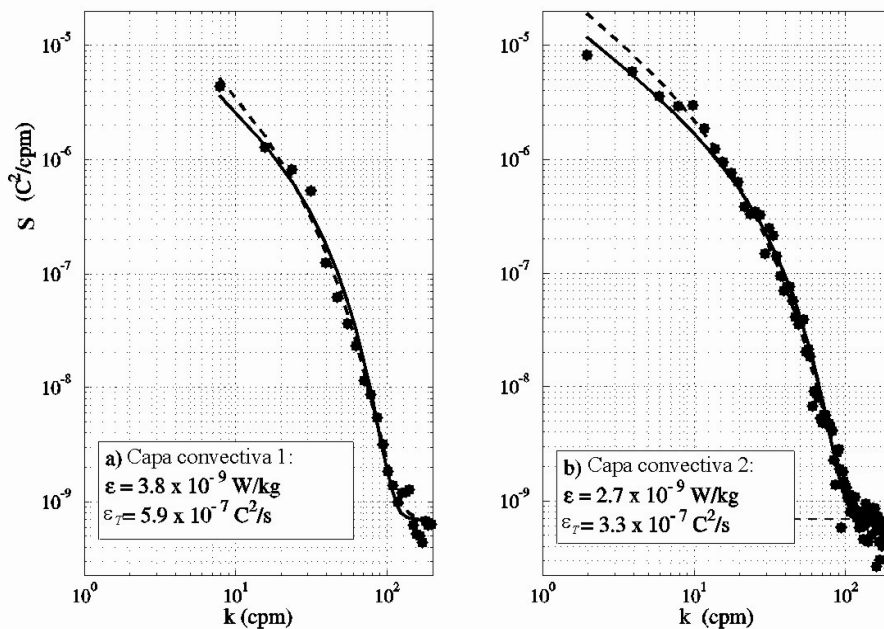


Figura 4.14. a) Espectre unidimensional de la temperatura S en funció del nombre d'ona K (representat amb punts), dins les capes 1 (a) i 2 (b). També es dona la millor estimació de l'espectre teòric de Batchelor (traçat continu) i de Kraichnan (discontínu), i els valors de les velocitats de dissipació d'energia cinètica ε i de la variància tèrmica ε_T per al cas de l'espectre de Batchelor.

4.3.3.2. Els fluxos turbulents

Si considerem l'equació 1.8 de balanç per a la variància d'un camp escalar, per al cas de la temperatura, i l'apliquem a un fluid estratificat en condicions estacionàries i en equilibri local, tenim que:

$$-2\overline{wT'}(d\overline{T}/dz) - \varepsilon_T = 0 \quad (4.17)$$

On $\overline{wT'}$ és el flux tèrmic turbulent —calculat com la mitjana de la component vertical de la velocitat w multiplicada per les fluctuacions tèrmiques T' —, ε_T és la velocitat de dissipació de la variància tèrmica i $d\overline{T}/dz$ és el gradient del camp mitjà dins la capa convectiva (calculat en el subapartat anterior). El valor de ε_T es pot trobar a partir de l'expressió 1.56, que, utilitzant el nombre d'ona K i l'espectre $S(K)$ en unitats no cícliques, pren la forma següent:

$$\varepsilon_T = 6\kappa_T \int (2\pi K)^2 S(K) dK \quad (4.18)$$

En el nostre cas, $S(K)$ són els espectres representats en la figura 4.14. Fent aquest càlcul, tenim que per a cada una de les capes:

$$\varepsilon_{T_1} = (5.9 \pm 3.2) \times 10^{-7} \text{ C}^2 / \text{s} \quad \text{i} \quad \varepsilon_{T_2} = (3.3 \pm 2.6) \times 10^{-7} \text{ C}^2 / \text{s}$$

Llavors, considerant que coneixem el gradient tèrmic dins cada capa (apartat 4.3.3.1), a partir de l'expressió 4.17 podem obtenir els fluxos turbulents, que valen:

$$\overline{wT'}\Big|_1 = (2.3 \pm 1.2) \times 10^{-6} \text{ C m/s} \quad \text{i} \quad \overline{wT'}\Big|_2 = (4.1 \pm 2.6) \times 10^{-6} \text{ C m/s}$$

Per tant, tenint en compte el marge d'error dels fluxos convectius, aquests es poden considerar iguals entre ells i també amb els obtinguts a les interfícies difusives (subapartat 4.3.2.2), cosa que reforça la idea d'estacionarietat. Els resultats obtinguts fins aquí, caracteritzant els esglaons difusius i les capes convectives, s'han recopilat en la figura 4.15, en què també s'han incorporat els valors de la variància de temperatura i de les velocitats turbulentes a cada capa. La variància de la temperatura s'ha obtingut a partir de l'expressió 1.13b, que en el cas de la temperatura es pot escriure com:

$$\overline{T'^2} = \int_0^\infty S dK \quad (4.19)$$

De manera que els valors obtinguts són 10^{-4} C^2 i $7 \times 10^{-5} \text{ C}^2$ per a les capes 1 i 2 respectivament. Llavors, com que coneixem els fluxos tèrmics turbulents, podem

obtenir les velocitats verticals característiques w a partir de $F_T = \overline{wT'} \approx w\sqrt{T'^2}$, on hem suposat que la correlació entre les fluctuacions tèrmiques i de velocitat és de l'ordre d'1. Operant en aquest sentit, trobem que $w_1 \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ i $w_2 \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$, les quals compleixen la llei de l'escala de Hunt (Hunt, 1984) donada a l'expressió 4.5. Encara que h en l'expressió 4.5 és usualment la mida de la capa D , sembla que té més sentit considerar que h és igual que l'escala característica de la turbulència. En el nostre cas, ja que en el subapartat 4.3.3.1 hem pogut determinar l'escala de Thorpe, serà aquest el valor de h que utilitzarem. Tanmateix, tal com hem vist en el subapartat anterior, l'escala característica dels desplaçaments de la turbulència és proporcional a la mida de la capa, i per això el fet d'utilitzar D o L_{Th} només afectarà el valor numèric de la constant c a 4.5. Així doncs, si avaluem 4.5, amb $h = L_{Th}$, trobem que la constant c té el mateix valor per a totes dues capes, i que aquest valor és 0.6. Per tant, la llei de l'escala de Hunt representa una bona estimació de la component vertical de la velocitat.

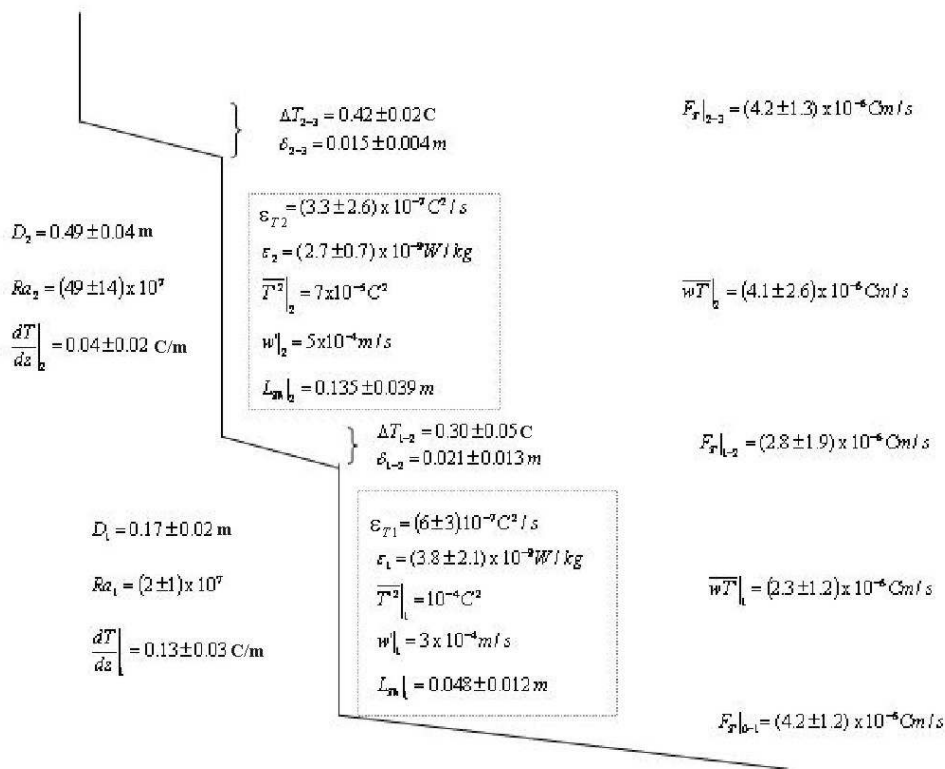


Figura 4.15. Recopilació d'algunes de les dades obtingudes per als esglaons triple difusius.

4.3.3.3. Velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta

Tornant a la figura 4.14, i tal com hem comentat, a més dels espectres experimentals (amb punts), s'han representat dos espectres més (amb traç continu i discontinu), que corresponen als dos models teòrics analitzats en l'apartat 1.6.2 i que són aplicables dins el subrang viscos difusiu. El primer, amb traçat continu, és el model de Batchelor (1959), i el segon, amb traçat discontinu, és el de Kraichnan (1968), tots dos en forma unidimensional (apartat 3.3). Per tal d'ajustar l'espectre experimental a un espectre teòric —tal com es detalla a l'apartat 3.4—, s'ha aplicat el mètode de l'estimació de la màxima versemblança (Ruddick et al., 2000). Tal com hem comentat en el capítol 3, l'espectre universal de Batchelor és el més utilitzat actualment, encara que últimament hi ha diversos autors que proposen utilitzar el de Kraichnan (Roget et al., 2006), tot i que no hi ha un argument definitiu a favor de cap d'aquests dos espectres.

Per al nostre cas hem obtingut els valors de ε a totes dues capes, considerant els dos models d'espectre universal, i aquests són:

$$\text{Batchelor: } \varepsilon_1 = (3.8 \pm 2.1) \cdot 10^{-9} \text{ W/kg} \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = (2.7 \pm 0.7) \cdot 10^{-9} \text{ W/kg}$$

$$\text{Kraichnan: } \varepsilon_1 = (4.6 \pm 2.1) \cdot 10^{-9} \text{ W/kg} \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = (3.4 \pm 0.7) \cdot 10^{-9} \text{ W/kg}$$

Com es pot veure, els resultats són molt semblants, i en aquest text utilitzarem les velocitats de dissipació d'energia cinètica turbulenta ε extretes de l'ajust de l'espectre de Batchelor, que encara és el que s'utilitza més.

Algunes consideracions anàlogues a les que ens han portat fins a l'expressió 4.17 ens permeten abordar l'equació de balanç de l'energia cinètica turbulenta (1.7) i escriure-la per a condicions estacionàries i d'equilibri local. Suposant que no hi ha producció per cisallament, aquesta equació pren la forma següent:

$$\varepsilon = g\alpha\overline{T'w} - g\beta\overline{S'w} - g\gamma\overline{C'w} \quad (4.20)$$

A 4.20 el membre de la dreta ha estat definit en la taula 1.2 com el flux de flotabilitat (J_B), que té contribucions tant del flux tèrmic com de les concentracions. En aquest cas, com que ε i $g\alpha\overline{T'w}$ són coneguts a cada capa convectiva, amb 4.20 podríem obtenir en principi la contribució de les concentracions $g\beta\overline{S'w} + g\gamma\overline{C'w}$ al flux de flotabilitat. Tanmateix, en el cas estudiat els errors obtinguts de ε i $\overline{T'w}$ (figura 4.15)

són massa pròxims a la diferència entre aquests valors per poder donar un resultat fiable. En tot cas, el que sí que es pot afirmar és que si es compleix 4.20 $g\beta\overline{S'w} + g\gamma\overline{C'w}$ té el mateix ordre de magnitud que $g\alpha\overline{T'w}$.

4.3.4. Validació dels models del flux tèrmic

Tal com hem vist en els subapartats 4.3.2.2 i 4.3.3.2, les mesures de microestructura ens permeten calcular el flux tèrmic tant al nucli difusiu de les interfícies com a les capes convectives. Tanmateix, normalment les dades de què disposem (experimentals o numèriques) corresponen a escales més grosses, i per tant no és possible obtenir els fluxos directament. Així, tal com hem detallat en l'apartat 2.4.1, serà important obtenir lleis que ens donin la dependència del flux tèrmic en funció dels paràmetres d'escala grossa. Aquestes lleis s'acostumen a escriure en la forma de l'equació 2.43a, és a dir, amb el nombre de Nusselt, Nu (flux tèrmic adimensionalitzat), dependent del nombre de Rayleigh tèrmic (Ra_T) de la capa convectiva, de la raó d'estabilitat (R_ρ) i de les propietats moleculars (la viscositat i les difusivitats). En els apartats 2.3 i 2.4 ja hem parlat àmpliament de models, però tot i això podem resumir-ho dient que en general la dependència que s'aplica, tant en la convecció RB com en la convecció DDRD, és de tipus potencial, en la forma:

$$Nu = CRa_T^p \quad (4.21)$$

En el cas de la convecció de RB, C depèn tan sols del nombre de Prandtl, però en la convecció DDRD també depèn de la raó d'estabilitat (R_ρ) i de la raó entre les difusivitats de concentració i tèrmica. En aquest marc, les diferents parametritzacions de tipus empíric, semiempíric o teòric per als casos de les conveccions de RB i la DDRD preveuen lleis potencials diferents, així com diferents parametritzacions de C .

A continuació compararem les nostres dades amb els diferents models existents per a la convecció RB i la DDRD. Per això abans recopilarem aquí els valors de diferents paràmetres que —directament o indirectament— surten en els models i que ja hem obtingut anteriorment a partir de les dades experimentals que tenim.

Concretament, hem vist que el gruix de les capes convectives (esglaons) era de:

$$D_1 = (0.17 \pm 0.02)m \quad , \quad D_2 = (0.49 \pm 0.04)m$$

I que els increments tèrmics corresponents a les interfícies superiors a cada capa són:

$$\Delta T_{1-2} = (0.30 \pm 0.05)^\circ C \quad , \quad \Delta T_{2-3} = (0.42 \pm 0.02)^\circ C$$

A partir d'aquests valors, els nombres de Rayleigh tèrmics Ra_T de les capes, calculats amb 2.3, són:

$$Ra_1 = (2 \pm 1) \times 10^7 \quad , \quad Ra_2 = (49 \pm 14) \times 10^7$$

D'altra banda, per calcular el nombre de Nusselt, definit a 2.28, s'ha considerat que el sistema que estudiem estava en estat estacionari, i, en concret, s'ha determinat a partir dels valors mitjans del flux obtingut a les interfícies i dins les capes —que ja hem comentat que eren iguals dins del marge d'error—, de manera que:

$$Nu_1 = 10 \pm 7 \quad , \quad Nu_2 = 34 \pm 21$$

Recordem que, tal com hem dit en el capítol 2, les primeres parametritzacions per a la convecció multidifusiva que van aparèixer van ser amb lleis potencials del tipus 4/3 —això és amb $p = 1/3$ dins l'expressió 4.21. També, en l'apartat 2.4.1, hem revisat les diferents dependències proposades fins a l'actualitat per a la funció C . Aquestes van ser donades per Hupert (1971) —expressió 2.45—, Marmorino i Caldwell (1976) —expressió 2.46—, Linden i Shirtcliffe (1978) —expressió 2.47—, Taylor (1988) —expressió 2.48— i Kelley (1990) —expressió 2.49. Si considerem una dependència del tipus 4/3, la substitució de les nostres dades experimentals en l'expressió 4.21 amb $p = 1/3$ dona $C = 0.04$ per a totes dues capes. Entre els models teòrics per doble difusió esmentats, el que dona Linden —equació 2.47— és el que s'apropa més a les nostres dades. Utilitzant una raó d'estabilitat igual per a totes dues capes, això és $R_\rho = 1.12$, aquest model teòric preveu un resultat igual a $C = 0.05$. El model teòric de Linden és només aplicable per a la DDRD, i per tant C depèn de R_ρ i de la raó entre la difusivitat de la concentració i la tèrmica. Encara que el nostre sistema és triple difusiu, i per tant amb dos camps de concentració, el fet que la difusivitat salina κ_S sigui diversos ordres de magnitud més gran que la de les partícules ens ha permès utilitzar 2.47. Així doncs, en l'expressió 2.47 hem utilitzat $\tau = \kappa_S / \kappa_T$. El model de Linden mostra la dependència següent entre els nombres de Rayleigh i Nusselt:

$$Nu = 0.058 \frac{(1 - \tau^{1/2} R_\rho)^{4/3}}{(1 - \tau^{1/2})^{1/3}} Ra^{1/3} \quad (4.22)$$

En la figura 4.16 es representen els valors experimentals dels nombres de Nusselt i Rayleigh calculats a partir de les interfícies difusives (creus) i dins les capes convectives (rodones). A més, en la mateixa figura, es representa la dependència del model teòric de Linden de color verd continu.

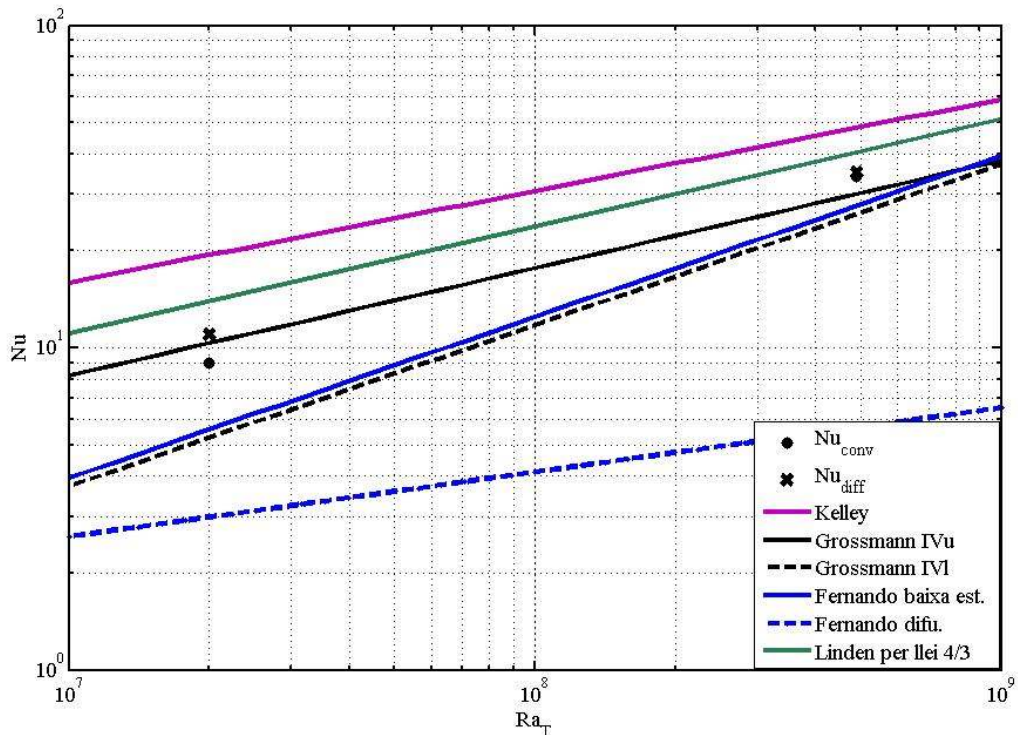


Figura 4.16. Dades experimentals del nombre de Nusselt i el nombre de Rayleigh tèrmic (escales logarítmiques), juntament amb els models comentats en el text que més s'apropen a les dades experimentals.

La parametrització de Taylor (1988), encara que va ser proposada per a raons d'estabilitat baixes, com és el nostre cas, prediu uns valors molt més alts que els valors experimentals donats. Així mateix succeeix per a la resta de parametritzacions, que van ser proposades per a raons d'estabilitat més elevades (en general per a $R_\rho > 3$). Si en l'equació 4.21 considerem que la potència no ha de ser per força únicament 1/3, i que fins i tot hi pot haver una dependència per al nombre de Nusselt diferent d'una llei potencial pura, hi ha diferents models, que ja hem presentat en el capítol 2 i que contrastarem a continuació.

El model teòric per a la DDRD de Fernando (1989a i 1989b), analitzat en l'apartat 2.4.1, considera dos règims convectius diferents: el règim difusiu i el de baixa estabilitat, que anomenarem *td* i *be*. El règim difusiu és caracteritzat per $\delta_T > \delta_S$, on δ_T i δ_S són la mida de les interfícies tèrmica i salina respectivament. En aquest règim tota la zona de les interfícies manté un comportament de tipus difusiu. Tanmateix, amb una raó d'estabilitat prou petita, com és el cas estudiat, l'autor proposa l'aparició d'un règim, anomenat de baixa estabilitat (*be*), en què els remolins presents en la zona convectiva poden arribar a entrar a la zona interfacial. En aquest règim de baixa estabilitat es pot assumir la igualtat entre les mides interfacials amb $\delta_T \approx \delta_S$. Les lleis potencials corresponents als règims del model de Fernando les hem donat en les expressions 2.50a i 2.50b, que recordem seguidament:

$$\text{F89td: } Nu = 7 \times 10^{-2} Ra^{1/5} Pr^{1/5} \quad (2.50a)$$

$$\text{F89be: } Nu = 4.7 \times 10^{-4} Ra^{1/2} Pr^{1/2} \quad (2.50b)$$

Els dos règims del model de Fernando també s'han representat en la figura 4.16. Els fluxos predits per al règim de baixa estabilitat, $Nu_1 = 5$ i $Nu_2 = 28$, són els que tenen més semblança amb les dades experimentals que hem mostrat abans: $Nu_1 = 10 \pm 7$ i $Nu_2 = 34 \pm 21$. Tal com es pot constatar en la figura 4.16, els valors predits pel règim difusiu són força més petits que els valors obtinguts experimentalment.

Les dades experimentals obtingudes també concorden raonablement amb els resultats predits pels models de convecció de Rayleigh-Bénard, almenys en el cas que la difusivitat tèrmica sigui molt més gran que les difusivitats de les concentracions. Aquest és el cas del model semiempíric de Kelley (1990), que també hem representat en la figura 4.16, segons el qual:

$$Nu = (0.164 \pm 0.004) Ra_D^{0.284 \pm 0.001} \quad (4.23)$$

Per al cas estudiat, aquesta llei preveu $Nu_1 = 19$ i $Nu_2 = 48$, valors lleugerament superiors als que s'han trobat experimentalment. Aquest model considera una capa fronterera de la velocitat (amb cisallament), dins la qual es produeix bàsicament tota la dissipació d'energia cinètica. Així mateix, també considera que la capa fronterera de la velocitat supera en mida la tèrmica.

Finalment, també s'ha avaluat el model de Grossmann i Lohse (2000, 2001, 2002, 2003, 2004) per convecció RB. Aquest model, tal com hem comentat en l'apartat 2.3.1, considera que entre les dues interfícies existeix un “vent de turbulència”, que s'ha d'entendre com l'escala grossa de la turbulència. El model proposa lleis d'escala basant-se en les equacions dinàmiques, i a més distingeix entre vuit règims. Aquests règims són determinats per la relació entre la mida de la capa fronterera tèrmica i la de la velocitat, i per la relació entre les dissipacions d'energia cinètica turbulenta (ε) i variància tèrmica (ε_T) dins i fora de les interfícies. En la taula 2.1 es mostren els diferents règims, que són anomenats pels autors règims I_l , I_u , II_l , II_u , III_l , III_u , IV_l , IV_u . La numeració romana (tal com es defineix en la segona columna de la taula 2.1) ens indica la regió on es produeix la dissipació; així per exemple, per als règims I dominen les dissipacions produïdes a les capes frontereres ($\langle \varepsilon \rangle_{CF}$ i $\langle \varepsilon_T \rangle_{CF}$) sobre les produïdes en la regió interior ($\langle \varepsilon \rangle_{gros}$ i $\langle \varepsilon_T \rangle_{gros}$). D'altra banda, els subíndexs l i u indiquen la relació entre les mides de la capa fronterera tèrmica (δ_T) i la de la velocitat (δ_u), de manera que l vol dir $\delta_u < \delta_T$, i u $\delta_u > \delta_T$. Els règims que prediuen de manera més encertada les nostres dades són els règims IV_l i IV_u . En tots dos règims dominen les dissipacions en la regió interior, però el primer compleix $\delta_u < \delta_T$ i el segon $\delta_u > \delta_T$. Les lleis per al flux tèrmic en els dos casos descrits són:

$$IV_l : Nu = 4.43 \times 10^{-4} Ra_T^{1/2} Pr^{1/2} \quad (4.24a)$$

$$IV_u : Nu = 0.038 Ra_T^{1/3} \quad (4.24b)$$

El règim IV_u prediu molt bé els fluxos, tal com es pot apreciar en la figura 4.16. Per a les capes 1 i 2 aquest règim dona els valors $Nu_1 = 10$ i $Nu_2 = 30$. En canvi, el règim IV_l prediu els valors $Nu_1 = 6$ i $Nu_2 = 26$, que són lleugerament inferiors als que s'han trobat experimentalment, però encara dins el marge d'error. Cal remarcar, tal com es pot apreciar en la figura 4.15, que el règim IV_l (expressió 4.24a) té una dependència gairebé idèntica al règim de baixa estabilitat de Fernando (expressió 4.50b).

Tal com es pot veure en la taula 2.1, el model de Grossmann també prediu bé el nombre de Reynolds del “vent de turbulència” per a cada un dels règims. Pel que fa als dos règims estudiats, el nombre de Reynolds depèn del nombre de Rayleigh en la forma següent:

$$IV_l : Re = 0.036Ra_T^{1/2} Pr^{-1/2} \quad (4.25a)$$

$$IV_u : Re = 0.16Ra_T^{4/9} Pr^{-2/3} \quad (4.25b)$$

A partir de l'estimació de la velocitat convectiva característica dins de cada capa, que hem fet en l'apartat 4.3.3.2, podem calcular els valors experimentals dels nombres de Reynolds del vent, que en el nostre cas són $Re_1 = 51$ i $Re_2 = 245$. Els valors del nombre de Reynolds predits per al règim IV_u , utilitzant l'expressió 4.25b, són $Re_1 = 76$ i $Re_2 = 318$, els quals també concorden molt bé amb els experimentals. Per al cas del règim IV_l , els valors calculats a partir de l'expressió 4.25a són $Re_1 = 6$ i $Re_2 = 26$, els quals són lleugerament inferiors als valors experimentals, però encara en concordança amb l'estimació. Els autors proposen considerar estats de transició entre els diferents règims purs descrits, a partir de combinacions lineals de les lleis descrites en la taula 2.1. Atès que els règims IV_l i IV_u donen prediccions acceptables sobre les estructures convectives de tipus multidifusiu trobades a l'estany de Banyoles, sembla raonable considerar que el sistema es pot considerar com un estat entremig entre IV_l i IV_u . Aquest estat estaria caracteritzat per la dominància de les dissipacions en la zona convectiva interior sobre els corresponents valors en les zones frontereres, però també per $\delta_u \approx \delta_T$. Així mateix, i recordant les bones prediccions del model de baixa estabilitat de Fernando, podem considerar que $\delta_T \approx \delta_S$.

Respecte a les mides dels esglaons, en l'apartat 2.7 s'han donat dues dependències, la de Turner (1965, 1968) i la de Fernando (1989a i 1989b), les quals són determinades per les expressions 2.43 i 2.50f, respectivament, que recuperem seguidament:

$$d = (Ra_{cr} / 4) \left[\frac{\nu (g\alpha F_T)^3}{\kappa_T^2 \left(g\beta \left| d\bar{C} / dz \right| \right)^4} \right]^{1/4} \quad (2.43)$$

$$d = 12.5 \frac{(g\alpha F_T)^{1/2}}{\left(g\beta \left| d\bar{C} / dz \right| \right)^{3/4} \left(1 - R_\rho^{-1} \right)^{3/4}} \quad (2.50f)$$

El terme doble difusiu d'escala grossa $g\beta d\bar{C} / dz$, pensat per a un únic camp de concentració, serà substituït en el nostre cas —triple difusiu— per

$g\beta d\bar{S}/dz + g\gamma d\bar{C}/dz$, que equiparem a $-g(\beta\Delta S + \gamma\Delta C)/D$. Aquest es pot calcular exactament a la capa 2, on hem resolt l'estratificació d'escala grossa —tal com hem detallat en l'apartat 4.3.1—, i s'obté un valor de $g\beta d\bar{S}/dz + g\gamma d\bar{C}/dz = -1.3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-2}$. D'altra banda, utilitzant el flux convectiu que hem trobat per a la capa 2 en l'apartat 4.3.3.3, $g\alpha F_T = 5.6 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}^3$, l'expressió 2.43 de Turner (amb $Ra_{cr} \approx 1000$) prediu valors de la mida de la capa superiors al model de Fernando (equació 2.50f), que dona una mida de la capa de 0.73 m , i per tant superior a la mesurada de 0.49 m , tot i que del mateix ordre.

Per tant, tot i els avenços en la modelització del flux, la determinació del gruix dels esglaons a partir de dades d'estratificació d'escala grossa encara és un problema i per tant continuem sense poder incorporar la física multidifusiva en simulacions numèriques de barreja en sistemes aquàtics naturals.

4.4. Bibliografia

- Batchelor, G. K. (1959), "Small scale variation of convected quantities like temperature in a turbulent fluid", *Journal of Fluid Mechanics*, 5, 113-133.
- Bolgiano, R. (1959), "Turbulent spectra in a stably stratified atmosphere", *Journal of Geophysical Research*, 64, 2226.
- Burmeister, L. C. (1993), *Convective heat transfer*, John Wiley and Sons, 619 p.
- Casamitjana, X. i E. Roget (1986), "Meromixis phenomena in Lake Banyoles (in Catalan)", *Scientia Gerundensis*, 12, 151-161.
- Casamitjana, X., E. Roget, D. Jou i J. E. Llebot (1988), "Effect of the suspended sediment in the heating of Lake Banyoles", *Journal of Geophysical Research*, 93, C8 9332-36.
- Casamitjana, X. i E. Roget (1993), "Resuspension of sediment by focused groundwater in Lake Banyoles", *Limnology and Oceanography*, 38(3), 643-656.

- Colomer J., T. Serra, J. Piera, E. Roget i X. Casamitjana (2001), "Observations of an hydrothermal plume in a karstic lake", *Limnology and Oceanography*, 46, 1, 197-203.
- Fernando, H. J. S. (1987), "The formation of a layered structure when a stable salinity gradient is heated from below", *Journal of Fluid Mechanics*, 182, 525-541.
- Fernando, H. J. S. (1989a), "Buoyancy transfer across a diffusive interface", *Journal of Fluid Mechanics*, 209, 1-34.
- Fernando, H. J. S. (1989b), "Oceanographic implications of laboratory experiments on diffusive interfaces", *Journal of Physical Oceanography*, 19, 1707-1715.
- Fischer, H. B. (1979), "Turbulent jets and plumes", *Mixing in inland and coastal waters*, Academic Press, Nova York, 315-389.
- Gargett, A. E. i G. Holloway (1992), "Sensitivity of the GFDL ocean model to different diffusivities of heat and salt", *Journal of Physical Oceanography*, 22(10), 1158-1177.
- Griffiths, R. W. (1979a), "The transport of multiple components through thermohaline diffusive interfaces", *Deep-Sea Research*, 26A, 383-397.
- Griffiths, R. W. (1979b), "The influence of a third diffusing component upon the onset of convection", *Journal of Fluid Mechanics*, 92, 659-670.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2000), "Scaling in thermal convection: a unifying theory", *Journal of Fluid Mechanics*, 407, 27-56.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2001), "Thermal convection for large Prandtl number", *Physical Review Letters*, 86(15), 3316-3319.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2002), "Prandtl and Rayleigh number dependence of the Reynolds number in turbulent thermal convection", *Physical Review E*, 66, 1-6.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2003), "On geometry effects in Rayleigh-Bénard convection", *Journal of Fluid Mechanics*, 486, 105-114.
- Grossmann, S. i D. Lohse (2004), "Fluctuations in turbulent Rayleigh-Bénard convection: the role of plumes", *Physics of Fluids*, 16(12), 4462-4472.
- Howard, L. N. (1964), "Convection at high Rayleigh number", *Proceedings of the 11th International Congress on Applied Mechanics*, Springer Verlag, Berlín, 1109-1115.
- Hunt, J. C. R. (1984), "Turbulence structure in thermal convection and shear-free boundary layers", *Journal of Fluid Mechanics*, 138, 138-161.

- Huppert, H. E. (1971), "On the stability of a series of double-diffusive layers", *Deep-Sea Research*, 18, 1005-1021.
- Huppert, H. E. i P. F. Linden (1979), "On heating a stable salinity gradient from below", *Journal of Fluid Mechanics*, 95, 431-464.
- Incropera, F. P. i D. P. Dewitt (1996), *Introduction to heat transfer*, John Wiley and Sons, Nova York.
- Kelley, D. E. (1990), "Fluxes through diffusive staircases: a new formulation", *Journal of Geophysical Research*, 95, 3365-3371.
- Kelley, D. E., H. J. S. Fernando, A. E. Gargett, J. Tanny i E. Özsoy (2003), "The diffusive regime of double-diffusive convection", *Progress in Oceanography*, 56, 461-481.
- Kolmogorov, A. N. (1941), "Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence", *Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S*, 32, 16-18.
- Kraichnan, R. H. (1968), "Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence", *Physics of Fluids*, 11, 945-953.
- Lilley, M., S. Lovejoy, K. Strawbridge i D. Schertzer (2004), "23/9 dimensional anisotropic scaling of passive admixtures using lidar aerosol data", *Physical Review E*, 70, 036307.
- Lin, S-Ch. i P. F. van Eken (2006), "Dynamics of thermochemical plumes: 1. Plume formation and entrainment of a dense layer", *Geochemistry geophysics geosystems*, vol. 7, Q02006, DOI: 10.1029/2005GC001071.
- Linden, P. F. i T. G. F. Shirtcliffe (1978), "The diffusive interface in double-diffusive convection", *Journal of Fluid Mechanics*, 87, 417-432.
- Lozovatsky, I. i H. J. S. Fernando (2002), "Mixing on a shallow shelf of the Black Sea", *Journal of Physical Oceanography*, 32, 945-956.
- Mack, S. (1985), "Two-dimensional measurement of oceanic microstructure. The role of double diffusion", *Journal of Physical Oceanography*, 15, 1581-1604.
- Marmorino, G. O. i D. R. Caldwell (1976), "Heat and salt transport through a diffusive termohaline interface", *Deep-Sea Research*, 23, 59-67.
- Merryfield, W. J., G. Holloway i A. E. Gargett (1999), "A global model with double-diffusive mixing", *Journal of Physical Oceanography*, 29, 1124-1142.
- Menou, K. i S. A. Balbus (2004), "Local axisymmetric diffusive stability of weakly-magnetized, differentially-rotating, stratified fluids", *The Astrophysical Journal*, 607, 564-574.

- Molemaker, M. J. i H. Dijkstra (1997), "The formation and evolution of a diffusive interface", *Journal of Fluid Mechanics*, 331, 199-229.
- Moreno-Amich, R. i E. García-Berthou (1989), "A new bathymetric map based on echo-sounding and morphometrical characterization of the Lake of Banyoles (NE-Spain)", *Hydrobiologia*, 185, 83-90.
- Obukhov, A. M. (1949), "Temperature field structure in a turbulent flow", *Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Geog. Geofiz.*, 13, 58-69.
- Obukhov, A. M. (1959), "Effect of buoyancy forces on the structure of the temperature field in a turbulent flow", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 125, 1246.
- Padman, L. i T. M. Dillon (1989), "Thermal microstructure and internal waves in an oceanic diffusive staircase", *Deep-Sea Research*, 36, 531-542.
- Perrier, V., T. Philipovitch i C. Basdevant (1995), "Wavelet spectra compared to Fourier spectra", *Journal of Mathematical Physics*, 36(3).
- Robertson, R. A., L. Padman i M. D. Levine (1995), "Finestructure, microstructure, and vertical mixing processes in the western Weddell Sea", *Journal of Geophysical Research*, 100, 18517-18535.
- Roget, E. (1987), *Estudi dels cabals sorgents per les cubetes de Banyoles*, treball de recerca, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Roget, E., J. Colomer, X. Casamitjana i J. E. Llebot (1993), "Bottom currents induced by baroclinic forcing in Lake Banyoles (Spain)", *Aquatic Sciences*, 55(3), 206-227.
- Roget, E., X. Casamitjana i J. E. Llebot (1994), "Calculation of the flow into a lake through the underground spring with suspensions", *Netherlands Journal of Aquatic Ecology*, 281, 135-141.
- Roget, E., G. Salvadé i F. Zamboni (1997), "Internal seiche climatology in a small lake where transversal and second vertical modes are usually observed", *Limnology and Oceanography*, 4(42), 663-673.
- Roget, E., I. Lozovatsky, X. Sánchez i M. Figueroa (2006), "Microstructure measurements in natural waters: methodology and applications", *Progress in Oceanography*, 70, 126-148.
- Ruddick, B. R., A. Anis i K. Thompson (2000), "Maximum likelihood spectral fitting: the Batchelor spectrum", *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 17, 1541-1555.

- Sánchez, X. i E. Roget (2007), “Microstructure measurements and heat flux calculations of a triple-diffusive process in a lake within the diffusive layer convection regime”, *Journal of Geophysical Research*, 112.
- Schmid, M., A. Lorke, C. Dinkel, G. Tanyileke i A. Wüest (2004), “Double-diffusive convection in Lake Nyos, Camerun”, *Deep-Sea Research*, I 51, 1097-1111.
- Shang, X. D. i K. Q. Xia (2001), “Scaling of the velocity power spectra in turbulent thermal convection”, *Physical Review E*, 64(6).
- Soler, M., T. Serra, J. Colomer i R. Romero (2007), “Anomalous rainfall and associated atmospheric circulation in the northeast Spanish Mediterranean area and its relationship to sediment fluidization events in a lake”, *Water Resources Research*, 43.
- Taylor, J. (1988), “The fluxes across a diffusive interface at low values of the density ratio”, *Deep-Sea Research*, 35(4), 555-567.
- Thorpe, S. A. (1977), “Turbulence and mixing in a Scottish loch”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A286, 125-181.
- Turner, J. S. (1965), “The coupled turbulent transports of salt and heat across a sharp density interface”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 8, 759-767.
- Turner, J. S. (1968), “The behaviour of a salinity gradient heated from below”, *Journal of Fluid Mechanics*, 33, 183-200.
- Turner, J. S., T. G. L. Shirtcliffe i P. G. Brewer (1970), “Elemental variations of transport coefficients across density interfaces in multiple diffusive systems”, *Nature*, 228, 1083-1084.
- Turner, J. S. (1973), *Buoyancy effects in fluids*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge University Press, Nova York.

RECOPILOCACIÓ I POSSIBLES LÍNIES DE FUTUR

Resum

Aquest treball conté una part metodològica que ha requerit recórrer als fonaments de la turbulència (capítols 1 i 2) i una part aplicada (capítols 3 i 4) en què els conceptes i mètodes introduïts en els capítols 1 i 2 han servit per estudiar els processos convectius en el fons d'un estany amb entrades d'aigua subterrània.

En general s'ha fet èmfasi en la turbulència i en la microestructura dels sistemes aquàtics naturals partint d'una aproximació experimental. Per això s'ha utilitzat un perfilador que ens ha permès obtenir les fluctuacions turbulentes de la temperatura i el cisallament de petita escala. A partir d'aquestes dades s'han posat a punt i s'han optimitzat diferents mètodes per caracteritzar la turbulència.

S'han ajustat els espectres unidimensionals obtinguts experimentalment per diferents variables als corresponents models teòrics dins el rang de les escales més petites, on domina la dissipació i les propietats són isòtropes. De l'ajust de l'espectre del cisallament i del tèrmic s'ha obtingut la *dissipació de l'energia cinètica turbulenta*, ε . L'anomenada *dissipació de la variància tèrmica*, ε_T , s'ha obtingut també a partir de l'espectre tèrmic experimental.

Per ajustar els espectres s'ha utilitzat un mètode automàtic basat en l'estimació de la màxima versemblança, el qual assumeix que la variabilitat estadística de l'espectre experimental respecte del teòric és determinada per una distribució khi quadrat. Com que els espectres depenen de ε , la determinació de l'espectre teòric que mostra més versemblança amb l'experimental permet trobar aquest valor dissipatiu.

Els models teòrics utilitzats per a l'espectre tèrmic dins els rangs viscos convectiu i viscos difusiu són el de Batchelor —el que més s'ha utilitzat fins ara— i el de Kraichnan —que s'ha començat a utilitzar recentment—. A partir d'un primera anàlisi hem observat que el model de Kraichnan dóna valors de la dissipació fins a un 30 % més grans que el de Batchelor. Tot i així, en el treball que presentem sobre convecció multidifusiva —dins el capítol 4— hem continuat utilitzant el model de Batchelor, emprat encara per la major part de la comunitat científica, i deixem per més endavant la continuació de l'anàlisi comparativa dels dos models, ja que cal un nombre molt elevat de dades experimentals i que prevegin un rang de dissipació més ampli.

En el context d'aquest treball s'ha obtingut la forma algebraica de l'espectre unidimensional de Kraichnan, a partir del corresponent espectre tridimensional, tot assumint condicions d'isotropia. Encara que l'espectre tridimensional de Kraichnan va ser proposat fa prou anys, encara no s'havia donat a la bibliografia el corresponent espectre unidimensional. En aquest treball s'ha obtingut aquest espectre unidimensional, el qual, adimensionalitzat segons els criteris donats al capítol 1, pren la forma:

$$\hat{F}_\theta(\hat{k}_3) = q \frac{\exp(-\sqrt{6q}\hat{k}_3)}{\hat{k}_3}$$

on l'espectre unidimensional d'un camp escalar (com la temperatura o la concentració) i el corresponent nombre d'ona se simbolitzen amb \hat{F}_θ i \hat{k}_3 , respectivament, i q és l'anomenada *constant turbulenta*. En la seva forma dimensionalitzada, aquest espectre depèn també dels ritmes de dissipació d'energia cinètica turbulenta i de variància de l'escalar, així com de les propietats moleculars del fluid.

Respecte a la forma teòrica de l'espectre del cisallament, s'ha obtingut numèricament, també dintre d'aquest treball, a partir del model d'espectre de l'energia de Panchev i Kesich. A diferència del cas tèrmic, on l'espectre unidimensional es pot obtenir analíticament a partir de l'espectre tridimensional, l'espectre del cisallament s'ha d'obtenir per mitjà d'eines numèriques a partir de l'espectre de l'energia. En el context d'aquest treball, un cop obtingut l'espectre s'ha buscat un ajust analític, de manera que l'espectre de cisallament sorgit del model de Panchev i Kesich es pot escriure com a:

$$\hat{F}_{cis}(\hat{k}_3) = 0.9372\hat{k}_3^{0.3748} \exp(-6.011\hat{k}_3^{1.548})$$

on també l'espectre del cisallament, \hat{F}_{cis} , i el nombre d'ona unidimensional, \hat{k}_3 , són donats com a variables adimensionalitzades. Aquest espectre, en la seva forma dimensionalitzada, també depèn del ritme de dissipació de l'energia cinètica turbulenta i de les propietats moleculars.

En aquest treball s'ha posat a punt l'ajustament automàtic de l'espectre tèrmic mitjançant el mètode d'estimació de la màxima versemblança. Tanmateix, coneixent ara la fórmula de l'espectre de Panchev-Kesich, en futurs treballs es podria modificar amb facilitat el procediment per fer l'ajust de l'espectre del cisallament.

A partir dels perfils tèrmics mesurats durant set campanyes a l'estany de Banyoles, distribuïdes al llarg de quatre anys (del 1999 al 2002), s'ha estudiat el plomall convectiu situat sobre el llit fluïditzat localitzat dins l'anomenada *cubeta BI*. Aquest llit —resultat del balanç entre el flux vertical advection de partícules a causa de l'aigua que entra a l'estany pel fons de la cubeta i el flux de sedimentació de les partícules— és més calent que el fons de l'estany, i presenta una interfície superior molt localitzada (amb una extensió vertical d'uns 10 cm) que separa una zona inferior calenta i tèrbola d'una de superior freda i clara. En aquesta interfície, en què es concentren gradients importants de temperatura i concentració de partícules, s'ha identificat matemàticament un pla horitzontal perpendicular al punt d'inflexió dels perfils tèrmics, o punt de màxim gradient. Aquest pla ens delimitaria la part de la columna d'aigua on el flux de calor és laminar del tipus advection difusiu —per sota del pla interfacial— de la part en què el flux és turbulent —per sobre del pla.

Aplicant el model advection difusiu per sota del pla interfacial, s'han pogut obtenir el flux tèrmic i la velocitat del flux d'aigua entrant per les set campanyes esmentades. Aquests valors coincideixen amb mesures fetes anteriorment seguint altres procediments. Així, s'han trobat valors de la velocitat que van entre $4,0 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ i $6,9 \times 10^{-6} \text{ m/s}$, amb un valor mitjà de $(5 \pm 1) 10^{-6} \text{ m/s}$, i fluxos de calor que varien entre 10 i 200 W/m^2 , dependent de les campanyes.

S'ha trobat una llei potencial que ajusta bé la dependència del flux tèrmic, F_T , amb l'increment de temperatura entre la superfície interfacial, T_1 , i la zona interior de l'estany (hipolimnion), T_2 . Aquesta llei, que és determinada per

$F_T = (2 \times 10^{-5} \text{ m/s})(T_1 - T_2)$, porta una potència $p = 1$ en l'increment tèrmic, en concordança amb la llei del refredament de Newton. Aquesta dependència potencial s'ajusta molt bé a les dades experimentals, tot i que no considera el flux advectioniu de calor de manera explícita. Tanmateix, la dependència del flux tèrmic en la velocitat de l'aigua ja és determinada implícitament per la temperatura que s'assoleix en el punt de màxim gradient.

Alternativament, s'ha provat la dependència entre el flux tèrmic i el increment tèrmic total, ΔT , això és, s'ha considerat la diferència de temperatura entre el llit i la zona interior de l'estany. Aquest darrer cas no s'ajusta tan bé a una llei potencial, però el grau de correlació es suficient per poder considerar-ho com una eina útil per caracteritzar el flux quan només es tinguin perfils de temperatura que no siguin d'alta resolució. La validesa d'aquesta segona aproximació es basa en el fet que el rang dintre del qual varia la velocitat del cabal subterrani és molt petit. Aquesta aproximació en unitats del sistema internacional i amb la temperatura en $^{\circ}\text{C}$ és determinada per $F_T = (4.27 \times 10^{-6}) \Delta T^{1.15}$.

A partir de les mesures corresponents a una de les campanyes fetes a la cubeta I, s'ha vist que a la part inferior del plomall existeixen intrusions laterals d'aigua freda de diversos metres de gruix que ocupen una gran part de la superfície superior del llit fluiditzat calent. En les zones afectades per aquestes intrusions, no es poden desenvolupar grans plomalls convectius que afectin una gran part de la columna d'aigua, sinó que la dinàmica convectiva se centra en aquestes capes intrusives on la convecció es pot considerar del tipus forçat a causa de la seva mateixa velocitat.

Considerant els perfils situats en una estació central sobre una cubeta surgent no afectada per les intrusions laterals, s'ha estudiat l'estructura de la columna d'aigua. Això s'ha fet calculant la transformada d'ondetes dels perfils de temperatura per diferents escales compreses entre 10 i 200 cm. El mòdul d'aquests coeficients per a totes les escales s'observa que decreix en altura (respecte de l'origen del plomall) fins a una fondària comparable amb l'altura d'equilibri del plomall, per sota de la termoclina estacional. Per tant, la descomposició per ondetes dels perfils tèrmics es pot considerar

un bon mètode per detectar l'extensió vertical del plomall que no és observable directament a partir dels mateixos perfils.

Considerant el mòdul al quadrat dels coeficients d'ondeta, s'ha fet una valoració del comportament de l'espectre tèrmic vertical (en unitats arbitràries) per a diferents zones de la columna d'aigua afectades pel plomall convectiu. Concretament, s'han considerat tres segments de longitud $4 m$, des de la zona immediatament per sobre de la interfície superior del llit fluïditzat cap a la superfície. Tot i que la disponibilitat de dades que teníem fa que aquesta anàlisi no tingui prou significació estadística, es troba que en la regió immediatament superior al plomall la dependència de l'espectre amb el nombre d'ona es pot aproximar a una llei potencial amb exponent $-5/3$, com és el cas de l'espectre d'Obukhov, per al subrang inercial. En canvi per al segment següent, més lluny d'on s'origina el plomall, si bé també es troba una dependència potencial, l'exponent s'acosta més al $-7/5$ de l'espectre de Bolgiano-Obukhov, per l'anomenat *rang de flotabilitat*. De fet, és lògic pensar que la regió propera a l'origen del plomall, i per tant més energètica, presenti un comportament de tipus inercial ($-5/3$), i la regió superior, no tan energètica i, per tant, dominada pels efectes de la flotabilitat, mostri un comportament del tipus $-7/5$.

S'han estudiat les estructures multidifusives, més concretament de triple difusió, que es van trobar en una de les campanyes efectuades sobre la cubeta BII —amb tretze perfils—. Aquestes van aparèixer just per sobre del llit fluïditzat que es desenvolupa només en anys plujosos i durant uns mesos a l'interior d'aquesta cubeta, que, durant l'època d'estratificació, queda arrecerada de la resta de l'estany. Coincidint amb el moment de màxima expansió del llit, i just per sobre de la lutoclina, va aparèixer una estructura esglaonada respecte a l'estratificació de la temperatura, la salinitat i la concentració de partícules. Concretament, la temperatura decreix en altura, de manera que contribueix al perfil de la densitat com un camp inestabilitzador, i les concentracions, que també decreixen en altura, fan un paper estabilitzador. Netament, però, la densitat mostra un comportament estàticament estable.

En aquest treball la definició de la raó d'estabilitat, entesa com el quocient entre els factors estabilitzadors i els inestabilitzadors en la variació de la densitat en un escaló, i utilitzada usualment en doble difusió (amb només un camp de concentració), s'ha

generalitzat al cas de triple difusió, introduint les contribucions estabilitzadores de la salinitat i la concentració de partícules sòlides. Les raons d'estabilitat parcials de la salinitat i les partícules són 0.97 i 0.15, respectivament. Per tant, el camp de concentració que contribueix més a estabilitzar és el que té la difusivitat més gran —la salinitat—. Globalment, la raó d'estabilitat és d'1.12. Les dades que es presenten en aquest treball són les primeres que exhibeixen un comportament de triple difusió on un dels camps estabilitzadors és la concentració de partícules sòlides. Aquestes partícules, de fet, es mantenen en estat estacionari gràcies a l'entrada subterrània d'aigua que les manté en suspensió —ja que l'advecció en compensa la sedimentació— i la seva dispersió hidrodinàmica s'ha estimat inferior a $10^{-11} m^2/s$.

Les estructures escalonades consisteixen en una alternança entre dues regions convectives de $0.17 \pm 0.02 m$ i $0.49 \pm 0.04 m$, respectivament. Aquestes capes convectives estan delimitades superiorment i inferiorment per interfícies de temperatura i concentracions prou abruptes, on es localitzem els corresponents gradients. Tanmateix, s'ha pogut determinar el gruix de les interfícies tèrmiques superiors a cada una de les capes, les quals són de $0.021 \pm 0.013 m$ i $0.015 \pm 0.004 m$. El gruix interfacial corresponent a les concentracions no s'ha pogut determinar per la relativa baixa rapidesa en la resposta dels corresponents sensors.

Tradicionalment, pel que fa a les interfícies tèrmiques, s'ha definit un nombre de Rayleigh tèrmic interfacial, considerant el salt tèrmic existent entre el gros de dos escalons consecutius. En aquest treball s'ha proposat una nova definició basant-nos en la idea que les interfícies difusives es van expandint a partir del seu centre fins que s'instabilitzen. El nou nombre de Rayleigh de la interfície considera l'increment tèrmic entre el centre de la interfície i la capa convectiva, això és, $\Delta T/2$, de manera que es defineix com a $Ra_{\delta_T} \equiv g\alpha(\Delta T/2)\delta_T^3/(\nu\kappa_T)$, on δ_T és la mida interfacial lligada a $\Delta T/2$, de manera que $\delta_T = (\Delta T/2)(dT/dz)_{int}$, on el subíndex *int* fa referència al gradient tèrmic calculat a la interfície difusiva. El nou nombre de Rayleigh de la interfície que proposem s'ha calculat per als escalons multidifusius estudiats, i n'ha resultat una distribució de probabilitat amb una mediana i una mitjana 1000 i 2300, respectivament. Aquests resultats són coherents amb la idea proposada per Turner, segons la qual la mida de les interfícies difusives tèrmiques seria regida pel criteri

d'instabilitat que es dona precisament per nombres de Rayleigh de l'ordre de 1000, i que nombrosos treballs experimentals havien refutat. Tanmateix, com que aquesta definició del nombre de Rayleigh de la interfície, més acurada conceptualment, difereix de la clàssica en més d'un ordre de magnitud (concretament, un factor 1/16), la majoria dels treballs que es presentaven en contra de la idea de Turner ara la corroborarien.

Assumint un comportament difusiu a la part central de les interfícies s'ha pogut determinar el flux tèrmic, el qual, dintre de la variabilitat observada, es pot considerar igual en les tres interfícies difusives, indicant que el sistema es trobava en un estat estacionari. En concret, els valors dels fluxos tèrmics obtinguts a la interfície superior del llit fluïditzat i les interfícies que delimiten els escalons convectius són, respectivament, de $(4.2 \pm 1.2) \times 10^{-6} \text{ C m/s}$, $(2.8 \pm 1.9) \times 10^{-6} \text{ C m/s}$ i $(4.2 \pm 1.3) \times 10^{-6} \text{ C m/s}$.

A l'interior de les capes convectives, amb nombres de Rayleigh de l'ordre de 2×10^7 i 50×10^7 , la monotonització dels perfils de temperatura mostra una estratificació de fons lineal de $0.13 \pm 0.07 \text{ }^\circ\text{C/m}$ i $0.04 \pm 0.02 \text{ }^\circ\text{C/m}$. La coherència de les anàlisis posteriors realitzades dintre d'aquest treball considerant aquesta estratificació com a real —determinació dels espectres, càlcul dels fluxos tèrmics turbulents— corroboren la seva existència, tot i que normalment no es considera.

Considerant els desplaçaments verticals necessaris per monotonitzar un perfil tèrmic mesurat, s'ha calculat l'escala de Thorpe per a les dues capes convectives, això és, la desviació quadràtica mitjana (rms) dels desplaçaments. Per a ambdues capes, s'ha trobat que l'escala de Thorpe, que es considera com l'escala característica dels remolins lligats a la turbulència, és 3.5 vegades més petita que la mida de la capa. Aquest resultat s'adiu amb altres estudis de laboratoris recents sobre la relació de l'escala de Thorpe i la mida del clap turbulent per al cas de la turbulència generada per cisallament.

Si calculem l'escala de Thorpe a partir dels desplaçaments dins de segments més petits que la mida de la capa, es troba que la distribució acumulada de probabilitat segueix una distribució de Weibull amb valors del paràmetre d'escala de 0.05 i 0.15 m, per tant, semblants a l'escala de Thorpe de cada escaló i amb un paràmetre de forma de 4.19 i 4.29, respectivament, cosa que indica una distribució anàloga en ambdós escalons.

Recopilació i possibles línies de futur

Considerant les fluctuacions de temperatura obtingudes sostraint el camp mitjà obtingut dintre de cada escaló dels perfils mesurats, s'ha pogut determinar —per primera vegada per al cas de multidifusió— l'espectre unidimensional de la temperatura en cada una de les dues capes turbulentes (gros dels escalons) i s'ha observat que s'ajusta bé als models teòrics utilitzats normalment per al rang viscos difusiu. Aquests espectres s'han calculat fent la mitjana dels espectres corresponents a cada un dels tretze perfils de la campanya i ajustant-los al model de Batchelor. Així, s'ha determinat que la velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta per a cada escaló és de $(3.8 \pm 2.1) \times 10^{-9} \text{ W/kg}$ i $(2.7 \pm 0.7) \times 10^{-9} \text{ W/kg}$, considerant que la velocitat de dissipació de la variància tèrmica és de $(5.9 \pm 3.2) \times 10^{-7} \text{ C}^2/\text{s}$ i $(5.9 \pm 3.2) \times 10^{-7} \text{ C}^2/\text{s}$.

A partir dels valors de dissipació de la variància tèrmica i de l'estratificació de fons, s'han obtingut els fluxos tèrmics turbulents per a cada una de les capes, que s'ha trobat que són de $(2.3 \pm 1.2) \times 10^{-6} \text{ cm/s}$ i $(4.1 \pm 2.6) \times 10^{-6} \text{ cm/s}$ i per tant coincidents —dintre del seu rang de variabilitat— amb els mesurats en les interfícies difusives, la qual cosa corrobora l'estat estacionari del sistema quan es van fer les mesures.

A partir dels fluxos turbulents s'ha pogut estimar un valor característic de la component vertical del flux turbulent per a les dues capes, que són $w_1 \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ i $w_2 \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$. Aquests valors, que estan d'acord amb l'escalat de Hunt per convecció, són com a mínim dos ordres de magnitud superiors a la velocitat vertical que resuspèn el llit fluïditzat; per tant, podem parlar de la convecció turbulenta i de la resuspensió del llit fluïditzat com a dos fenòmens desacoblats.

S'han revisat diferents models per al flux tèrmic en convecció de doble difusió, incloent-hi models de convecció simple i de Rayleigh-Bénard, els quals la comunitat científica accepta que són extrapolables a la convecció de multidifusió sempre que la difusivitat dels escalars estabilitzadors del sistema sigui molt més petita que la difusivitat tèrmica (o d'altres elements desestabilitzadors).

S'ha vist que les dades obtingudes a Banyoles no s'ajusten bé a la dependència més clàssica — $Nu = C(R_\rho)Ra_T^{1/3}$ — per cap de les parametritzacions més usuals de C (introduïdes en el capítol 2), on Nu és el flux tèrmic adimensional (anomenat *nombre*

de Nusselt), Ra_T el nombre de Rayleigh tèrmic i R_ρ la raó d'estabilitat. Hom se sol referir a la dependència esmentada com la llei dels 4/3, ja que, encara que la potència sigui 1/3, quan es dimensionalitzen les variables apareix una dependència potencial amb una potència de 4/3. Tot i així, la parametrització de $C(R_\rho)$ que deriva del model teòric introduït per Linden, considerant una llei del tipus 4/3, prediu uns valors del flux tèrmic de $Nu = 14$ i 40 , d'acord amb les nostres dades experimentals amb $Nu_1 = 10 \pm 7$ i $Nu_2 = 34 \pm 21$ per al primer i segon escaló, respectivament.

Alternativament, s'han contrastat les previsions de models de convecció de doble difusió. En aquest cas s'ha trobat que el model de Fernando per al cas de baixa estabilitat —en què les interfícies dels diferents escalars se suposa que tenen mides semblants— prediu uns valors de Nu de 5 i 28, que, per tant, tot i que són inferiors a la mitjana observada, estan encara dins del rang de les nostres dades. Aquest model dona una llei potencial amb el nombre de Nu amb un exponent $p = 1/2$.

Pel que fa a l'aplicabilitat dels models de convecció Rayleigh-Bénard a la doble difusió, comprovem que la parametrització semiempírica de Kelley, en la línia de les parametritzacions introduïdes per l'anomenat grup de Chicago a partir de la dècada dels noranta amb $p \cong 2/7$, prediu uns fluxos (Nu) de 19 i 48, superiors als valors experimentals obtinguts, però també dins del grau de variabilitat que presenten les nostres dades.

També s'ha contrastat el model recent de Grossmann i Lohse de convecció de Rayleigh-Bénard, el qual considera la possibilitat de l'existència de diferents règims purs —amb les lleis potencials corresponents— i de règims híbrids entre aquests. Aquest model es basa en l'existència d'un vent de turbulència o escala grossa de la turbulència. Entre els diferents règims purs predits pel model de Grossmann, els anomenats IV_u i IV_l , tots dos caracteritzats pel domini de les dissipacions dins la zona convectiva sobre les de les interfícies, són els que millor s'ajusten a les nostres dades. Concretament, el règim IV_u en què la interfície de velocitat es considera més gran que la tèrmica, prediu uns valors de Nu de 10 i 30, mentre que el règim IV_l , per al qual la interfície tèrmica és més gran que la de velocitat, els valors predits són de 6 i 26, respectivament. La llei potencial que

prediu el règim IV_u té un exponent $p = 1/3$, amb un prefactor numèric independent de les propietats moleculars, i per al règim IV_l , $p = 1/2$.

El model de Grossmann també prediu el valor del nombre de Reynolds corresponent al vent de turbulència per a cada un dels règims. La informació extreta de la microestructura tèrmica ens ha permès estimar el nombre de Reynolds del vent de turbulència de 51 i 245 en el primer i segon escaló, respectivament, mentre que els predits pel model són de 76 i 318, i per tant, del mateix ordre que els observats.

Les prediccions de la mida dels escalons a partir dels gradients del camp mitjà que fan els diferents models difereixen considerablement de les nostres observacions. El model de Fernando és el que dona els resultats que s'ajusten millor a les nostres observacions, tot i que són quasi un 50 % superiors. En general, la limitació dels models de doble difusió per predir la mida dels escalons és un tema conegut.

Resultats

De forma més concisa, recopilen en aquest apartat els resultats més rellevants que ja s'han comentat en el resum. Per això, en aquest apartat no els tornarem a esmentar sinó que referenciem el lloc d'aquest treball on els poden trobar:

- 1) S'ha obtingut l'espectre unidimensional (transversal) de Kraichnan per la temperatura, que segons el nostre coneixement, no estava publicat (fórmula 3.12, plana 103).
- 2) S'ha trobat una forma analítica que ajusta l'espectre unidimensional de cisallament de Panchev-Kesich, que hem obtingut numèricament (fórmula 3.7, plana 100)
- 3) En processos convectius multidifusius, hem proposat una nova definició del número de Rayleigh de la interfase, més acurada conceptualment per tal de conciliar les dades experimental amb el model teòric de Turner de la interfase difusiva en doble difusió (fórmula 4.14, plana 143).

- 4) Hem trobat que en els escalons convectius existeix un gradient tèrmic de fons (plana 146, figura 4.12).
- 5) La distribució de probabilitat de l'escala de Thorpe a dins del escalons –que és 0.3 vegades la mida dels escalons- segueix una distribució de Weibull (figura 4.13, plana 148).
- 6) Hem vist que l'espectre de les fluctuacions de temperatura, obtingudes a partir del perfil monòton de temperatura en els escalons convectius, s'ajusta amb prou significació estadística al espectre universal de temperatura en els rangs viscos difusiu i viscos convectiu. Aquesta és la primera vegada que s'ha aconseguit resoldre l'espectre turbulent dins dels escalons convectius (figura 4.14, plana 149).
- 7) Les nostres dades del fluxos turbulents en un cas de convecció multidifusiva, corroboren el model de doble difusió de Fernando (dins el règim de baixa estabilitat amb $p = 1/2$) i el de Linden ($p = 1/3$ amb el prefactor dependent de la raó d'estabilitat), així com els models per convecció Rayleigh-Bénard de Kelley (amb $p \cong 2/7$) i de Grossmann —concretament, els règims IV_u ($p = 1/3$) i IV_l ($p = 1/2$). (apartat 4.3.4, plana 153).
- 8) Per tant, podem dir que les dades que es presenten donen suport a la utilització dels models de flux per convecció de Rayleigh-Bénard per al cas de doble (triple) difusió quan les difusivitats dels elements estabilitzadors són considerablement menors que la dels elements inestabilitzadors (difusivitat tèrmica) (apartat 4.3.4, plana 153).
- 9) Finalment, les nostres dades mostren que l'aplicació de les parametritzacions més usuals en oceanografia, utilitzant prefactors semiempírics per generalitzar la llei dels 4/3 de la convecció tèrmica simple al cas de la doble difusió, no és adequada en el cas en què la raó d'estabilitat és petita, excepte per la parametrització de Linden (apartat 4.3.4, plana 153).
- 10) Pel que fa a resultats més concrets dels sistemes convectius estudiats a Banyoles:
 - i) Els fluxos de calor geotèrmic a través de la interfase superior del llit fluïditzat de la cubeta BI, en condicions de estacionarietat, es poden obtenir a partir de la fórmula 4.10 (plana 130) si es disposen de dades

de temperatura estàndard o de la fórmula 4.7 (si es té prou resolució espacial en la temperatura de dins de la interfase).

- ii) L'abast del plomall desenvolupat a la cubeta I i la seva estructura es pot determinar a partir de la descomposició d'ondetes del senyal de temperatura de la columna d'aigua (figura 4.7, plana 134)
- iii) Pel que fa al règim convectiu de tipus multidifusiu observat sobre del llit fluïditzat de la cubeta BII, en la figura 4.15 (plana 151) s'han resumit els resultats que obtingut al llarg d'aquest treball, descrits des d'un punt de vista físic, considerant tant l'estructura fina como les escales turbulentes.

Possibles línies de futur

Els resultats acabats d'exposar mostren, al nostre entendre, que hem assolit els objectius que ens marcàvem en iniciar aquest treball (plana 10 de la introducció) i que emmarcàvem en dues categories diferents: a) sistematitzar el marc teòric-conceptual de la turbulència per obtenir eines experimentals de tractament de dades adequades pel seu estudi, i b) estudiar dos sistemes convectius presents a l'estany de Banyoles, un de tipus plomall i l'altre del tipus multidifusiu.

Ja en aquell moment inicial, i tot i que ens plantejàvem un treball tancat amb ell mateix, volíem que aquest no fos un estudi aïllat sinó que, inserit dintre el grup de la Universitat de Girona que treballa en turbulència, contribuís al progrés d'aquesta línia de recerca. Aquest és el cas, sobretot, dels aspectes metodològics que s'han desenvolupat. D'altra banda, però, alguns dels resultats que hem obtingut obren altres portes que creiem interessants d'explorar en el futur. Uns i altres aspectes els revisem seguidament de forma breu.

a) Una primera anàlisi comparativa dels espectres turbulents de temperatura experimentals mostra que s'ajusten bé tant al model de Batchelor com el de Kraichnan, però, en canvi, els valors de la velocitat de dissipació de l'energia cinètica turbulenta

que es dedueix del millor ajust poden variar fins a un 30%. D'altra banda, no hi ha cap argument teòric que justifiqui el valor de les constants universals i, si es vol un bon ajust, s'han de considerar diferents en cada cas. Aquesta és doncs una línia de recerca interessant que creiem que es podria abordar en un futur.

b) Tot i que no era un tema central dins d'aquest treball s'ha fet una petita anàlisi de l'estructura del plomall convectiu que es desenvolupa sobre una de les cubetes de Banyoles. Els resultats obtinguts semblen apuntar a què l'espectre de temperatura evoluciona al llarg del plomall de manera que en la seva base s'ajusta millor al model de Obukov ($k^{-5/3}$) mentre que en la seva part superior al model de Bolgiano ($k^{-7/5}$), com de fet sembla raonable si considerem que el plomall ascendeix fins al punt de flotabilitat neutre on és d'esperar que l'estratificació afecti a la turbulència. Per confirmar aquest comportament caldria, però, disposar de més dades les quals es podrien obtenir en el futur i fer un estudi més acurat de l'estructura turbulenta del plomall. A més actualment el grup està treballant per obtenir mesures de turbulència en transsectes horitzontals que ens permetria estudiar el comportament de l'espectre tant en la direcció vertical com horitzontal; segons la nostra comprensió de la dinàmica turbulenta del plomall no ens estranyaria, per exemple, que en la part superior del plomall l'espectre vertical seguís una dependència com a ($k^{-7/5}$) i en la horitzontal com a ($k^{-5/3}$). En tot cas, creiem que són estudis interessants d'abordar en el futur.

c) Finalment, i en una vessant més teòrica, creiem que seria interessant la generalització dels nous models de convecció (com el del *vent de turbulència*) als sistemes multidifusius. Aquest és un pas lògic, ja que la recerca en multidifusió ha anat sempre a remolc dels desenvolupaments en la convecció de Rayleigh-Bénard.

APÈNDIX A

PROPIETATS D'UNA SUSPENSÍO DE PARTÍCULES

A.1. PROPIETATS DE LA SUSPENSÍO CONSIDERADA EN AQUEST TREBALL	179
A.2. EQUACÍO DE TRANSPORT DE LES PARTÍCULES	181
A.3. LLITS FLUÏDITZATS	183
A.4. BIBLIOGRAFIA	184

La mida de les partícules dins les cubetes de Banyoles presenta una distribució logarítmica normal distribuïda al voltant d'un diàmetre $D = 10\mu m$ (Roget, 1987 i 1994; Serra et al., 2002). Tot i que la velocitat de sedimentació d'una partícula esfèrica en l'aigua és ben descrita per l'anomenada velocitat de Stokes, la velocitat de sedimentació en una barreja real amb un gran nombre de partícules no està encara ben determinada, ja que apareixen les anomenades interaccions hidrodinàmiques entre les partícules (Batchelor, 1972; Brenner, 2001). En aquest apèndix presentem una revisió d'algunes de les aproximacions existents de l'efecte d'aquestes interaccions hidrodinàmiques sobre la velocitat de sedimentació de les partícules en una suspensió (apartat A.2). Abans, però, en l'apartat A.1, presentarem l'aproximació que hem utilitzat en aquest treball de les propietats termodinàmiques de les suspensions existents en el fons de les cubetes de Banyoles, les quals es poden descriure com a llits fluïditzats. Del concepte de *llit fluïditzat* també en parlarem molt breument en aquest apèndix, en l'apartat A.3.

A.1. Propietats de la suspensió considerada en aquest treball

La densitat de la suspensió de partícules en aigua es pot escriure com:

$$\rho = \phi\rho_s + (1 - \phi)\rho_w \quad (\text{A.1})$$

On ϕ és la fracció volumètrica de partícules, ρ_s és la densitat de les partícules (sense aigua), que en el cas de l'estany de Banyoles val 2667 kg/m^3 (Roget et al., 1994), i ρ_w és la densitat de l'aigua (sense partícules), que depèn de la temperatura, la salinitat i en molta menys mesura de la pressió, això és $\rho_w(T, S, P)$. Aquesta última dependència és molt ben coneguda, tant en el rang de salinitats oceànic (Fofonoff i Millard, 1983) com en el limnològic (Chen i Millero, 1986). Alternativament, si en lloc d'utilitzar la fracció volumètrica utilitzem la concentració $C = \rho_s\phi$, llavors la densitat de la suspensió és:

$$\rho = C + (1 - C/\rho_s)\rho_w \quad (\text{A.2})$$

En tot cas, la densitat de la suspensió depèn de la temperatura, la salinitat, la concentració de partícules i la pressió, $\rho(T, S, C, P)$, i en aquest text les unitats que hem utilitzat per a aquestes variables són, respectivament, els graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$), les unitats pràctiques de salinitat (*practical salinity units* o PSU), els mil·ligrams de partícules per litre de suspensió (mg/l) i els decibars. Els paràmetres definits a partir de les derivades de la densitat respecte a les variables anteriors (exceptuant la pressió) són, respectivament, el coeficient d'expansió tèrmica α i els de contracció salina β i de partícules γ :

$$\alpha = -\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_{S,C,P} \quad (\text{A.3a})$$

$$\beta = \rho^{-1}(\partial\rho/\partial S)_{T,C,P} \quad (\text{A.3b})$$

$$\gamma = \rho^{-1}(\partial\rho/\partial C)_{T,S,P} \quad (\text{A.3c})$$

Expressions que, utilitzant la dependència A.2, es relacionen amb els corresponents coeficients de l'aigua sense partícules de la forma:

$$\alpha = \frac{\rho_w}{\rho} \left(1 - \frac{C}{\rho_s}\right) \alpha_w \quad \beta = \frac{\rho_w}{\rho} \left(1 - \frac{C}{\rho_s}\right) \beta_w \quad \gamma = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_s}\right) \quad (\text{A.4})$$

on:

$$\alpha_w = -\rho_w^{-1}(\partial\rho_w/\partial T)_{S,P} \quad (\text{A.5a})$$

$$\beta_w = \rho_w^{-1}(\partial\rho_w/\partial S)_{T,P} \quad (\text{A.5b})$$

Així, per exemple, per a uns valors mitjans dins el rang de dades d'aquest treball, és a dir $(T, S, C, P) = (14^\circ\text{C}, 0.8\text{psu}, 20\text{mg/l}, 35\text{dbar})$, en què la fracció volumètrica corresponent és $\phi = 7.5\mu\text{l/l}$, tenim que $\rho = 1.0304 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, $\alpha = 1.4 \times 10^{-4} \text{K}^{-1}$, $\beta = 7.8 \times 10^{-4} \text{psu}^{-1}$ i $\gamma = 6.3 \times 10^{-7} \text{l/mg}$, on el valor de γ donat és coherent amb altres valors mesurats en el rang limnològic (per exemple, Lerman et al., 1995).

Per a variacions petites en els camps escalars T , S i C , l'equació de la densitat s'acostuma a linealitzar en la forma següent:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0) + \gamma(C - C_0)] \quad (\text{A.6})$$

de manera que es considera que l'efecte de les variacions de la pressió sobre la densitat és negligible respecte a les variacions en les altres variables (incompressibilitat de l'aigua). Els valors amb subíndex 0 corresponen a un cert estat de referència amb $\rho(T_0, S_0, C_0) = \rho_0$. L'equació A.6 equival a l'equació 1.2 en el cas de dues espècies contaminants ($N=2$), la salinitat i la concentració de partícules.

Si volem estudiar una suspensió de partícules com un medi continu, llavors la viscositat pren un valor eficaç (ν) superior al que tindria el fluid sense partícules (ν_0), i és determinada per:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{5}{2} \phi \right) \quad (\text{A.7})$$

Aquesta expressió és coneguda com la fórmula d'Einstein per a la viscositat eficaç i és aplicable dins un règim per al flux microscòpic al voltant de les partícules de tipus laminar, per a partícules de forma esfèrica i amb concentracions molt baixes, això és, suspensions molt diluïdes (Landau, 1991). En el rang de temperatures d'aquest treball, entre 10°C i 20°C , la viscositat cinemàtica de l'aigua varia entre $1.3 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ i $1.0 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$, i per a les concentracions de partícules a gran part de l'estany de Banyoles, $\phi \approx 10^{-6}$, no hi ha variacions significatives en el valor de la viscositat. Per a

les concentracions donades a l'interior dels llits fluïditzats, $\phi \approx 0.1$, la viscositat varia en la segona xifra significativa i pren valors entre $1.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ i $1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$.

A.2. Equació de transport de les partícules

En general, en el cas de les suspensions de partícules rígides i petites (en el nostre cas micropartícules) és habitual considerar que es compleix l'anomenada hipòtesi del continu i que les diferents magnituds físiques de la suspensió tenen un valor macroscòpic definit en cada punt de l'espai i el temps, en la forma d'una mitjana sobre volums prou petits però que contenen un gran nombre de partícules. Amb aquesta filosofia, ha estat possible considerar l'existència d'una viscositat eficaç, com la que es dona a A.7, que fa possible aplicar les equacions del fluid —conjunt d'equacions 1.1— en el cas de suspensions de partícules.

Tot i que volem estudiar el moviment de les partícules dins el fluid des d'un punt de vista macroscòpic, el cas més senzill i per tant el punt de començament de l'anàlisi és el d'una única partícula, que sedimentarà amb l'anomenada velocitat de Stokes, donada per U_0 . Considerant, però, que en la suspensió no hi ha una única partícula, sinó que n'hi ha moltes, aquestes poden interactuar entre si per mitjà del fluid que les envolta, en què la sedimentació d'una partícula arrossegà el fluid i aquest podrà afectar el moviment de les altres, i recíprocament, tot reduint la velocitat mitjana de sedimentació respecte a U_0 . Dit d'una altra manera, les partícules seran afectades per interaccions hidrodinàmiques. Per parametritzar aquest efecte, s'acostuma a considerar la relació següent:

$$U_{sed}(\phi) = U_0(1 - \phi)^p \quad (\text{A.8})$$

On $U_{sed}(\phi)$ és la velocitat macroscòpica de sedimentació de les partícules en una suspensió amb fracció volumètrica ϕ . Aquesta relació, purament fenomenològica, amb $p \approx 5$, és coneguda com la llei de Richardson-Zaki (Richardson i Zaki, 1954). Des d'un punt de vista teòric, Batchelor (1972) va trobar que $U_{sed} = U_0(1 - 6.55\phi)$ per al règim de suspensions molt diluïdes, en correspondència amb l'expressió A.8 quan ϕ és prou

petita. Les suspensions de partícules analitzades en el capítol 4 tenen velocitats de sedimentació entre 10^{-6} m/s i 10^{-5} m/s (Roget, 1987 i 1994).

En el cas d'una suspensió estratificada i en el cas de tenir un flux d'aigua ascendent amb velocitat U constant, l'evolució de la concentració de partícules es descriu segons (Martin et al., 1995; Höfler, 2000; Mucha i Brenner, 2003; Segre i McClymer, 2004):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C(U - U_{sed})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_C \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (\text{A.9})$$

On $C=C(z,t)$ depèn de la coordenada vertical z i del temps, i κ_C és la difusivitat de la concentració, de la qual parlarem seguidament. L'equació A.9 serveix també per a la fracció volumètrica ϕ , ja que C i ϕ són proporcionals.

Quan la difusió que domina és de tipus brownià, això és, a causa de l'agitació tèrmica del sistema, i aplicable en general a partícules amb una mida per sota de la micra, la difusivitat és determinada per la coneguda fórmula d'Einstein $\kappa_{brownià} = k_B T / (6\pi\nu_0\rho_0 a)$ (Landau, 1991), on la constant de Boltzmann és $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$. Aquesta expressió, per al cas de les partícules dels llits fluiditzats de Banyoles, dona valors de $\kappa_{brownià} = 4 \times 10^{-14} \text{ m}^2/\text{s}$. Tanmateix, quan en una suspensió les partícules són més grosses que l'ordre de la micra, la seva difusivitat depèn de les fluctuacions de la velocitat, causada per la sedimentació de les partícules, i així es parla de difusivitat induïda hidrodinàmicament. Aquesta difusivitat se sol parametritzar com a $\kappa_{ih}(\phi) = f(\phi)U_0 a$, on la funció $f(\phi)$ és creixent i pren valors de l'ordre d'1 per a suspensions diluïdes ($\phi < 0.1$) (Martin et al., 1995, i Höfler, 2000). En el nostre cas, agafant el valor de $f = 1$, trobem $\kappa_{ih} = 5 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$. Així doncs, comparant $\kappa_{brownià}$ i κ_{ih} , veiem que les interaccions hidrodinàmiques dominen sobre l'agitació tèrmica del sistema. De totes maneres, cal dir que la dependència donada per la difusivitat en el cas de les interaccions hidrodinàmiques no és ni de bon tros definitiva, ja que darrerament s'estan proposant dependències del tipus $\kappa_{ih}(\phi, \partial\phi/\partial z)$ (Mucha i Brenner, 2003), és a dir, la difusivitat sembla que depèn de la fracció volumètrica i del seu gradient.

A.3. Llits fluïditzats

Quan un flux vertical, ascendent i constant, d'aigua U travessa una regió de fluid amb un llit consolidat de partícules al fons, a partir d'una certa velocitat aquestes partícules es poden fluïditzar i són arrossegades pel fluid, i en aquest cas es pot estudiar el sistema aigua-partícules com un continu que compleix les propietats estudiades fins ara en aquest apèndix. En aquest cas parlarem de llit fluïditzat (Casal, 1984). Just abans de l'inici de la fluïdització, és a dir quan les partícules formen un llit compactat, la fracció volumètrica, anomenada en aquest cas fracció de màxim empaquetament, pren valors en el rang $0.50 \leq \phi \leq 0.74$. En particular, per a partícules esfèriques i si l'empaquetament és del tipus BCC (*body centered cubic*, cos centrat en un cub), el valor és de 0.68 (Ungarish, 1993).

Quan un cert nombre de partícules es fluïditzen amb una ϕ determinada i $U_{sed}(\phi) < U$, una zona molt homogènia amb partícules s'expandeix amb un flux ascendent i igual a $F_C = C(U - U_{sed})$, i per tant la fracció volumètrica es va reduint en el temps. Si aquest procés s'esdevé de tal manera que el règim sigui laminar, la interfície, que separa la zona tèrbola (normalment molt homogènia) de la zona superior neta de partícules, estarà molt localitzada i serà prou abrupta. La reducció de la fracció volumètrica, durant el procés d'expansió, implica un augment en la velocitat de sedimentació (equació A.8), fins a arribar al valor $U_{sed}(\phi) = U$, moment en què la interfície deixa de pujar i s'assoleix un règim estacionari.

En la figura A.1 podem veure un llit fluïditzat en fase d'expansió (esquerra) i fase estacionària (dreta), tal com és el cas estudiat a l'estany de Banyoles, en el qual, tal com comentem en el capítol 4, l'aigua entra verticalment per diverses cubetes còniques, fluïditzant les partícules i formant llits fluïditzats.

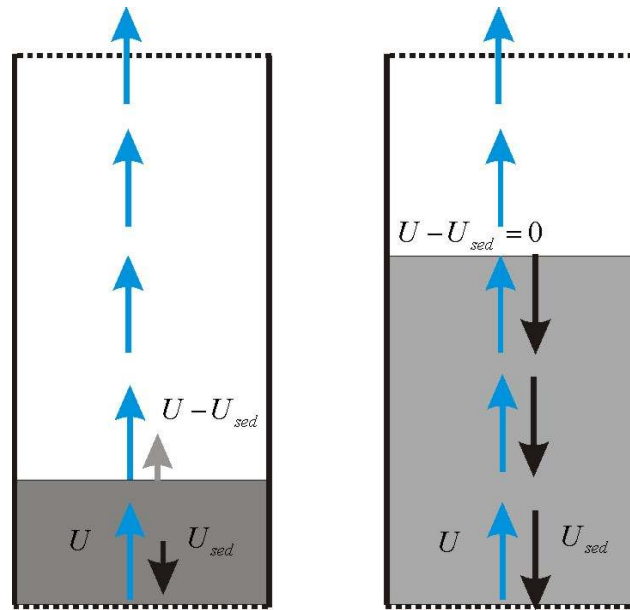


Figura A.1. A l'esquerra llit en expansió, on la velocitat de l'aigua U (blau) és superior a la de sedimentació de les partícules U_{sed} (negre), i per tant la interfície té velocitat (gris). A la dreta, en expansionar-se el llit s'ha reduït la concentració fins al punt que la velocitat del fluid és igual a la de sedimentació i s'assoleix el règim estacionari.

A.4. Bibliografia

- Batchelor, G. K. (1972), "Sedimentation in a dilute suspension of spheres", *Journal of Fluid Mechanics*, 52, 245-268.
- Brenner, M. P. i P. J. Mucha (2001), "That sinking feeling", *Nature* 409, 568-571.
- Casal, J. (1984), *Contribució a l'estudi de la fluïdització homogènia*, Institut d'Estudis Catalans, 118 p.
- Chen, C. T. i F. J. Millero (1986), "Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range", *Limnology and Oceanography*, 31(3), 657-662.
- Fofonoff, P. i R. C. Millard Jr. (1983), "Algorithms for computation of fundamental properties of seawater", *Unesco Technical Papers in Marine Science*, 44, 53 p.
- Höfler, K. (2000), *Simulation and modelling of mono and bidisperse suspensions*, tesi doctoral, Facultat de Física, Universitat de Stuttgart.

- Landau, L. D. i Lifshitz (1991), *Mecànica de fluidos. Curso de física teórica* (vol. 6), Editorial Reverté, 623 p.
- Lerman, A., D. Imboden i J. Gat [ed.] (1995), *Physics and chemistry of lakes*, Springer-Verlag, Berlín, 334 p.
- Martin, J., N. Rakotomalala i D. Salin (1995), “Hydrodynamic dispersion of noncolloidal suspensions: measurement from Einstein’s argument”, *Physical Review Letters*, 74, 1347-1350.
- Mucha, P. J. i M. P. Brenner (2003), “Diffusivities and front propagation in sedimentation”, *Physics of Fluids*, 15, 1305-1313.
- Richardson, J. F. i W. N. Zaki (1954), “Sedimentation and fluidisation: part I”, *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 32, 35-53.
- Roget, E. (1987), *Estudi dels cabals sorgents per les cubetes de Banyoles*, treball de recerca, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Roget, E., X. Casamitjana i J. E. Llebot (1994), “Calculation of the flow into a lake through the underground spring with suspensions”, *Netherlands Journal of Aquatic Ecology*, 281, 135-141.
- Segre, P. N. i J. P. McClymer (2004), “Fluctuations, stratification and stability in a liquid fluidized bed at low Reynolds number”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 16, S4219-S4230.
- Serra, T., J. Colomer, E. Gacia, M. Soler i X. Casamitjana (2002), “Effects of a turbid hydrothermal plume on the sedimentation rates in a karstic lake”, *Geophysical Research Letters*, 29, 21-25.
- Ungarish, M. (1993), “Hydrodynamics of suspensions”, Springer-Verlag, 317 p.

APÈNDIX B

TURBULÈNCIA HOMOGÈNIA

B.1. PROPIETATS GENERALS DE L'HOMOGENEÏTAT ESTADÍSTICA	186
B.2. EVOLUCIÓ TEMPORAL DE L'ESPECTRE DE L'ESCALAR	190
B.3. EVOLUCIÓ TEMPORAL DE L'ESPECTRE DE L'ENERGIA	194
B.4. ISOTROPIA. ESPECTRES UNIDIMENSIONALS	195
B.5. BIBLIOGRAFIA	198

B.1. Propietats generals de l'homogeneïtat estadística

Recordem aquí les correlacions definides en el capítol 1 (1.9a, 1.9b i 1.9c), totes dependents del temps, encara que hem prescindit de la dependència temporal explícita per tal de simplificar la notació i hem considerat que sota homogeneïtat estadística tota la dependència és a $\vec{r} = \vec{x}' - \vec{x}$:

$$R_{lm}(\vec{r}) = \overline{u_l(\vec{x}) u_m(\vec{x}')} \quad (1.9a)$$

$$R_{\theta\theta}(\vec{r}) = \overline{\theta(\vec{x}) \theta(\vec{x}')} \quad (1.9b)$$

$$R_{\theta l}(\vec{r}) \equiv \overline{\theta(\vec{x}) u_l(\vec{x}')} \quad (1.9c)$$

Si avaluem 1.9a a $-\vec{r}$ i posteriorment canviem \vec{x} per $\vec{x} + \vec{r}$ (ja que les correlacions no depenen de \vec{x}), trobem:

$$R_{lm}(-\vec{r}) = \overline{u_l(\vec{x}) u_m(\vec{x} - \vec{r})} = \overline{u_l(\vec{x} + \vec{r}) u_m(\vec{x})} = \overline{u_m(\vec{x}) u_l(\vec{x} + \vec{r})} = R_{ml}(\vec{r})$$

Aquest resultat és anàleg al que tindríem amb 1.9b i 1.9c fent el mateix tipus de raonament, de manera que podem escriure les propietats següents:

$R_{ml}(\vec{r}) = R_{lm}(-\vec{r})$	(B.1a)
$R_{\theta\theta}(\vec{r}) = R_{\theta\theta}(-\vec{r})$	(B.1b)
$R_{\theta l}(-\vec{r}) = \overline{u_l(\vec{x})\theta(\vec{x}')}$	(B.1c)

Llavors, si calculem la divergència del tensor (1.9a), això és $\partial R_{lm}(\vec{r})/\partial r_l$, tenim que:

$$\frac{\partial R_{lm}(\vec{r})}{\partial r_l} = \frac{\partial}{\partial r_l} \overline{u_l(\vec{x})u_m(\vec{x}')} = -\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_l(\vec{x})u_m(\vec{x}')} = \overline{\frac{\partial u_l(\vec{x})}{\partial x_l} u_m(\vec{x}')} = 0$$

Considerant que $\vec{r} = \vec{x}' - \vec{x}$, en el tercer membre de l'expressió anterior s'ha canviat $\partial/\partial r_l$ per $-\partial/\partial x_l$ i en el quart membre s'ha utilitzat la condició solenoïdal del flux (apartat 1.3). D'altra banda, per $\partial R_{lm}(\vec{r})/\partial r_m$, utilitzant $\partial/\partial r_m = \partial/\partial x'_m$, tenim que:

$$\frac{\partial R_{lm}(\vec{r})}{\partial r_m} = \frac{\partial}{\partial r_m} \overline{u_l(\vec{x})u_m(\vec{x}')} = \frac{\partial}{\partial x'_m} \overline{u_l(\vec{x})u_m(\vec{x}')} = \overline{u_l(\vec{x})\frac{\partial u_m(\vec{x}')}{\partial x'_m}} = 0$$

I amb un procediment semblant trobem que $\partial R_{\theta l}/\partial r_l$ és igual a zero.

Resumint, doncs, trobem que els tensors de correlació compleixen les propietats següents:

$\frac{\partial R_{lm}(\vec{r})}{\partial r_m} = \frac{\partial R_{lm}(\vec{r})}{\partial r_l} = 0$	(B.2a)
$\frac{\partial R_{\theta l}(\vec{r})}{\partial r_l} = 0$	(B.2b)

D'altra banda, si recuperem ara les relacions amb transformades de Fourier (1.10),

$E_{lm}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r} R_{lm}(\vec{r}) \exp(-i\vec{k}\vec{r})$	(1.10a)
$R_{lm}(\vec{r}) = \iiint d^3\vec{k} E_{lm}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$	
$E_{\theta\theta}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r} R_{\theta\theta}(\vec{r}) \exp(-i\vec{k}\vec{r})$	(1.10b)
$R_{\theta\theta}(\vec{r}) = \iiint d^3\vec{k} E_{\theta\theta}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$	
$E_{\theta l}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r} R_{\theta l}(\vec{r}) \exp(-i\vec{k}\vec{r})$	(1.10c)
$R_{\theta l}(\vec{r}) = \iiint d^3\vec{k} E_{\theta l}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$	

trobem que el complex conjugat de $E_{lm}(\vec{k})$ (simbolitzat amb una estrella) es pot desenvolupar com:

$$E_{lm}^*(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r} R_{lm}(\vec{r}) \exp(i\vec{k}\vec{r}) = E_{lm}(-\vec{k})$$

i per tant és igual a $E_{lm}(-\vec{k})$. Aquest complex, amb el canvi de variable $\vec{r}' = -\vec{r}$ a la variable d'integració i utilitzant B.1a, ens porta a:

$$E_{lm}(-\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r}' R_{lm}(-\vec{r}') \exp(-i\vec{k}\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r} R_{ml}(\vec{r}') \exp(-i\vec{k}\vec{r}') = E_{ml}(\vec{k})$$

Llavors, comparant les expressions anteriors, obtenim les propietats següents:

$E_{lm}^*(\vec{k}) = E_{lm}(-\vec{k}) = E_{ml}(\vec{k})$	(B.3a)
--	--------

De manera similar, utilitzant 1.10b i 1.10c es pot demostrar el mateix per a $E_{\theta\theta}(\vec{k})$ i $E_{\alpha\alpha}(\vec{k})$:

$E_{\theta\theta}^*(\vec{k}) = E_{\theta\theta}(-\vec{k}) = E_{\theta\theta}(\vec{k})$	(B.3b)
--	--------

$E_{\alpha\alpha}^*(\vec{k}) = E_{\alpha\alpha}(-\vec{k})$	(B.3c)
--	--------

És important remarcar que la propietat B.3c, això és l'equivalència entre aplicar el complex conjugat i fer una inversió de signe de \vec{k} , la compleixen tant les transformades de Fourier calculades a partir de correlacions entre el mateix camp (E_{lm} i $E_{\theta\theta}$) com les calculades a partir de correlacions creuades com $E_{\alpha\alpha}$. A partir de B.3a veiem que $E_{ll}(\vec{k})$ —traça del tensor— és una funció real que compleix $E_{ll}(-\vec{k}) = E_{ll}(\vec{k})$, propietats que també són aplicables a $E_{\theta\theta}$. Els espectres unidimensionals definits en l'apartat 1.8 també són funcions reals i funcions parells, en forma genèrica $F(k_3) = F(-k_3)$, propietat que es pot demostrar amb un procediment similar al que hem utilitzat per arribar a les expressions B.3.

Considerant doncs B.3a i B.3b, si recordem les definicions dels espectres tridimensionals,

$E(k) = \iint d\Omega_k E_{ll}(\vec{k}) / 2$	(1.12a)
--	---------

$E_\theta(k) = \iint d\Omega_k E_{\theta\theta}(\vec{k})$	(1.12b)
---	---------

$$E_{F_{\theta^i}}(k, t) = \oint d\Omega_k E_{\theta^i}(\vec{k}, t) \quad (1.12c)$$

trobem que $E(k)$ i $E_{\theta}(k)$ són funcions reals de variable real, fet que no es pot afirmar respecte a $E_{F_{\theta^i}}(k)$.

Finalment, en aquest apartat demostrarem les propietats que lliguen la integral dels espectres de dissipació amb les dissipacions totals, això és 1.16a i 1.16b. Per això recordem les definicions corresponents a les dissipacions d'energia cinètica turbulenta i de la variància de l'escalar:

$$\varepsilon = \nu(\overline{\partial u_i / \partial x_j})(\overline{\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i}) \quad (\text{taula 1.2})$$

$$\varepsilon_{\theta} = 2\kappa_{\theta}(\overline{\partial \theta / \partial x_i})^2 \quad (\text{taula 1.3})$$

Amb 1.10a i B.2a podem escriure:

$$\frac{\partial R_{lm}(\vec{r})}{\partial r_l} = i \iiint k_l E_{lm}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r}) d^3 \vec{k} = 0$$

I utilitzant l'ortogonalitat del conjunt $\exp(i\vec{k}\vec{r})$ podem afirmar que $k_l E_{lm}(\vec{k})$ és un vector nul. Una demostració gairebé idèntica ens porta a afirmar que $k_m E_{lm}(\vec{k})$ també és nul, i per tant podem escriure la propietat següent:

$$k_l E_{lm}(\vec{k}) = k_m E_{lm}(\vec{k}) = 0 \quad (\text{B.4})$$

També, amb l'objectiu de buscar relacions que lliguin els espectres amb aquestes dissipacions, considerarem la següent correlació tensorial d'ordre 4, desenvolupada utilitzant 1.10a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_l(\vec{x})}{\partial x_n} \frac{\partial u_m(\vec{x}')}{\partial x'_p} &= \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x'_p} \overline{u_l(\vec{x}) u_m(\vec{x}')} = -\frac{\partial^2}{\partial r_n \partial r_p} \overline{u_l(\vec{x}) u_m(\vec{x}')} = \\ &= -\frac{\partial^2 R_{lm}(\vec{r})}{\partial r_n \partial r_p} = \iiint E_{lm}(\vec{k}) k_n k_p \exp(i\vec{k}\vec{r}) d^3 \vec{k} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

A B.5 hem tornat a utilitzar el fet que en condicions d'homogeneïtat estadística la dependència de les correlacions és a $\vec{r} = \vec{x}' - \vec{x}$, i per tant podem utilitzar $\partial / \partial r_l = -\partial / \partial x_l$ i $\partial / \partial r_l = \partial / \partial x'_l$. Si avaluem la darrera expressió a $\vec{r} = 0$ trobem:

$$\frac{\partial u_l(\vec{x})}{\partial x_n} \frac{\partial u_m(\vec{x})}{\partial x_p} = \iiint E_{lm}(\vec{k}) k_n k_p d^3 \vec{k} \quad (\text{B.6})$$

De manera que podem desenvolupar la definició de ε en la forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \overline{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \nu \iiint k^2 E_{ii}(\vec{k}) d^3 \vec{k} + \nu \iiint E_{ij}(\vec{k}) k_i k_j d^3 \vec{k} = \\ &= \nu \int_0^\infty k^2 dk \iint d\Omega_k E_{ii} = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk\end{aligned}$$

On el segon terme del tercer membre és zero per a B.4. Llavors, utilitzant la definició d'espectre tridimensional (1.12a), trobem que la velocitat de dissipació de l'energia en turbulència homogènia és:

$$\varepsilon = \overline{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk \quad (1.16a)$$

Anàlogament, per obtenir la dissipació de variància podem desenvolupar la correlació següent, aplicant un desenvolupament semblant al que ens ha portat fins a 1.16a:

$$\overline{\frac{\partial \theta(\vec{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \theta(\vec{x}')}{\partial x'_i}}$$

I obtenim finalment:

$$\varepsilon_\theta = 2\kappa_\theta \int_0^\infty k^2 E_\theta(k) dk \quad (1.16b)$$

B.2. Evolució temporal de l'espectre de l'escalar

A fi d'obtenir l'evolució temporal de l'espectre d'un escalar, recordem l'equació d'advecció-difusió d'un camp escalar Θ genèric (1.1c o 1.1d):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Theta U_l}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial x_l} \right) \quad (B.7)$$

I considerarem el camp mitjà de l'escalar — $\overline{\Theta}(z)$ — estacionari i amb una estratificació vertical lineal, donada per un gradient constant, $d\overline{\Theta}/dz = ct$. Així mateix, considerarem el camp mitjà de la velocitat també estacionari i amb estratificació vertical lineal en la forma $(\overline{U}_1(z), 0, 0)$ i $d\overline{U}_1/dz$ constant. El segon terme del primer membre de B.7 es pot escriure també com a $U_l \partial \Theta / \partial x_l$, en virtut de la incompressibilitat del flux.

Seguidament apliquem la descomposició de Reynolds, $\Theta = \bar{\Theta} + \theta$ i $U_i = \bar{U}_i + u_i$. Per tant, l'equació B.7 avaluada en dos punts diferents, \bar{x} i \bar{x}' , serà:

$$\frac{\partial \theta(\bar{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \theta(\bar{x}, t) u_i(\bar{x}, t)}{\partial x_i} + u_3(\bar{x}, t) \frac{d\bar{\Theta}}{dz} + \bar{U}_1(z) \frac{\partial \theta(\bar{x}, t)}{\partial x_1} = \kappa \frac{\partial^2 \theta(\bar{x}, t)}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{B.8a})$$

$$\frac{\partial \theta(\bar{x}', t)}{\partial t} + \frac{\partial \theta(\bar{x}', t) u_i(\bar{x}', t)}{\partial x'_i} + u_3(\bar{x}', t) \frac{d\bar{\Theta}}{dz} + \bar{U}_1(z') \frac{\partial \theta(\bar{x}', t)}{\partial x'_1} = \kappa \frac{\partial^2 \theta(\bar{x}', t)}{\partial x'_i \partial x'_i} \quad (\text{B.8b})$$

Si llavors multipliquem B.8a per $\theta(\bar{x}', t)$ i hi sumem el producte de B.8b per $\theta(\bar{x}, t)$, i finalment fem la mitjana, tenim que:

$$\begin{aligned} & \left(\overline{\frac{\partial \theta(\bar{x}, t)}{\partial t} \theta(\bar{x}', t)} + \overline{\theta(\bar{x}, t) \frac{\partial \theta(\bar{x}', t)}{\partial t}} \right) + \\ & + \left(\overline{\frac{\partial}{\partial x_i} (\theta(\bar{x}) u_i(\bar{x}) \theta(\bar{x}'))} + \overline{\frac{\partial}{\partial x'_i} (\theta(\bar{x}') u_i(\bar{x}') \theta(\bar{x}))} \right) + \\ & + \overline{d\bar{\Theta}/dz} \left(\overline{u_3(\bar{x}) \theta(\bar{x}')} + \overline{u_3(\bar{x}') \theta(\bar{x})} \right) + \\ & + \left(\overline{\bar{U}_1(z) \frac{\partial \theta(\bar{x}, t) \theta(\bar{x}', t)}{\partial x_1}} + \overline{\bar{U}_1(z') \frac{\partial \theta(\bar{x}, t) \theta(\bar{x}', t)}{\partial x'_1}} \right) = \\ & = \kappa \left(\overline{\frac{\partial^2 \theta(\bar{x}) \theta(\bar{x}')}{\partial x_i \partial x_i}} + \overline{\frac{\partial^2 \theta(\bar{x}) \theta(\bar{x}')}{\partial x'_i \partial x'_i}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

El primer terme del primer membre de B.9 és igual a $\partial R_{\theta\theta}(\bar{r}, t) / \partial t$.

Pel que fa al segon terme del primer membre de B.9, podem definir la següent correlació de tipus vectorial, formada per tres camps avaluats en dos punts de l'espai:

$$R_{1\theta\theta}(\bar{r}) = \overline{u_i(\bar{x}) \theta(\bar{x}) \theta(\bar{x}')} \quad (\text{B.10})$$

De manera que:

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i(\bar{x}) \theta(\bar{x}) \theta(\bar{x}'))} + \overline{\frac{\partial}{\partial x'_i} (u_i(\bar{x}') \theta(\bar{x}') \theta(\bar{x}))} = \\ & = - \overline{\frac{\partial}{\partial r_i} (u_i(\bar{x}) \theta(\bar{x}) \theta(\bar{x}'))} + \overline{\frac{\partial}{\partial r_i} (u_i(\bar{x}') \theta(\bar{x}') \theta(\bar{x}))} = \\ & = - \overline{\frac{\partial}{\partial r_i} (u_i(\bar{x}) \theta(\bar{x}) \theta(\bar{x} + \bar{r}))} + \overline{\frac{\partial}{\partial r_i} (u_i(\bar{x}) \theta(\bar{x}) \theta(\bar{x} - \bar{r}))} = \\ & = \overline{\frac{\partial}{\partial r_i} (-R_{1\theta\theta}(\bar{r}) + R_{1\theta\theta}(-\bar{r}))} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

El tercer terme del primer membre de B.9 també es pot reinterpretar utilitzant la correlació definida a 1.9c:

$$R_{\theta}(\vec{r}) \equiv \overline{\theta(\vec{x})u_i(\vec{x} + \vec{r})} \quad (1.9c)$$

I llavors:

$$d\overline{\Theta}/dz \left(\overline{\theta(\vec{x}')u_3(\vec{x})} + \overline{\theta(\vec{x})u_3(\vec{x}')} \right) = d\overline{\Theta}/dz \left(R_{\theta_3}(-\vec{r}) + R_{\theta_3}(\vec{r}) \right) \quad (B.12)$$

El quart terme del primer membre es pot desenvolupar escrivint el perfil lineal de la velocitat mitjana com a $\overline{U}_1(z) = C + (d\overline{U}_1/dz)z$, on C i $d\overline{U}_1/dz$ tenen valors constants:

$$\begin{aligned} \overline{U}_1(z) \frac{\partial \overline{\theta(\vec{x}, t)\theta(\vec{x}', t)}}{\partial x_i} + \overline{U}_1(z') \frac{\partial \overline{\theta(\vec{x}, t)\theta(\vec{x}', t)}}{\partial x'_i} &= \\ &= -\left(C + z d\overline{U}_1/dz\right) \frac{\partial R_{\theta\theta}(\vec{r}, t)}{\partial r_i} + \left(C + z' d\overline{U}_1/dz\right) \frac{\partial R_{\theta\theta}(\vec{r}, t)}{\partial r_i} = \\ &= -r_3 \left(d\overline{U}_1/dz\right) \frac{\partial R_{\theta\theta}(\vec{r}, t)}{\partial r_i} \end{aligned} \quad (B.13)$$

Finalment, per al terme de la dreta de la igualtat B.9 tenim que:

$$\begin{aligned} \kappa \left(\frac{\partial^2 \overline{\theta(\vec{x})\theta(\vec{x}')}}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 \overline{\theta(\vec{x})\theta(\vec{x}')}}{\partial x'_i \partial x'_i} \right) &= \\ &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_i} \left(\overline{\theta(\vec{x})\theta(\vec{x}')} + \overline{\theta(\vec{x})\theta(\vec{x}')} \right) = \\ &= 2\kappa \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}(\vec{r}, t)}{\partial r_i \partial r_i} \end{aligned} \quad (B.14)$$

Llavors, si substituïm B.11, B.12, B.13 i B.14 a B.9, trobem l'equació per a l'evolució temporal de la correlació de l'escalar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\theta\theta}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r_i} \left(R_{i\theta\theta}(\vec{r}, t) - R_{i\theta\theta}(-\vec{r}, t) \right) + r_3 \left(d\overline{U}_1/dz \right) \frac{\partial R_{\theta\theta}(\vec{r}, t)}{\partial r_i} - \\ &- d\overline{\Theta}/dz \left(R_{\theta_3}(\vec{r}, t) - R_{\theta_3}(-\vec{r}, t) \right) + 2\kappa \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}(\vec{r}, t)}{\partial r_i \partial r_i} \end{aligned} \quad (B.15)$$

D'altra banda, per obtenir l'equació de l'evolució temporal de l'espectre, considerem les transformades de Fourier de la correlació $R_{100}(\vec{r})$ —definida a continuació en l'expressió B.16— i la transformada de $R_{03}(\vec{r})$, definida a 1.10c i anomenada $E_{03}(\vec{k})$.

$$E_{100}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r} R_{100}(\vec{r}) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \quad (\text{B.16})$$

$$R_{100}(\vec{r}) = \iiint d^3\vec{k} E_{100}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$$

Així, expandint les correlacions que apareixen a B.15 amb les corresponents integrals de Fourier (1.10b, B.16 i 1.10c), obtenim:

$$\frac{\partial E_{00}(\vec{k})}{\partial t} = ik_1 (E_{100}(\vec{k}) - E_{100}(-\vec{k})) + \frac{d\bar{U}_1}{dz} \frac{\partial E_{00}(\vec{k})}{\partial k_3} k_1 - \frac{d\bar{\Theta}}{dt} (E_{03}(\vec{k}) + E_{03}(-\vec{k})) - 2\kappa k^2 E_{00}(\vec{k}) \quad (\text{B.17})$$

A B.17 el segon terme de la dreta de la igualtat s'ha trobat després d'integrar respecte a k_3 per parts, assumint que $E_{00}(\vec{k})$ és zero quan $k_3 \rightarrow \pm\infty$. Sabem que $E_{00}(\vec{k})$ és una funció real de variable real, cosa que no podem afirmar respecte a $E_{100}(\vec{k})$ i $E_{03}(\vec{k})$, que en principi són funcions complexes de variable real. Però, com que tots els espectres compleixen la propietat genèrica $E^*(\vec{k}) = E(-\vec{k})$, podem afirmar que el primer i el tercer terme del segon membre de B.17 són funcions reals.

També amb la idea d'obtenir l'expressió per a la variació temporal de l'espectre tridimensional de l'escalar, definim els espectres de transferència $T_\theta(k)$ i producció de variància de l'escalar $P_\theta(k)$ —que són funcions reals—:

$$T_\theta(k) = i \iint d\Omega_k k_1 (E_{100}(\vec{k}) - E_{100}(-\vec{k})) + \frac{d\bar{U}_1}{dz} \iint d\Omega_k \frac{\partial E_{00}(\vec{k})}{\partial k_3} k_1 \quad (\text{B.18})$$

$$P_\theta(k) = -\frac{d\bar{\Theta}}{dz} \iint d\Omega_k (E_{03}(\vec{k}) + E_{03}(-\vec{k})) \quad (\text{B.19})$$

L'espectre de transferència (B.18) té un primer terme que descriu l'intercanvi d'energia entre els diferents nombres d'ona (mida de remolins), com a resultat d'interaccions entre aquests nombres, i un segon terme que conté el gradient de la velocitat mitjana com a multiplicand, el qual descriu l'intercanvi d'energia com a resultat de la deformació dels remolins per part del camp mitjà.

D'altra banda, l'integrand de l'espectre de producció (B.19) és igual al doble de la part real de $E_{\theta 3}(\vec{k})$; per tant, recordant la tercera component de l'espectre del flux de l'escalar $E_{F_{\theta 3}}(k, t)$ —definit a 1.12c— trobem:

$$P_{\theta}(k) = -2 \frac{d\bar{\Theta}}{dz} \operatorname{Re}[E_{F_{\theta 3}}(k)] \quad (\text{B.20})$$

De manera que, amb la condició de normalització 1.13c i la definició de J_{θ} en la taula 1.3, tenim que la producció total de variància compleix:

$$\int_0^{\infty} P_{\theta}(k, t) dk = -2 \frac{d\bar{\Theta}}{dz} \bar{w}\theta = J_{\theta} \quad (\text{1.17c})$$

Llavors, si integrem B.17 respecte a tot l'angle sòlid, utilitzant la definició de l'espectre tridimensional de l'escalar (1.12b) i B.18 i B.19, tenim que:

$$\frac{\partial E_{\theta}(k, t)}{\partial t} = T_{\theta}(k, t) - 2\kappa k^2 E_{\theta}(k, t) + P_{\theta}(k, t) \quad (\text{1.14b})$$

B.3. Evolució temporal de l'espectre de l'energia

La demostració de l'evolució temporal de l'espectre de l'energia no la desenvoluparem amb detall en aquest treball, però les línies generals es poden trobar a Hinze (1975), on es presenten desenvolupaments similars als que hem efectuat en l'apartat anterior, partint de l'equació 1.1 i utilitzant els mateixos camps mitjans que abans, i es troba:

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = T(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) + P_S(k, t) + P_B(k, t) \quad (\text{1.14a})$$

On $T(k)$ és l'espectre de transferència —igual que a B.18—, el qual conté un terme sorgit de la interacció directa entre els remolins de diferent mida i un altre on està implicat el camp mitjà de la velocitat:

$$T(k) = \frac{i}{2} \iint d\Omega_k (E_{lmn}(\vec{k}) - E_{lmn}(-\vec{k})) \Delta_{nl} k_m + \frac{1}{2} \frac{d\bar{U}_1}{dz} \iint d\Omega_k k_1 \partial E_{ii} / \partial k_3 \quad (\text{B.21})$$

On:

$$\Delta_{nl} = \delta_{nl} - k_n k_l / k^2 \quad (\text{B.22})$$

I $E_{lmn}(\vec{k}, t)$ és la transformada de Fourier de la correlació de tres camps avaluats en dos punts de l'espai i definit en la forma:

$$R_{lmn}(\vec{r}) = \overline{u_l(\vec{x})u_m(\vec{x})u_n(\vec{x} + \vec{r})} \quad (\text{B.23})$$

Tornant a 1.14a, $P_S(k)$ és l'espectre de producció per cisallament, que es defineix com:

$$P_S(k, t) = -\frac{d\overline{U}_1}{dz} \oint d\Omega_k E_{13}(\vec{k}) \quad (\text{B.24})$$

On recordant 1.10a i la definició de la producció per cisallament J_S en la taula 1.2 trobem:

$$\int_0^\infty P_S(k, t) dk = J_S = -\overline{u_1 u_3} d\overline{U}_1 / dz \quad (\text{1.17a})$$

Finalment, $P_B(k)$ és l'espectre de producció o destrucció per flotabilitat, que es pot escriure a partir de la tercera component de l'espectre del flux de l'escalar, $E_{F_03}(\vec{k})$, definit a 1.12c, aplicat al cas de la temperatura, $E_{F_{T3}}(\vec{k})$, i a la concentració de l'espècie n , $E_{F_{n3}}(\vec{k})$:

$$P_B(k) = g\alpha \text{Re}[E_{F_{T3}}(k)] - g\beta_n \text{Re}[E_{F_{n3}}(k)] \quad (\text{B.25})$$

Amb B.25 i la condició de normalització 1.13, integrant trobem la producció o destrucció d'energia cinètica per efectes de la flotabilitat, això és J_B :

$$\int_0^\infty P_B(k, t) dk = J_B = g(\alpha \overline{T'w} - \beta_n \overline{C'_n w}) \quad (\text{1.17c})$$

B.4. Isotropia. Espectres unidimensionals

Encetarem aquest apartat verificant l'expressió 1.38, és a dir, la forma isòropa de la transformada de Fourier del tensor correlació de velocitats, això és $E_{lm}(\vec{k})$. Així,

considerant l'estructura isòtropa $E_{lm}(\vec{k}) = A(k)\delta_{lm} + B(k)k_l k_m$, amb la propietat B.4 tenim que $k_l k_m E_{lm} = 0$ i per tant $B = -A/k^2$. Llavors, amb la definició de l'espectre tridimensional $E(k)$ a 1.12a, tenim que $E(k) = 2\pi k^2(3A + Bk^2)$, i per tant $A = E/(4\pi k^2)$ i $B = -E/(4\pi k^4)$, que dóna:

$$E_{lm}(\vec{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{k^2} \right) \quad (1.38)$$

Continuem ara demostrant l'expressió 1.41b, que és de gran importància perquè ens permet trobar l'espectre transversal de la velocitat a partir de l'espectre tridimensional (en condicions d'isotropia). A partir d'1.10a podem desenvolupar la correlació transversal (1.34b):

$$\begin{aligned} g(r_3) &\equiv (R_{11}(\vec{r}))_{\vec{r}=(0,0,r_3)} = \iiint d^3\vec{k} E_{11}(\vec{k}) \exp(i k_3 r_3) = \\ &= \int dk_3 \exp(i k_3 r_3) \iint dk_1 dk_2 E_{11}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (B.26)$$

De manera que, si ara considerem la definició de l'espectre transversal a 1.39b, trobem:

$$F_{trans}(k_3) = 2 \iint dk_1 dk_2 E_{11}(\vec{k}) \quad (B.27)$$

Recordant la forma isòtropa 1.38 per al tensor $E_{lm}(\vec{k})$, llavors $E_{11}(\vec{k}) = E(k)(k^2 - k_1^2)/(4\pi k^4)$. A continuació desenvolupem la integral B.27 en coordenades polars planes, canviant k_1, k_2 per les variables radial (ρ) i angular (φ), on $k_1 = \rho \cos(\varphi)$ i $k_2 = \rho \sin(\varphi)$, amb element de superfície $dk_1 dk_2 = \rho d\rho d\varphi$, i el nombre d'ona total k , i es compleix $k^2 = \rho^2 + k_3^2$. Amb aquest canvi, $(k^2 - k_1^2) = k_3^2 + \rho^2 \sin^2(\varphi)$, i per tant podem reescriure B.27 en la forma:

$$\begin{aligned} F_{trans}(k_3) &= 2 \iint dk_1 dk_2 \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 - k_1^2) = 2 \int_0^\infty \frac{E(k)}{4\pi k^4} \rho d\rho \int_0^{2\pi} (k^2 - k_1^2) d\varphi = \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{E(k)}{4\pi k^4} \rho d\rho \int_0^{2\pi} (k_3^2 + \rho^2 \sin^2(\varphi)) d\varphi = 2\pi \int_0^\infty \frac{E(k)}{4\pi k^4} \rho d\rho (2k_3^2 + \rho^2) \end{aligned} \quad (B.28)$$

Per obtenir l'últim membre de B.28 hem utilitzat:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi = \pi$$

Tot i que l'últim membre a B.28 en principi és una integral respecte a ρ , fent un canvi de variable amb $k^2 = \rho^2 + k_3^2$ i considerant $(2k_3^2 + \rho^2) = (k^2 + k_3^2)$, llavors:

$$F_{trans}(k_3) = \frac{1}{2} \int_{k_3}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \left(1 + \frac{k_3^2}{k^2} \right) dk \quad (1.41b)$$

Seguint procediments semblants als que hem utilitzat per trobar 1.41b, podem trobar també les expressions 1.41a i 1.47, corresponents respectivament a l'espectre longitudinal i el del camp escalar:

$$F_{long}(k_3) = \int_{k_3}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \left(1 - \frac{k_3^2}{k^2} \right) dk \quad (1.41a)$$

$$F_{\theta}(k_3) = \int_{k_3}^{\infty} \frac{E_{\theta}(k)}{k} dk \quad (1.47)$$

L'espectre de cisallament $F_{cis}(k_3)$ definit a 1.49 es pot escriure en funció de l'espectre transversal, $F_{trans}(k_3)$. Per demostrar aquesta dependència considerem l'expressió B.5, amb els índexs $l = m = 1$ i $n = p = 3$, juntament amb $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{r}$ i $\vec{r} = (0, 0, r_3)$, i la definició de la correlació transversal $f_{cis}(r_3)$ a 1.48, de manera que:

$$\begin{aligned} f_{cis}(r_3) &= \left(\frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_3} \frac{\partial u_1(\vec{x}')}{\partial x'_3} \right)_{\vec{r}=(0,0,r_3)} = \iiint E_{11}(\vec{k}) k_3^2 \exp(ik_3 r_3) d^3 \vec{k} = \\ &= \int dk_3 k_3^2 \exp(ik_3 r_3) \iint dk_1 dk_2 E_{11}(\vec{k}, t) = \frac{1}{2} \int dk_3 k_3^2 F_{trans}(k_3) \exp(ik_3 r_3) \end{aligned} \quad (B.29)$$

A l'últim membre hem utilitzat l'expressió B.27 per a l'espectre transversal. Així, comparant B.29 amb la transformada de Fourier 1.49, trobem que:

$$F_{cis}(k_3) = k_3^2 F_{trans}(k_3) \quad (1.50)$$

Utilitzant procediments semblants als que ens han portat fins a 1.50, podem demostrar que l'espectre del gradient de l'escalar $F_{\partial\theta}(k_3)$ és:

$$F_{\partial\theta}(k_3) = k_3^2 F_{\theta}(k_3) \quad (1.54)$$

Finalment, per demostrar 1.52, és a dir la relació entre la velocitat de dissipació d'energia cinètica turbulenta i l'espectre del cisallament, considerem el primer i el segon membre de B.28, que, multiplicats per k_3^2 i integrats entre 0 i ∞ , donen:

$$\int_0^{\infty} F_{trans}(k_3) k_3^2 dk_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} k_3^2 dk_3 2 \iint dk_1 dk_2 \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 - k_1^2)$$

Per obtenir el segon membre s'ha aplicat el fet que els espectres són funcions parells. Seguidament, canviarem la integral de volum de coordenades cartesianes a esfèriques, amb $d^3 \vec{k} = dk d\Omega_k$, i trobarem:

$$\iiint d^3 \vec{k} \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 - k_1^2) k_3^2 = \int_0^{\infty} dk \frac{E(k)}{4\pi k^4} \iint d\Omega_k (k^2 - k_1^2) k_3^2 = \frac{4}{15} \int_0^{\infty} k^2 E(k) dk \quad (B.30)$$

Per a la integral del segon membre de l'expressió anterior respecte a l'angle sòlid s'ha fet el canvi de coordenades $k_1 = k \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $k_2 = k \sin(\theta) \sin(\varphi)$ i $k_3 = k \cos(\theta)$, juntament amb $d\Omega_k = k^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, i s'ha integrat la colatitud θ (que no s'ha de confondre amb el camp escalar) entre 0 i π , i l'azimut φ entre 0 i 2π . Finalment, si comparem l'expressió B.30 amb 1.16a tenim:

$$\varepsilon = \frac{15}{2} \nu \int_0^{\infty} F_{cis}(k_3) dk_3 \quad (1.52)$$

B.5. Bibliografia

Batchelor, G. K. (1982), *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press.

Hinze, J. O. (1975), *Turbulence*, Mc Graw-Hill.

Mathieu, S. (2000), *An introduction to turbulent flow*, Cambridge University Press.

APÈNDIX C

SISTEMA DINÀMIC DE LORENZ

C.1. SISTEMA DINÀMIC DE LORENZ	200
C.3. BIBLIOGRAFIA	205

C.1. Sistema dinàmic de Lorenz

El sistema dinàmic de Lorenz es pot obtenir a partir de les equacions per a la convecció bidimensional presentades en el capítol 2 —equacions 2.7a i 2.7b— en condicions tèrmiques pures ($Ra_n = 0$):

$$\left(\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla^2 \Psi = -Ra_T \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{C.1a})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{C.1b})$$

on la funció de corrent Ψ es defineix com a $u \equiv \partial \Psi / \partial z$, $w \equiv -\partial \Psi / \partial x$, i la vorticitat ($\Omega \equiv \partial w / \partial x - \partial u / \partial z$) compleix $\Omega = -\nabla^2 \Psi$. Aquí, però, i a diferència de l'apartat 2.2, no negligirem els termes quadràtics. Pel que fa a θ , és la desviació de la temperatura T respecte a l'estat estacionari purament difusiu (lineal amb $1-z$), això és $T = (1-z) + \theta$.

Simbolitzant amb $\langle \rangle$ la mitjana respecte a la direcció horitzontal x , descomponem θ en una part mitjana $\langle \theta \rangle(z, t)$, dependent de z i t , més les corresponents fluctuacions, $\theta'(x, z, t)$, amb mitjana horitzontal nul·la, en la forma $\theta = \langle \theta \rangle + \theta'$, de manera que

$T(x, z, t) = (1 - z) + \langle \theta \rangle(z, t) + \theta'(x, z, t)$. Així doncs, la temperatura mitjana pren la forma $\langle T \rangle(z, t) = (1 - z) + \langle \theta \rangle(z, t)$. Llavors, el camp tèrmic, la seva fluctuació i la funció de corrent es poden escriure en forma de sèries de Fourier:

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(t) \sin(m\pi z) \sin(x\pi / \sqrt{2}) \quad (\text{C.2a})$$

$$\langle \theta \rangle(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(t) \sin(m\pi z) \quad (\text{C.2b})$$

$$\theta'(x, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(t) \sin(m\pi z) \cos(x\pi / \sqrt{2}) \quad (\text{C.2b})$$

on $k_v = m\pi$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) és el nombre d'ona vertical i k_h és el nombre d'ona horitzontal, que fixem a $k_h = \pi / \sqrt{2}$, és a dir el nombre d'ona més inestable (apartat 2.3). Els coeficients de les sèries de Fourier, $X_m(t)$, $Y_m(t)$ i $Z_m(t)$, depenen del temps, fet que en principi implica que l'evolució temporal del sistema estarà determinada per un sistema dinàmic amb espai fàsic d'infinites dimensions. Els termes de les series C.2 són bàsicament idèntics al desenvolupament en modes normals 2.13 — utilitzat per a l'estudi de l'estabilitat lineal—, amb la diferència que l'evolució temporal és determinada per funcions diferents d'una exponencial. Tanmateix, com que per a valors del nombre de Rayleigh lleugerament superiors al crític l'únic mode inestable és el corresponent a $k_h = \pi / \sqrt{2}$ i $k_v = m\pi$ amb $m = 1$ (apartat 2.2.1), podem considerar truncar les sèries C.2 en un cert m . Tal com van veure Saltzman (1962) i Lorenz (1963), si truncuem C.2 a $m = 2$, per a valors de $Pr \approx 7$ i Ra_T lleugerament superiors al crític, els únics coeficients que no s'esmoreixen en el temps són $X_1(t)$, $Y_1(t)$ i $Z_2(t)$. Llavors, si definim unes noves funcions $X(t)$, $Y(t)$ i $Z(t)$, en la forma $X_1 = -3X$, $Y_1 = \sqrt{2}Y / (\pi r)$ i $Z_1 = -Z / (\pi r)$, i introduïm el paràmetre $r = Ra_T / Ra_{cr}$ amb el nombre de Rayleigh crític, $Ra_{cr} = 27\pi^4 / 4 = 658$, trobem que la descomposició C.2 s'escriu com:

$$\Psi(x, y, z, t) = -3X(t) \sin(\pi z) \sin(\pi x / \sqrt{2}) \quad (\text{C.3a})$$

$$\langle \theta \rangle(z, t) = -\frac{1}{\pi r} Z(t) \sin(2\pi z) \quad (\text{C.3b})$$

$$\theta'(x, z, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi r} Y(t) \sin(\pi z) \cos(\pi x / \sqrt{2}) \quad (\text{C.3c})$$

i, per tant, la variable $X(t)$ descriu l'amplitud del moviment convectiu, $Y(t)$ la diferència tèrmica entre corrents ascendents i descendents, i $Z(t)$ representa les desviacions del perfil tèrmic mitjà respecte al perfil lineal estacionari en règim difusiu (Lorenz 1963).

Finalment, si substituïm les solucions C.3 a les equacions C.1 obtenim el conegut sistema dinàmic de Lorenz en l'espai fàsic (X, Y, Z) :

$$\dot{X} = Pr(-X + Y) \quad (\text{C.4a})$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (\text{C.4b})$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (\text{C.4c})$$

on el sobrepunt indica la derivada respecte al temps, el qual s'ha escalat com a $\tau = 3\pi^2 t / 2$, i $b = 8/3$. Per tant, d'acord amb les equacions C.4, els dos paràmetres de què depèn el sistema (en el cas convectiu) són el nombre de Prandtl, que considerarem $Pr = 7$ per a l'aigua a 20°C, i la raó del nombre de Rayleigh (r).

Resumint, doncs, el sistema dinàmic de Lorenz representa un sistema convectiu simplificat, ja que surt després de truncar a l'espai de Fourier la solució general i, per tant, tal com comenta Lorenz (Lorenz, 1963), aquestes equacions donen resultats realistes quan el nombre de Rayleigh supera lleugerament el seu valor crític (r no gaire més superior que 1), ja que per a valors superiors de r la resta de nombres d'ona tindran un pes important i el truncament no és gens vàlid. Això és, per a valors de r prou grans, la tridimensionalitat i l'existència d'un continu d'escalaes espacials prenen un pes determinant (turbulència) i aquest model no té validesa. A més, en general, no hi ha solucions analítiques per a aquest sistema i, per tant, cal resoldre'l numèricament. Tot i això, l'article de Lorenz titulat "Deterministic non-periodic flow" (Lorenz, 1963) va representar un punt d'inflexió respecte a la filosofia i els mètodes per enfrontar-se a tot un conjunt de problemes amb alta complexitat, i en particular sense periodicitats, i amb alta sensibilitat a les condicions inicials, els quals es van assimilar amb el temps al concepte de caos determinista.

Com a exercici, i en el marc d'aquest treball sobre convecció, hem integrat numèricament les equacions C.4 i hem obtingut l'evolució del sistema en funció del nombre de Rayleigh (o de r). Així, per a $0 \leq r \leq 1$ i passat un cert temps, s'assoleix en

forma asimptòtica la solució $X = Y = Z = 0$, en concordança amb el fet que l'estat caracteritzat pel camp de velocitats nul i perfil tèrmic lineal (purament difusiu) és estable per a valors del nombre de Rayleigh inferiors al crític. Per a valors de $1 < r \leq 24.74$, la solució anterior és inestable i es formen cel·les estacionàries, per això s'anomena convecció estacionària. I passat aquest valor crític (per a $r > 24.74$) les tres variables oscil·len en el temps, en principi de manera periòdica, però a mesura que s'incrementa el nombre de Rayleigh s'assoleix un comportament no periòdic i altament sensible a les condicions inicials (caos determinista), que en l'espai de fases presenta una estructura complexa i amb propietats fractals (atractor estrany) (Solé i Manrubia, 1996). Per últim, la transició al règim plenament turbulent es produeix en el cas de l'aigua per a $Ra_T \approx 10^5$ o bé $r \approx 100$.

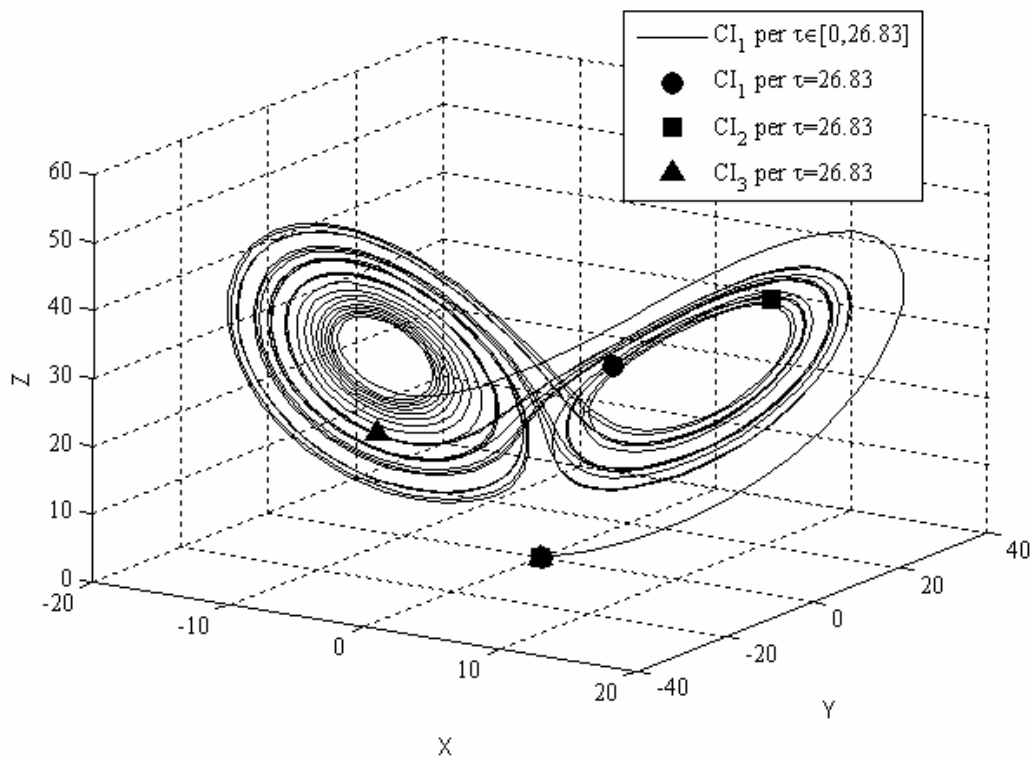


Figura C.1. Atractor estrany pel sistema dinàmic de Lorenz, per a $r = 30$ (comportament caòtic), en l'espai de fases (X, Y, Z) , per a les condicions inicials comentades en el text.

En la figura C.1 s'ha representat l'evolució temporal del sistema (integrat numèricament) per a $r = 30$, això és, en el rang de comportament caòtic, per a tres condicions inicials molt pròximes i arribant fins a un cert temps final ($\tau = 26.83$). La proximitat d'aquestes condicions inicials fa precisament que en la figura C.1 aquests punts coincideixin a prop de $(0,0,0)$. Més concretament, les condicions inicials

utilitzades, que anomenarem CI_1 , CI_2 i CI_3 , tenen coordenades en l'espai fàsic: $CI_1 = 10^{-1}(1,1,1)$ (cercle), $CI_2 = 10^{-2}(1,1,1)$ (quadrat) i $CI_3 = 10^{-3}(1,1,1)$ (triangle). Tanmateix, arribats al mateix temps final, la posició del sistema és molt diferent per a les tres condicions inicials (rodona, quadre i triangle) i mostra l'anomenada sensibilitat a les condicions inicials.

El flux de calor adimensionalitzat, Nu (apartat 2.3), es pot calcular a la placa inferior ($z=0$), considerant només la contribució difusiva —ja que a $z=0$ la contribució convectiva és nul·la—, a partir del perfil mitjà de la temperatura (adimensional), donat per $\langle T \rangle(z, t) = (1 - z) + \langle \theta \rangle(z, t)$, i l'equació C.3b, i s'obté:

$$Nu = - \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} \right)_{z=0} = 1 + 2Z(t) / r \quad (C.5)$$

El seu valor, havent fet la mitjana en el temps, s'ha representat a la part esquerra de la figura C.2, en funció de r per a les tres condicions inicials que apareixen en la figura C.1. Una propietat important és que, per a les tres condicions inicials esmentades, les corbes de flux de calor estan exactament encavalcades. Això és, el flux de calor, com a magnitud estadística que és, no depèn de la realització o condició inicial que utilitzem, sempre que aquestes siguin prou petites (fluctuacions inicials). Noteu que aquesta simulació correspon al rang de Ra_T petits de la figura 2.8. A la part dreta de la figura C.2 s'ha representat la mitjana temporal del perfil tèrmic, $\langle T \rangle(z, t)$ per a diferents valors de r , començant pel comportament purament difusiu ($r = 0.5$ i 1), cel·les estacionàries ($r = 1.5$ i 24), fins a arribar al comportament caòtic ($r = 25$, 50 i 100). El perfil tèrmic mitjà s'ha obtingut a partir de CI_1 , però no mostra diferències respecte a les altres dues condicions inicials (CI_2 i CI_3). El tipus de perfil típic en el cas turbulent ($r > 100$) no ha sortit de la simulació numèrica, però l'hem incorporat en la figura per completar-la. És important remarcar la petita davallada del flux tèrmic en la figura C.2 (esquerra), una vegada s'ha entrat a la regió de caos ($r = 24.7$). Aquest canvi de règim coincideix amb una reducció en l'amplitud del perfil tèrmic, tal com es pot constatar en la figura C.2 (dreta).

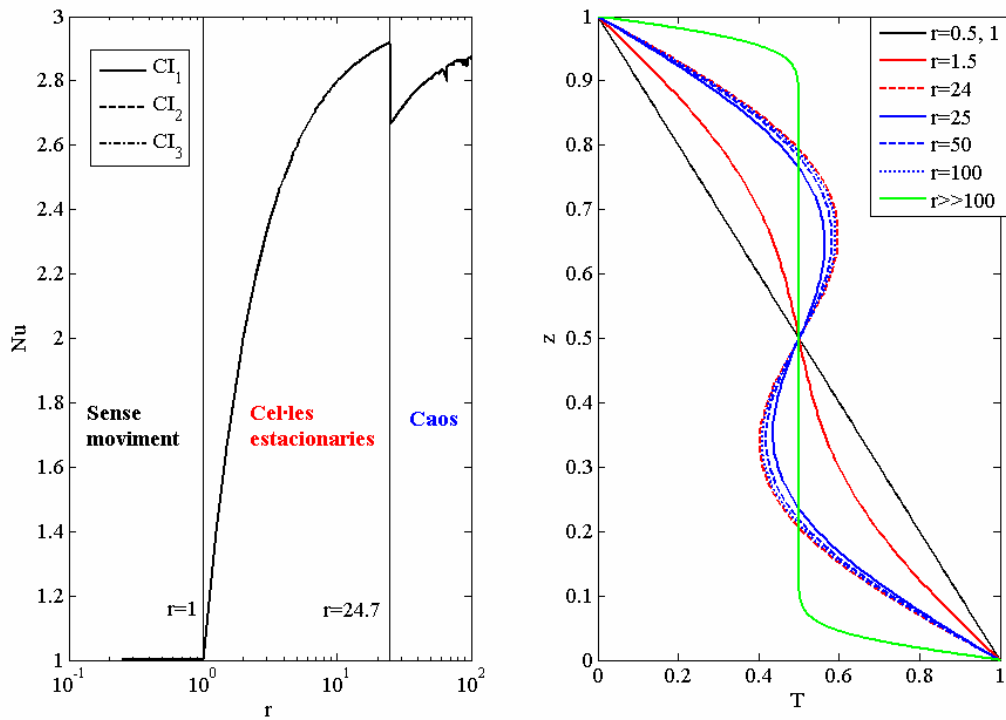


Figura C.2. A l'esquerra, flux de calor no dimensional Nu en funció del paràmetre de forçament $r = Ra_T / Ra_{cr}$, per a $r \leq 100$. A la dreta perfil del camp mitjà tèrmic per a diferents valors de r .

Aquest canvi de comportament ha estat constatat i estudiat per Vadasz (2001), juntament amb la histèresi produïda quan s'utilitzen condicions inicials més grosses que les que hem utilitzat en aquest apartat dins la zona de transició al caos, això és, quan es fa evolucionar en el temps el sistema diverses vegades amb valors diferents de r , aplicant com a condicions inicials el resultat final de la darrera simulació efectuada. D'aquesta manera, el fet d'augmentar r i posteriorment reduir-lo, en el diagrama r - Nu , produeix un cicle d'histèresi.

C.3. Bibliografia

Lorenz, E. N. (1963), "Deterministic non-periodic flow", *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, 130-141.

Saltzman, B. (1962), “Finite amplitude free convection as an initial value problem I”,

Journal of the Atmospheric Sciences, 19, 329-341.

Solé, R. V i S. C Manrubia (1996), *Orden y caos en sistemas complejos*, UPC, 594 p.

Vadasz, P. (2001), “Heat transfer regimes and hysteresis in porous media convection”,

Journal of Heat Transfer, 123, 145-156.

