Models i índexs de concentració. Aplicació al volum empresarial de Lleida

M. Àngels CABASÉS i PIQUÉ

I S B N: 84-89727-64-3
Depósito Legal: S. 54-98

Servei de Publicacions
Universitat de Lleida

ÍNDEX GENERAL

AGRAïMENTS

M'omple de satisfacció poder reconéixer el deute que he contret amb totes aquelles persones que directament o bé indirectament han contribuit en la realització d'aquesta tesi.

En primer lloc, agraeixo al Director de la mateixa, Dr. D. Joan Baró i Llinàs, Catedràtic d'Economia Aplicada de la Facultat de Dret i Economia de LLeida, el seu ajut continu que ha fet possible l'elaboració d'aquesta tesi i la confiança depositada en la meva persona.

Una menció especial mereix el professor D. Josep Conde i Colom pels seus comentaris i suggerencies que han ajudat a millorar algunes parts del treball. No vull oblidar als companys del Departament pel seu estímul durant els tres anys que ha durat la realització de la tesi, ni als companys del Departament d'Informàtica que m'han ofert part del material informàtic aplicat en la tesi. Tampoc vull oblidar a les companyes que m'han ofert ajut lingüístic.

I per últim agrair a tots els que m'han envoltat i que d'una manera senzilla han sabut entendre els meus canvis d'humor i que amb paciència m'han ajudat anímicament en la realització d'aquesta tesi, en especial el meu marit.

PART TEÓRICA

CAPÍTOL 1. LA CORBA DE LORENZ

1.1. LA CORBA DE LORENZ. INTRODUCCIÓ

Actualment un dels temes més debatuts per l'opinió pública és la desigualtat existent en els diferents àmbits de la societat i, per tant, aquest tema esdevé un objectiu de les formacions polítiques les quals concedeixen molta importància a l'impacte de les mesures específiques en matèria de distribució.

Com a conseqüència, en l'esfera econòmica assistim a la proliferació d'estudis empírics i a l'ús de mesures capaces de quantificar el grau de desigualtat que pot presentar la distribució de la riquesa, renda o consum.

Dos són els criteris a l'hora de mesurar la desigualtat:

a.- L'enfocament tradicional, pretén únicament estudiar la desigualtat sense entrar en qüestions de tipus ètic. Són mesures estadístiques positives que es poden aplicar a qualsevol distribució sense disposar d'informació addicional. Les més freqüents i utilitzades són: GINI, ÍNDEX DE THEIL i COEFICIENT DE VARIACIÓ**.**

b.- L'enfocament modern, iniciat per Atkinson (1970)[1] va mostrar que en les diverses mesures de desigualtat estan immersos criteris ètics i per tant, s'han d'evitar incompatibilitats entre els criteris ètics de les mesures i els criteris ètics de les Funcions de Benestar Social. Es creen les anomenades mesures normatives de desigualtat.

Per construcció els índexs normatius no seran apropiats per mesurar la desigualtat en la distribució de magnituds econòmiques diferents de la renda.

Esteban Marquillas (1977)[2] arriba a la conclusió que benestar i desigualtat són dos conceptes substitutius i no complementaris, ja que,

- El coneixement de la mesura de desigualtat no permet inferir les preferències socials que estan d'acord amb aquesta mesura.

- Si es parteix d'una Funció de Benestar Social específica, en general no serà possible arribar a una concepció ben definida de desigualtat.

Quan a partir d'ara es parli de desigualtat, serà únicament per destacar les diferències del volum de variable posseïda pels diferents sectors de la població, és a dir, del grau de concentració de la variable, prescindint de qüestions ètiques i estudiant només la mesura estadística.

La corba de Lorenz ha estat àmpliament utilitzada per analitzar la concentració de les variables indicatives de grandària en Economia i, en especial, la renda, ja que és una eina per representar gràficament la concentració.

[1] Atkinson, A.B., "On The Measurement of Inequality", Journal of Economic Theory, vol.2, pàgs. 244-263, 1970.
[2] Esteban, J.M., "La medición de la desigualdad de rentas", Revista Moneda y crédito, núm. 141, pàgs. 43-65. juny 1977.

Per tant, el primer que caldria definir és el concepte **"concentració"**.I el millor que es pot fer és retrobar un dels primers autors que van treballar amb aquest concepte, Conrado Gini[3], que de forma molt simplista però entenedora ens en fa una primera aproximació,

"Es diu que la riquesa d'un país està més concentrada quant més gran és la part de riquesa total posseïda per la part més rica de la població. També podem dir que la concentració de la riquesa és major quan el sector més pobre de l'esmentada població posseeix menor riquesa."

Tal i com es dedueix, la variable sobre la qual s'estudiarà la concentració, és una variable indicativa de grandària econòmica i, a causa de la seva naturalesa, s'ha de considerar que el seu domini és no negatiu, amb valors $x_i \geq 0$, tal és el cas de la dimensió de les empreses, ingressos de les famílies, volums de contractació, etc., i en general per a qualsevol indicador de dimensió econòmica.

En l'estudi de la concentració, tant la corba de Lorenz (introduïda per Lorenz l'any 1905), com l'índex de Gini, tenen una gran acceptació. El diagrama de Lorenz és encara, avui en dia, la millor representació gràfica de la concentració de la variable econòmica, i l'índex, malgrat les últimes crítiques, és un dels instruments més aplicats donada la seva senzillesa de càlcul i la varietat d'interpretacions que se'n deriva.

Així, estadísticament, la corba de Lorenz relaciona la freqüència relativa acumulada de la variable amb la massa relativa acumulada de variable. I tal com correspon a la forma més habitual de presentar la funció de concentració, es fa necessària una ordenació dels valors de la variable objecte d'anàlisi aconseguint així un diagrama amb creixement més que proporcional.

Suposant N valors observats d'aquesta variable en la població o mostra, i agrupats en k intervals, de manera que per a l'interval $(x_{t-1}- x_t]$, la n_t és la seva freqüència absoluta, $f_t=n_t / N$ la freqüència relativa i x_t^c, la marca de classe o valor més representatiu de l'interval es defineix

[Figura 1-1]

i gràficament:

[Figura 1-2]

[Figura 1-3]

Si ara representem p_t i q_t en els eixos d'abscisses i ordenades, tindrem la forma tradicional de presentar un diagrama de concentració amb dades provinents d'una distribució de freqüències:

[Figura 1-4]

Es pot observar que per a k intervals de la variable, el diagrama correspon a una línia poligonal.

---

[3] Gini C., "Curso de Estadística", Ed. Labor, segona edició, pàg. 211, 1953.

Com ja s'ha indicat, l'eficàcia de la "corba" es basa en el fet que és un instrument per a l'estudi de la concentració de la variable. Un major o menor grau de convexitat de la "corba" indicarà una menor o major concentració de la variable, és a dir, quant més a prop estigui la corba de la diagonal principal, menor serà la concentració i quant més lluny major serà la concentració[4].

És clar, la màxima concentració existeix quan un sol element de la població o mostra posseeix tot el valor de la variable que s'estudia i així la "corba" és el triangle que forma l'eix d'abscisses fins al valor *1* i la paral.lela a l'eix d'ordenades en aquest valor fins a la seva intersecció amb la bisectriu principal (Figura 1-5).

La mínima, doncs, es produeix quan tots els elements posseeixen el mateix valor de la variable. La "corba" en aquesta situació, coincidirà amb la bisectriu principal (Figura 1-6).

Noti's en la següent gràfica, que inclou dos diagrames diferents de concentració, com per una mateixa freqüència relativa acumulada corresponen dues masses relatives acumulades diferents i que és la segona "corba"(massa acumulada major) la que representa més concentració de variable i la que simultàniament es troba més lluny de la bisectriu principal o línia d'equidistribució,

Figura 1-7

D'aquesta manera qualsevol indicador capaç d'avaluar la distància (o concepte equivalent) entre la línia d'equidistribució i la de la corba de Lorenz ha de ser una mesura adient en el càlcul (quantificació) de la concentració. En aquest sentit, l'Índex de Gini, que mesura la superfície que separa la recta d'equidistribució de la corba, és una mesura idònia de concentració.

Gini va efectuar el càlcul d'aquesta mesura primerament ordenant de menor a major cadascun dels N valors de la variable i així obtingué després les quantitats acumulades[5].

Va definir q_i com "la fracció que sobre el total de les N rendes considerades representa la quantia de les rendes més baixes".

I p_i "la fracció que el nombre dels i rendistes més petits representa sobre el nombre total N dels rendistes".

(S'observa que la variable analitzada per l'autor és la renda.)

Quantificant la concentració mitjançant:

Figura 1-8

Cal remarcar que per a obtenir aquesta mesura és necessari un coneixement individual de cada element, situació que no representa la realitat. I per tant, l'índex té més sentit de calcularlo en funció dels k intervals en què s'han agrupat els valors de la variable.

[4] Escuder, R.,"Métodos estadísticos aplicados a la Economía", Ed. Ariel, 1987.
[5] Ruiz, L.,"Sobre la Metodología del l'Indice de Gini", Cuadernos de Economía, vol. VI, núm. 16, maig-agost 1978.

Així, si la quantificació de la concentració s'obté tot considerant l'àrea compresa entre la "corba" i la bisectriu, es calcula geomètricament:

$\frac{1}{2}$ - Àrea ratllada, o bé,

1 - Doble de l'àrea ratllada.

D'aquí la definició més emprada de l'índex com a " doble de l'àrea existent entre la corba i la diagonal principal".

Doble de l'àrea = $(p_1-p_0)\ (q_1+q_0)+(p_2-p_1)\ (q_1+q_2)+(p_3-p_2)\ (q_2+q_3)+ \cdots$
$\cdots +(p_k-p_{k-1})(q_k+q_{k-1}) = f_1(q_1+q_0)+f_2(q_1+q_2)+f_3(q_2+q_3)+ \cdots f_k(q_k+ q_{k-1})$

Així l'Índex de Gini:[6]

Figura 1-9

El qual pren dos valors límit:

a.- Límit superior

Un individu posseeix tot el valor de la variable considerada i la resta d'individus res, la concentració és màxima, tal com ja s'ha definit.

Figura 1-10

Aquest límit depèn de *N* (nombre d'elements), el qual, si tendeix a infinit, fa que *G*= *1*.

Així, aquest límit val 1 si el nombre d'elements considerat és gran.

b.- Límit inferior

Tots els elements posseeixen la mateixa proporció del valor total de la variable considerada, és a dir, la concentració és mínima.

Figura 1-11

[6] Gastwirth, J.,"The estimation of the Lorenz Curve and Gini Index", Review of Economics and Statistics, vol. 54, núm. 3, pàgs. 306-316, 1972.
Mehran, F.,"Bounds on the Gini Index Based on Observed Points of the Lorenz Curve", Journal of the American Statistical Association, vol. 70, núm. 349, pàgs. 64-67, març 1975.

1.2. CORBA DE CONCENTRACIÓ D'UNA VARIABLE ALEATÒRIA

La corba de Lorenz s'ha calculat fins aquest moment en funció dels valors de la variable observats en la població o mostra. Però a causa del comportament aleatori de les variables indicatives de grandària en economia, l'estudi se centrarà en variables aleatòries.

Allò desitjable seria establir la distribució de probabilitat de la variable aleatòria mitjançant les dades observades en la realitat. Però això no sempre és possible, ja sigui perquè la informació es presenta mitjançant acumulacions de la variable, o simplement per la inoperativitat d'alguns models o deficiències en les especificacions de les lleis de densitat.

La funció de concentració i les mesures derivades d'aquesta provindran de variables absolutament contínues donada la naturalesa econòmica dels fenòmens objecte d'estudi, encara que les dades mostrals aconsellin un tractament discret.

1.2.1. Funció de Concentració

Tenint en compte el caràcter de la variable aleatòria, el seu domini es manté no negatiu,

Figura 1-12

No és habitual que les variables indicatives de dimensions (rendes, habitants, vendes, capitals...) presentin valors negatius, ans al contrari, per definició només poden prendre valors nuls o positius.

La funció de concentració relaciona l'acumulació de probabilitat de la variable aleatòria amb la massa acumulada de variable relativa que mai no pot ser negativa.

La funció d'acumulació de probabilitat vindrà donada per la funció de distribució de la variable aleatòria,

Figura 1-13

i complint la funció de distribució les propietats que li són pròpies:

Figura 1-14

La funció de massa acumulada relativa de variable relaciona la massa de variable aleatòria corresponent als *N* elements de la població o mostra per un nivell inferior a *x*, amb la massa de variable aleatòria corresponent per tot valor de $x \geq 0$,

Figura 1-15

Hom obté una funció amb idèntiques propietats que la funció de distribució de la variable aleatòria, ja que $q_x(x)$ pot tenir la lectura teòrica d'una altra funció de distribució.

Efectivament amb $F_\xi(x)$ coneguda podríem trobar la funció de distribució d'una nova variable η tal que,

Figura 1-16

Gràficament les dues funcions F_ξ (x) i $q_\xi(x)$:

Figura 1-17

on es pot comprovar que,

Figura 1-18

2n- La màxima diferència entre ambdues funcions es troba quan x= μ

Figura 1-19

i a més a més en el mateix punt les dues presenten el mateix pendent.

Així doncs, **la funció de concentració**, serà la funció que relaciona $F_\xi(x)$= p amb $q_\xi(x)$, és a dir, la probabilitat i la massa de variable que s'acumulen a cada valor de la variable.

Aquesta funció s'anomena també corba de Lorenz i es denota per q(p). Constatem que pren el nom de l'autor que la va introduir per primer cop el 1905.

Figura 1-20

1.2.2. Expressió de la funció de concentració

Considerant la variable aleatòria amb un domini no negatiu $\in [0, \infty) = R^+$, la funció de densitat coneguda,

Figura 1-21

i l'existència de $E[\xi]$, podem reconèixer dos camins per a l'obtenció de la corba de Lorenz, tot depenent de la major o menor facilitat operativa i analítica de $f_\xi(x)$.

Expressió de la corba de concentració quan la variable és la variable aleatòria.

Figura 1-22

Expressió de la corba de concentració quan la variable és la funció de distribució[7]

Transformant

[7] Gastwirth, J.L.,"A general definition of the Lorenz curve", Econometrica, vol. 39, pàgs. 1037-1039, 1971. Gastwirth, J.L.,"The estimation of the Lorenz curve and Gini Index", Review of Economics and Statistics, vol. 54, pàgs. 306-316, 1972.

Figura 1-23

amb els següents canvis:

Figura 1-24

1.2.3. Propietats de la funció de concentració

Per tal que q(p) sigui considerada una funció de concentració serà necessari que compleixi les següents propietats:

Figura 1-25

És a dir, presenta un domini entre 0 i 1 (Tota acumulació ha de ser positiva i no superar el 100 %).

2a És monòtona creixent, a majors acumulacions de probabilitat, majors o iguals acumulacions relatives de massa de variable,

Figura 1-26

3a La funció és convexa, és a dir, davant increments de p, $q_{\xi}(x)$ creix més que proporcionalment (La variable s'ha ordenat de forma creixent)

Figura 1-27

4a La funció de concentració és menor o igual que p propietat que esdevé com a conseqüència de la tercera.

Figura 1-28

1.2.4. La corba de concentració truncada

En molts casos a l'hora d'analitzar la concentració d'una variable és més indicat, per la seva interpretació econòmica, acotar el recorregut de la variable en un seguit de punts remarcables com són la mitjanera, la mitjala....[8]

És per això, que J.Baró[9] proposa l'obtenció, a partir de la variable objecte d'estudi, d'una nova variable anomenada variable truncada en ω_1 i ω_2,

Figura 1-29

punts corresponents al domini de la variable inicial i que ara fan les funcions de valors extrems de la variable trunca,

---

[8] Aquests termes indiquen: Mitjanera (Mi): valor de la variable que iguala a un mig la funció d'acumulació de probabilitat. Mitjala (Ml): valor de la variable que divideix en dues parts iguals la massa acumulada de variable.
[9] Baró, J.,"Distribución Personal de la renta. Medidas y leyes de desigualdad", Tesis Doctoral, Fac. CC.EE. Barcelona, 1982.
Baró, J. i Moratal, V.,"Concentración i Distribuciones Truncadas", Qüestió, vol. 8, núm. 3, pàgs. 127-132, setembre 1984.

Figura 1-30

Mitjançant la variable truncada, com que prové d'una variable aleatòria, es poden calcular les funcions de densitat i de distribució i qualsevol mesura que se'n derivi:

Figura 1-31

La corba de concentració truncada serà la funció que relaciona $F_{\xi T}(x)$ i $q_{\xi T}(x)$ la qual s'obtindrà efectuant els canvis necessaris a partir de la funció original $q_{\xi}(x) = \varphi(F_{\xi}(x))$,

Figura 1-32

O també si s'anomena,

Figura 1-33

(Relació entre $q_{\xi}(x)$ i $q_{\xi T}(x)$)

Figura 1-34

Molt interessants seran els estudis referents a acotacions unilaterals de la variable[10],

Figura 1-35

que per a determinats punts d'interès seran:

Figura 1-36

1.3. CARACTERÍSTIQUES DE LA CORBA DE LORENZ

A continuació, s'analitzen cinc característiques de la corba, les quals serveixen per conèixer més àmpliament el caràcter d'una funció de concentració.

1.3.1. La corba és invariable davant canvis d'escala de la variable aleatòria[11]

Sigui la corba de concentració derivada d'una variable,

Figura 1-37

La corba que s'obté davant un canvi d'escala (producte per una constant) de la variable serà justament la mateixa,

Figura 1-38

[10] Baró, J. i Torrelles, E.,"Sobre las medidas de concentración", Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, març 1989, Universitat de Barcelona.
[11] Fellman, J.,"The effect of Transformations on Lorenz Curves", Econometrica, vol. 44, pàgs. 823-824, 1976.

1.3.2. La corba de concentració és sensible als canvis d'origen en la variable aleatòria[12]

Si es considera un canvi d'origen (translacions) en la variable, sí s'altera la funció de concentració. Seguint un raonament paral.lel a l'anterior característica:

Figura 1-39

Gràficament la nova corba serà:

Figura 1-40

Efectivament el pendent de la nova corba és

Figura 1-41

considerant K > 0 i respecte al pendent de la corba originària:

Figura 1-42

Les dues corbes troben el mateix pendent en el punt x = μ_F, essent $\mu_F$el valor esperat de la variable originària.

1.3.3. "Màxim " en la funció de concentració

La corba prendrà el seu "màxim" en aquell punt en què la distància existent entre ella i la recta igualitària (recta q(p)=p) és màxima, entesa aquesta distància com a perpendicular a l'abscissa, quan D(p)= p- q(p).

Figura 1-43

Per tant, la màxima distància entre la corba i la recta igualitària es troba,

Figura 1-44

Indiquem que en el punt x= μ la funció pren el seu "màxim" i el pendent en aquest punt coincideix amb el pendent de la recta igualitària. Així per,

Figura 1-45

Gràficament,

Figura 1-46

Si s'observa aquesta gràfica es pot veure com el punt

Figura 1-47

---

[12] Baró, J.,"Distribución Personal de la renta. Medidas y leyes de desigualdad", Tesis Doctoral, Fac. CC.EE. Barcelona, 1982.

és el vèrtex del major triangle que es pot inscriure dins la corba, el qual té la consideració de cota inferior de l'Índex de Gini com podrem comprovar en capítols posteriors.

En aquesta línia, Pietra (1.930) obté una mesura de concentració de la variable,

Figura 1-48

la qual demostra que és igual a la màxima discrepància entre la corba i la recta igualitària,

Figura 1-49

Posteriorment, Gastwirth[13], estudiant mesures de concentració alternatives a l'Index de Gini, arribarà a l'índex de Pietra considerant la meitat de la desviació mitja relativa:

Figura 1-50

Per una altra banda, l'Índex de Pietra, o bé, la màxima discrepància entre la corba i la recta, és el doble de l'àrea del màxim triangle que es pot inscriure dins la corba[14].

Així gràficament,

Figura 1-51

Si d_μ és la distància perpendicular a la recta igualitària del punt $(p_\mu, q(p_\mu))$ i $D(p_\mu)= D_\mu$ és la màxima discrepància, i geomètricament,

Figura 1-52

i com d_μ és l'altura del màxim triangle que s'inscriu dins la corba, l'àrea d'aquest triangle serà:

Figura 1-53

1.3.4. Simetria de la corba de Lorenz

En estudiar la simetria de la funció de concentració respecte a la bisectriu secundària, eix sobre el qual és raonable l'estudi de la simetria, s'observa que serà simètrica si les distàncies perpendiculars de la recta igualitària a la corba per a dos punts equidistants del punt p= 1/2 són iguals:

Figura 1-54

Esteban[15] arriba a la conclusió que si la corba és simètrica respecte a la diagonal secundària també és simètrica la funció de densitat que l'ha originat respecte a μ:

Figura 1-55

[13] Gastwirth, J.L.,"The estimation of the Lorenz Curve and Gini Index", The review of Economics and Statistics, núm. 54, pàgs. 306-316, 1972.
[14] Esteban, J.M., "Algunos resultados sobre la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini", Cuadernos de Economía, núm. 22, pàgs. 191-224, 1980.
[15] Esteban, J.M., "Algunos resultados sobre la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini", Cuadernos de Economía, núm. 22, pàgs. 191-224, 1980.

L'operació a l'inrevés també es compleix i, per tant, si $f_\xi(x)$ és simètrica respecte a μ, la corba de concentració és simètrica respecte a la diagonal perpendicular a la línia d'igualtat.

Lògicament si la corba és simètrica i en el punt p=1/2 la distància perpendicular de la bisectriu a la corba és la màxima, coincidirà doncs, el valor esperat amb la mitjanera.

Figura 1-56

Un cas particular és l'anàlisi de les distàncies si considerem els punts p = 0,25 i p =0,75, és a dir, punts equidistants de la mitjanera.

Figura 1-57

Aquestes distàncies de la recta igualitària perpendiculars a la corba, si coincideixen, faran que la corba sigui simètrica respecte de la recta q= 1-p. En el mateix gràfic es poden analitzar d'altres distàncies com D_1 i D_2, de manera que:

Figura 1-58

coincideixen aquestes distàncies tenint en compte les particions que s'han considerat (en aquest cas, en quartils) tant en la massa acumulada de variable com en l'acumulació de probabilitat.

En aquesta línia, J. Baró[16] calcula dues distàncies que denomina:

Figura 1-59

i que gràficament es representen com:

Figura 1-60

Si les dues distàncies coincideixen, la funció de concentració és simètrica respecte de la bisectriu principal.

N.C. Kakwani i N. Podder[17] proposen un canvi de coordenades per a la corba de Lorenz. Denominen μ a la longitud de la coordenada des de q sobre la recta igualitària, i π serà l'ordenada sobre la línea recta igualitària des de l'origen:

Figura 1-61

Com que $q(p) \leq p$, $\eta \geq 0$ i $\eta \leq \pi$.

Figura 1-62

Els autors proposen que la funció de concentració amb un nou sistema de

[16] Baró, J. i Torrelles, E.,"Sobre las medidas de concentración", Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, març 1.989, Universitat de Barcelona.
[17] Kakwani, N.C.i Podder, N, "Efficient estimation of the Lorenz curve and associated inequality measures from grouped observations", Econometrica, vol. 44, núm. 1, pàgs. 137-149, 1976.
Kakwani, N.C. i Podder, N.,"On the estimation of Lorenz curves from grouped observations", International Economic Review, vol. 14, núm. 2, juny 1973.

coordenades, és a dir, amb funció de π i η s'escrigui:

Figura 1-63

Aquesta funció tindrà el seu màxim en x=μ, ja que $\eta'(\pi) = (\mu - x) / (\mu + x)$ i $\eta''(\pi) < 0$.

Serà una corba simètrica respecte de la línia diagonal perpendicular a la recta igualitària quan:

Figura 1-64

Com que no sempre resulta operatiu trobar la funció de concentració amb les noves coordenades, coneguda la funció de densitat de la variable, la simetria es pot centrar en una nova funció:

Figura 1-65

La funció η(p) serà simètrica respecte al punt pel qual la funció pren el seu màxim (que necessàriament ha de ser p= 0,5) quan:

Figura 1-66

Si és simètrica ho serà la funció de concentració sense canvis de coordenades, donat el caràcter biunívoc de la relació i sempre i quan el domini no variï.

Des d'una altra òptica es pot obtenir una corba simètrica respecte de la recta q= 1-p, i no com fins ara que s'analitzava si la corba objecte d'estudi era simètrica respecte de la mateixa recta.

Per això es fa necessari un canvi d'eixos, així, si originàriament la corba és:

$$q = q(p)$$

es canvia q per (1-p) i p per (1-q).

Figura 1-67
Figura 1-68

La nova corba, simètrica, serà:

Figura 1-69

La utilitat d'aquestes dues corbes pot servir per analitzar si dues distribucions diferents presenten la mateixa concentració.

1.3.5. Elasticitat de la funció de concentració

Si considerem la funció de concentració segons Gastwirth,[18]

[18] Gastwirth, J.L.,"A general definition of the Lorenz curve and Gini Index", Review of Economics and Statistics, vol. 54, pàgs. 306-316, 1972.

Figura 1-70

On per a tots els casos l'elasticitat és positiva.

Si considerem l'elasticitat de la corba constant,

Figura 1-71

s'arriba a determinar que també ho és l'elasticitat de la funció de densitat subjacent. L'afirmació contrària, doncs, també és certa[19].

Suposant una elasticitat constant, la forma que pren la funció de concentració és:

Figura 1-72

[19] Esteban, J.M., "Algunos resultados sobre la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini", Cuadernos de Economía, núm. 22, pàgs. 191-224, 1980.

CAPÍTOL 2. CORBES DE CONCENTRACIÓ A PARTIR DE DENSITATS CONTÍINUES CONEGUDES

2.1. INTRODUCCIÓ

En aquest apartat s'obtindran funcions de concentració de la variable aleatòria amb domini no negatiu $x \in R^+ \cup \{0\}$ i de naturalesa contínua coneixent la densitat de la variable.

Una de les àrees de major interès en l'àmbit de l'estudi de la concentració d'una variable indicativa de grossària en economia ha estat l'especificació de la Distribució d'aquesta variable i l'elecció d'una o més mesures de desigualtat.

Molts autors com Pareto, Aitchison i Brown, Champernowne, Fisk, Steindl, Kakwani i Podder, Salem i Mount, Singh i Maddala, Gail i Gastwirth, Basmann, Molina i Slottje, McDonald, Villaseñor i Arnold, Manash Ranjan Gupta... entre d'altres, han suggerit formes funcionals alternatives. Alguns d'ells han efectuat estudis basant-se en models de probabilitat teòrics i altres han proposat noves formes funcionals. Tots tenen un punt en comú, estudiar models de probabilitat teòrics com a pas essencial en l'inferència estadística, ja que es necessita escollir un model per descriure el comportament de les dades de què es disposa.

De tan nombrosa informació s'han seleccionat algunes funcions l'ús o l'operativitat de les quals les fan més adients a la línia de recerca que es vol dur a terme, és a dir, es tracta de models que tenen interès econòmic o empresarial. S'ha de tenir en compte que algunes funcions encaixen bé a les cues, unes sobre els valors baixos de la distribució empírica i d'altres tot al contrari. Algunes no són flexibles per permetre anàlisis multidimensionals i d'altres ofereixen gran nombre de paràmetres a estimar.

Per una banda, McDonald[20], a partir dels models d'Euler generalitzats, relaciona diferents distribucions. Així la funció Gamma generalitzada i la funció Beta de primer i segon ordre les defineix respectivament com,

Figura 2-1

Amb les següents relacions:
Beta Generalitzada de 1r ordre
$\Rightarrow$ a = 1 **Beta de 1r ordre** $\Rightarrow \beta \to \infty$ i b = $\beta(\alpha+\beta)$ **Gamma**.
$\Rightarrow$ a = 1 i b = 1 **Beta biparamètrica**.

Gamma Generalitzada
$\Rightarrow$ a = 1 **Gamma** $\Rightarrow \alpha$ =1 **Exponencial**.
$\Rightarrow \beta^a = \sigma^2 a^2$ i $\alpha = ((a\mu + 1) / \beta^a)$ **Log-Normal.**
$\Rightarrow \alpha$ = 1 **Welbull**.

Per altra banda d'altres models, que no es deriven de l'arbre anterior, també s'han

[20] McDonald J.B.,"Some generalized functions for the size distribution of income", Econometrica, vol. 52, núm. 3, pàgs. 647-663, 1984.
McDonald J.B.,"Regression Models for positive random variables", Journal of Econometrics, vol. 43, núm. 1/2, 1990.

considerat interessants: Pareto, Pareto desplaçada a l'origen, Uniforme, Log-logística, Zipf,...

Així doncs, les corbes de concentració que ara es presenten s'han calculat a partir de les funcions teòriques abans esmentades que per la seva aplicació en el context de la distribució de magnituds econòmiques les fan especialment ressenyables. Més endavant s'analitzarà quina d'elles s'adequa millor a les dades de la variable de caire econòmic que s'estudia.

Les funcions de concentració que a continuació es presentaran compleixen totes les propietats necessàries per considerar-les com a tals, qüestió que ja es donarà per entesa en tots els casos.

2.2. DISTRIBUCIÓ BETA

La seva utilitat radica en representar variables físiques amb valors que es troben en un interval d'amplada finita i per trobar certes quantitats que es coneixen -com límits de tolerància- sense la necessitat d'una hipòtesi de distribució normal.

La distribució Beta que aquí s'estudia és el cas particular de la distribució B Generalitzada en què a = 1 i b = 1:

Figura 2-2

de tal manera que es redueix la distribució a dos paràmetres per obtenir una major operativitat.

Considerada com a model descriptiu de distribucions de caire econòmic, diferents autors s'han interessat per aquest model, bé sigui amb quatre paràmetres (B Generalitzada) o amb tres paràmetres (B de 1r ordre i B de 2n ordre), en estudis comparatius de diferents models teòrics de distribucions. Entre ells cal destacar els treballs efectuats per L. Thurow (1970)[21], N. Johnson i S. Kotz (1970)[22], D. Cronin (1979)[23], J. McDonald i M. Ramson (1984)[24] i J. McDonald i R. Butler (1990)[25]

La funció de densitat biparamètrica serà:

Figura 2-3

Amb una esperança matemàtica:

Figura 2-4

i una funció de distribució:

[21] Thurow, L.,"Analyzing the American Income Distribution", American Economics Association, núm. 60, pàgs. 261-269, 1970.
[22] Johnson, N. i Kotz, S.," Continuous Univariate Distributions", New York: John Wiley and Sons, 1970.
[23] Cronin, D.,"A Function for the Size Distribution of Income", Econometrica, vol. 47, pàgs. 773-774, 1979.
[24] McDonald, J. i Ramson, M., "Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution of Income", Econometrica, vol. 47, pàgs. 1513-1526, 1984.
[25] McDonald, J. i Butler, R.,"Regression models for positive random variables", Journal of Econometrics, vol. 43, pàgs. 227-251, 1990.

Figura 2-5

Així, la funció de concentració es trobarà mitjançant una composició de funcions,

Figura 2-6

Amb l'intent d'analitzar algunes característiques de la corba s'arriba a les següents conclusions:

2.1.1. "Màxim" en la corba

La màxima discrepància, doncs, entre la corba i la renda igualitària serà, coincidint amb l'índex de Pietra,

Figura 2-7

2.2.2. Simetria de la corba

La corba serà simètrica si ho és la funció de densitat que l'ha generat, que en aquest cas serà quan $\alpha = \beta$.

2.2.3. Elasticitat de la corba

Tal com ja s'ha indicat, una de les característiques que pren la corba de la funció de densitat de la qual deriva, és l'elasticitat constant. Per al model B l'elasticitat és no constant[26] ,

Figura 2-8

i per tant, la corba de concentració també.

2.3. DISTRIBUCIÓ BETA UNIPARAMÈTRICA

Aquesta distribució és un cas particular de l'anterior i és util en l'especificació de paràmetres teòrics com percentatges o proporcions poblacionals.

La funció que s'hi deriva ha estat utilitzada per J. Baró[27] en estudis referents a la concentració de la renda.

La funció de densitat d'aquesta distribució és:

Figura 2-9

i la funció d'acumulació de probabilitat:

Figura 2-10

---

[26] McDonald J.B.,"Some generalized functions for the size distribution of income", Econometrica, vol. 52, núm. 3, pàgs. 647-663, 1984.
[27] Baró, J. i Torrelles, E.,"Sobre las medidas de concentración", Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, Universitat de Barcelona, març 1989.

Per tant, la funció de concentració calculada a partir de la funció inversa serà:

Figura 2-11

2.3.1. "Màxim" en la corba

La màxima discrepància entre la corba i la bisectriu es troba quan x = (K / K+1) i per tant el valor d'aquesta diferència és:

Figura 2-12

valor que depèn del paràmetre K. De manera que si K = 1 la diferència és 1/4, si K = 2 la diferència és 4/27, resultats similars, com veurem, a la Distribució de Pareto.

2.3.2. Simetria de la corba

La funció de concentració aquí obtinguda, serà simètrica respecte la recta perpendicular a la recta igualitària si K= ∞, és a dir:

Figura 2-13

Evidentment amb aquesta particularització la corba s'ha convertit en la pròpia recta igualitària.

2.3.3. Elasticitat de la corba

L'elasticitat de la corba és constant per una K definida. Al mateix temps l'elasticitat de la funció de densitat de la variable aleatòria també serà constant.

Figura 2-14

Pels valors extrems del paràmetre K, l'elasticitat val:

Figura 2-15

Per valors molt petits del paràmetre K, una variació en la funció acumulació de probabilitat produeix una variació major en la funció de concentració, i, per valors molt grans del paràmetre, la corba varia en una proporció similar.

2.4. DISTRIBUCIÓ LOG-LOGÍSTICA

És una distribució dotada d'alta significació econòmica. Va ser estudiada per C. Dagum (1977 i 1980)[28] a partir d'especificacions basades en el comportament empíric de la distribució de l'ingrés, i per S. Singh i G. Maddala (1976)[29] entre d'altres, encara que va ser

[28] Dagum, C.," El modelo log-logístico y la distribución del ingreso en Argentina", Trimestre económico, núm. 176, pàgs. 837-864, 1977.
Dagum, C.,"Inequality Measures Between Income Distributions with applications", Econometrica, vol. 48, pàgs. 1791-1803, 1980.
[29] Singh, S. i Maddala, G.,"A Function for size Distribution of Incomes ", Econometrica, vol. 44, pàgs. 963-970, 1976.

proposada originàriament per P. Fisk (1961)[30].

La funció de densitat, la funció de distribució i l'esperança matemàtica són:

Figura 2-16

Mitjançant les quals s'obtè la funció de concentració:

Figura 2-17

expressió que es correspon amb la ratio de la funció B de dos paràmetres. Si s'analitzen les característiques que fins ara s'han tractat, s'arriba a expressions poc operatives pel que fa a l'índex de Pietra. A més, la corba no és simètrica i no presenta elasticitat constant.

2.5. DISTRIBUCIÓ GAMMA

La distribució Gamma Generalitzada esdevé de la distribució Beta Generalitzada quan un dels seus paràmetres, β, tendeix a infinit. Per qüestions de simplicitat i de major aplicació econòmica s'estudia el cas particular quan el paràmetre a de la distribució Gamma Generalitzada val 1.

La distribució Gamma Simple s'adapta molt bé a l'estudi dels ingressos i va ser utilitzada com a model de distribució de rendes per A. Salem i T. Mount (1974)[31], els quals van efectuar alhora comparacions amb la distribució log-normal. Altres autors com J. McDonald i B. Jensen (1979)[32] i J. McDonald i M. Ransom (1979)[33] tenen estudis basats en aquesta distribució.

La funció de densitat i l'esperança matemàtica són:

Figura 2-18

Tenint en compte que $\Gamma(\alpha)$ és la funció Gamma d'Euler,

Figura 2-19

Així, la funció de concentració derivada d'aquesta distribució es calcula mitjançant una composició de funcions:

Figura 2-20

Un cas particular serà la corba que resulta d'efectuar els següents canvis: $\alpha = 1/2$, p= n/2 i n>0 o enter, és a dir, la corba derivada de la Distribució Khi-quadrat:

[30] Fisk, P.," The graduation of Income Distributions", Econometrica,vol. 29, pàgs. 171-185, 1961.
[31] Salem, A. i Mount, T.,"A convenient descriptive model of income distribution: The gamma density", Econometrica, vol. 42, pàgs. 1115-1127, 1974.
[32] McDonald, J. i Jensen, B.,"An Analysis of Estimators of Alternative Measures of Income Inequality Associated with the Gamma Distribution Function", Journal of American Statistical Association, núm. 74, pàgs. 856-860, 1979.
[33] McDonald, J. i Ransom, M.,"Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution on Income", Econometrica, vol. 47, pàgs. 1513-1526, 1979.

Figura 2-21

distribució que en l'estudi de la concentració de variables de caire econòmic no ha estat revalidada, ja sigui per mala adherència a dades empíriques, o perquè la funció resulta inoperant.

2.6. DISTRIBUCIÓ EXPONENCIAL

Un altre cas particular, derivat de la distribució Gamma bi-paramètrica, es presenta quan α=1, obtenint la distribució Exponencial.

És útil en estudis de fenòmens d'espera i l'han aplicat, encara que rarament, en el camp de la concentració i més en concret J. Steindl (1965)[34], el qual va dissenyar un model que seguia l'esquema d'aquesta funció en processos estocàstics per al creixement de les empreses, i M. Gail i J. Gastwirth (1978)[35], en estudiar la bondat de l'ajustament d'algunes corbes de concentració.

La seva funció de densitat serà, doncs:

Figura 2-22

Per tant, la funció d'acumulació de probabilitat serà la funció de distribució:

Figura 2-23

i l'esperança matemàtica és coneguda:

Figura 2-24

La funció de concentració, en aquest cas, s'ha obtingut mitjançant la funció inversa. Així:

Figura 2-25

2.6.1. "Màxim" en la corba

La màxima diferència entre la corba de Lorenz i la recta igualitària es produeix quan la diferència entre $F_\xi(x)$ i $q_\xi(x)$ és màxima, és a dir, quan x= 1/h.

Figura 2-26

El valor que pren la màxima distància entre la corba de Lorenz i la recta igualitària s'obté per x= 1/h = μ:

Figura 2-27

Obtenint un valor que és independent del paràmetre *h*

[34] Steindl, J.,"Random Process and the growth of Firms", Griffin, 1965.
[35] Gail, M. i Gastwirth, J.,"A Scale-free Goodness-of-Fit Test for the Exponencial Distribution Based on the Lorenz Curve", J.A.S.A., núm. 73, pàgs. 787-793, 1978.

2.6.2. Simetria de la corba

L'estudi de la simetria de la funció de concentració de la variable exponencial respecte de la bisectriu secundària indica que no és simètrica ja que per serho, segons Esteban, p_μ= 1/2 i en aquest cas p_μ= 1- (1/e) (cal remarcar que la distribució Exponencial tampoc és simètrica.)

2.6.3. Elasticitat de la corba

Fàcilment es comprova que l'elasticitat de la corba per una variable aleatòria exponencial no és constant $\forall$p:

Figura 2-28

És a dir, per valors de p pròxims a 1, la corba varia més que proporcionalment davant variacions de p i per valors propers a 0 la variació és menor.

2.6.4. Llei exponencial desplaçada

Generalitzant la llei exponencial es pot aconseguir la llei exponencial desplaçada, efectuant un canvi d'origen del domini de la variable,

Figura 2-29

Efectuant el mateix procés que s'ha efectuat per a la llei exponencial, es calcula la nova corba de concentració:

Figura 2-30

la qual presenta les mateixes característiques quant a simetria i elasticitat que l'anterior.

2.7. DISTRIBUCIÓ DE WEILBULL

Partint novament de la distribució Gamma Generalitzada i fixant la restricció α=1 s'obté la distribució de Weilbull o de Log-Gompertz:

Figura 2-31

I a més si a =1 s'obté novament la distribució exponencial.

S'ha utilitzat rarament en distribucions de grandària com és el cas de C. Bartels (1977)[36] sense molt d'èxit.

La funció de distribució i esperança matemàtica són respectivament:

Figura 2-32

La funció de concentració s'obté pel camí de la composició de funcions:

[36] Bartels, C.,"Economic Aspects of regional Welfare: Income distribution and enemployment", Mart. Nijhoff, 1977.

Figura 2-33

Un cas particular d'aquesta distribució és quan a= 2 i $\beta = \sqrt{2}\sigma$, que coincideix amb la distribució de Rayleigh:

Figura 2-34

2.7.1. Simetria i Elasticitat de la corba

Cal dir que no és una corba simètrica respecte a la recta q= 1-p (tal com succeeix amb la corba derivada de la distribució Gamma) i respecte a l'elasticitat que no és constant (pel mateix motiu).

2.8. DISTRIBUCIÓ LOG-NORMAL

És una distribució també derivada de la distribució Gamma Generalitzada que s'adapta molt bé com a model descriptiu de variables de grandària amb caire econòmic, sobretot si presenten una distribució positivament asimètrica. Si aquesta distribució es trunca fins al valor de la Moda resulta una distribució que en un interval molt gran és similar a la distribució de Pareto.

Autors com J.Aitchison i J. Brown (1957)[37], A. Salem i T. Mount (1974)[38], J. McDonald i M. Ransom (1979)[39], S. Singh i G. Maddala (1976)[40] i J. McDonald i R. Butler (1990)[41], l'han utilitzat com a model per a la distribució de la renda efectuant comparacions amb d'altres funcions.

Seguint amb el mateix procediment realitzat en les anteriors distribucions, a partir de la funció de densitat, distribució i esperança matemàtica de la variable s'arriba a aconseguir la funció de concentració pel mètode de composició de funcions:

Figura 2-35

2.8.1. Simetria i Elasticitat de la corba

Donada la naturalesa asimètrica de la densitat, la corba manté aquesta propietat.

I com que la distribució Log-Normal és un cas particular de la distribució Gamma Generalitzada, la qual no presenta elasticitat constant, la corba de concentració tampoc.

[37] Aitchison, J. i Brown, J.,"The Lognormal Distribution with Special Reference to its Uses in Economics", Cambridge University Press, 1957.
[38] Salem, A. i Mount, T., "A convenient descriptive model of income distribution: The gamma density", Econometrica, vol. 42, pàgs. 1115-1127, 1974.
[39] McDonald, J. i Ransom, M.,"Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution of Income", Econometrica, vol. 47, pàgs. 1513-1526, 1979.
[40] Singh, S. i Maddala, G.,"A Function for size Distribution of Incomes", Econometrica, vol. 44, núm. 5,pàgs. 963-970, 1976.
[41] McDonald, J. i Butler, R.,"Regression models for positive random variables", Jounal of Econometrics, vol. 43, pàgs. 225-251, 1990.

2.9. DISTRIBUCIÓ DE PARETO

V. Pareto (1896)[42] va deduir el seu model partint d'investigacions empíriques truncades a l'esquerra i en concret d'estadístiques fiscals (sense comptar amb els contribuents amb ingressos menors al mínim no imposable).

Es tracta, doncs, d'una distribució que s'adapta bé a algunes magnituds de grandària: rendes, capitals, •••a partir d'un determinat valor mínim.

Tots els autors que han estudiat aquesta distribució, coincideixen a afirmar que es tracta d'un model vàlid per a valors prou grans de la variable. Així ho han fet H.T. Davis (1941)[43], B. Mandelbrot (1960)[44], E.C. Budd (1970)[45], entre d'altres.

La seva funció de densitat es defineix com:

Figura 2-36

Obtenint la següent funció d'acumulació de probabilitat:

Figura 2-37

amb una esperança matemàtica:

Figura 2-38

La corba de Lorenz s'obté mitjançant la funció inversa:

Figura 2-39

2.9.1 "Màxim" en la corba

La màxima diferència entre la corba i la recta igualitària es produeix quan:

Figura 2-40

Resultant un valor que depèn del paràmetre α que, per als valors més habituals en estudis de distribució és:

Figura 2-41

2.9.2. Simetria de la corba

Si s'analitza la simetria des de qualsevol dels punts de vista estudiats en el capítol 1 es detecta que la funció no és simètrica respecte a la bisectriu secundària.

---

[42] Pareto, V.,"Ecrits sur la courbe de la répartition de la richesse", Librairie Droz, 1896.
[43] Davis, H.T.,"The Analysis of Economic Time Series", Bloomington, Indiana, The Principia Press, 1941.
[44] Mandelbrot, B.,"The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income", International Economic Review, núm. 1, pàgs. 79-106, 1960.
[45] Budd, E.C.,"Distribution Issues: Trends and Policies. Postwar Changes in the Size Distribution of Income in the U.S.", American Economic Review, núm. 60, pàgs. 247-260, 1970.

2.9.3. Elasticitat de la funció

L'elasticitat de la funció de concentració per una variable aleatòria que segueix la llei de Pareto no és constant:

Figura 2-42

Per valors de *p* pròxims a 1 la corba variarà de manera més que proporcional davant variacions de *p*.

Rasche, Gaffney, Koo i Obst[46] proposen una corba de concentració alternativa a la proposada per Kakwani i Podder,

Figura 2-43

De manera que si β=1 i $\alpha < 1$ s'obté la corba de concentració derivada de la Distribució de Pareto.

2.9.4. Pareto desplaçada a l'origen

Altrament anomenada Distribució de Lomax, ha estat escassament emprada pels economistes, tret de M. Gail i J. Gastwirth (1978)[47]. Es pot obtenir a partir de la distribució B de 2n ordre, assignant als paràmetres α i a el valor 1[48].

La funció de densitat és:

Figura 2-44

i la funció de distribució:

Figura 2-45

Obtenint la funció de concentració,

Figura 2-46

2.10. DISTRIBUCIÓ DE ZIPF

Pertany a la mateixa família de funcions que la llei de Pareto, de manera que el paràmetre a es converteix en 1/b i el paràmetre a en K. Ha estat sovint utilitzada en l'estudi de la concentració de poblacions en els municipis[49].

---

[46] Rasche, R., Gaffney,J., Koo, A. i Obst, N.,"Functional forms for estimating the Lorenz curve", Econometrica, vol. 48, pàgs. 1061-1062, 1980.

[47] Gail, M. i Gastwirth, J.,"A Scale-free Goodness-of-Fit Test for the Exponencial Distribution Based on the Lorenz Curve", J.A.S.A., vol. 73, pàgs. 787-793, 1978.

[48] McDonald, J. i Butler, R.,"Regression models for positive random variables, Journal of Econometrics, vol. 43, pàgs. 225-251, 1990.

[49] Baró, J. i Torrelles, E.,"Sobre las medidas de concentración", Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, Universitat de Barcelona, març 1989.

La funció de densitat d'una variable aleatòria que segueix una llei de Zipf és:

Figura 2-47

la funció d'acumulació de probabilitat:

Figura 2-48

i l'esperança matemàtica:

Figura 2-49

La funció de concentració es calcula a partir de la funció inversa:

Figura 2-50

La màxima discrepància entre la corba i la bisectriu secundària es produeix quan x= K/(1-b) i el valor que pren aquesta diferència és:

Figura 2-51

s'obtenen els mateixos resultats que per la distribució de Pareto.

2.10.1. Simetria de la corba

No és simètrica la corba respecte a la bisectriu secundària. Només ho és quan el paràmetre b és igual a 0, valor per al qual aquest paràmetre no té sentit en la corba ja que el seu domini definit és $0 < b \leq 1$.

2.10.2. Elasticitat de la corba

La corba tindrà elasticitat constant només quan el paràmetre q val 1, és a dir, quan q(p)=p:

Figura 2-52

els resultats coincideixen amb la corba de concentració derivada de la distribució de Pareto.

2.11. LA DISTRIBUCIÓ UNIFORME

És una distribució amb aplicacions en situacions de total incertesa en les quals es vulgui assumir una densitat amb mínim risc. També s'aplica en estadística no paramètrica i en l'anàlisi de simulacions.

La funció de densitat és la següent:

Figura 2-53

I per tant, la funció d'acumulació de probabilitat:

Figura 2-54

amb una esperança matemàtica coneguda,

Figura 2-55

La funció de concentració, doncs, s'obtindrà:

Figura 2-56

2.11.1. "Màxim" en la corba

La màxima diferència entre q(p) i la recta igualitària es troba quan $p_{\mu}= F_{\xi}((a+b)/2)= 1/2$, i el valor d'aquesta discrepància:

Figura 2-57

De manera que si a=0 i b=1, qüestió molt habitual en especificacions apriorístiques de la probabilitat p en processos Bayessians, el valor és 1/4

2.11.2. Simetria de la corba

Estudiant la simetria tenint en compte que hauria de satisfer-se:

Figura 2-58

resulta obvi que sí es compleix per a la corba de concentració deduïda d'una llei uniforme.

Amb el canvi de coordinades suggerit en el capítol anterior s'arriba a la mateixa conclusió:

Figura 2-59

2.11.3. Elasticitat de la corba

L'elasticitat serà:

Figura 2-60

Per a=0 i b=1, cas habitual d'algunes especificacions apriorístiques, l'elasticitat serà constant i valdrà:

$$\epsilon_{q(p)}= 2$$

I per tant, enfront de variacions de p, la corba varia sempre amb la mateixa intensitat.

CAPÍTOL 3. ALTRES CORBES DE CONCENTRACIÓ

3.1. INTRODUCCIÓ

En aquest capítol s'estudiaran les corbes de Lorenz proposades per diferents autors que no s'han calculat a partir de densitats conegudes.

Malgrat desconèixer la densitat de la variable aleatòria, aquesta es pot calcular[50],

Figura 3-1

Així el domini de la variable aleatòria serà:

Figura 3-2

El càlcul de la densitat es realitzarà en aquelles corbes de Lorenz proposades en les quals sigui operatiu el càlcul.

3.2. CORBA PROPOSADA PER GUPTA

L'autor[51] proposa una corba de concentració que compleix totes les propietats per a serho, però no deriva de cap densitat coneguda:

Figura 3-3

Analitzant les propietats,

Figura 3-4

3.2.1. "Màxim" en la corba

El valor que pren la màxima discrepància:

Figura 3-5

3.2.2. Simetria de la corba

Analitzant la simetria de la corba des dels punts de vista estudiats es veu que no és simètrica.

3.2.3. Elasticitat de la corba

L'elasticitat és no constant, depèn de la funció d'acumulació de probabilitat:

Figura 3-6

---

[50] Calot, G.,"Curso de Estadística Descriptiva",(versió castellà), Ed. Paraninfo, 1970.
[51] Gupta, M.R.,"Functional Form for estimating the Lorenz curve", Econometrica, vol. 52, núm. 5, pàgs.1313-1314, 1984.

En els punts extrems l'elasticitat pren els valors:

Figura 3-7

Per valors propers de p al valor 1 la corba varia més que proporcionalment enfront de les variacions de p i en funció del paràmetre K.

3.3. CORBES PROPOSADES PER KAKWANI

Kakwani i Podder (1973)[52] van proposar una funció que compleix les propietats per a ser una corba de concentració:

Figura 3-8

Analitzant les propietats:

Figura 3-9

L'any 1980 Kakwani[53] introdueix una nova funció en la línia de l'anterior:

Figura 3-10

essent A, α i β paràmetres que determinen mesures de concentració en el repartiment. J. Baró[54], després d'assajar diferents funcions que s'adaptessin als ingressos familiars a Espanya durant els anys 1964-87, opta per aquesta funció.

R.L. Basman...,[55] proposen una generalització a la primera corba:

Figura 3-11

de manera que si es particularitza es van obtenint diferents corbes:

Figura 3-12

3.3.1. "Màxim" en la corba

La màxima discrepància entre la corba i la recta q = 1-p és:

Figura 3-13

3.3.2. Simetria de la corba

No és una corba simètrica respecte a la recta perpendicular a la recta igualitària, tal

[52] Kakwani, N.C. i Podder, N.,"On the estimation of Lorenz curves from grouped observations", International Economic Review, núm. 14, pàgs. 278-291, 1973.

[53] Kakwani, N.C.,"On a class of Poverty Measure", Econometrica, vol. 48, núm. 4, pàgs. 437-446, 1980. Kakwani, N.C.,"Issues in measuring poverty", Advances in Econometrics, vol. 3, pàgs. 253-282, 1979.

[54] Baró, J.,"Aplicaciones del modelo de concentración de Kakwani al análisis de la distribución de la Renta", Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, Universitat de Barcelona, març 1991.

[55] Basman, R.L.,"A General Functional Form for approximating the Lorenz curve", Journal of Econometrics, vol. 43, núm. 1/2, pàgs. 77-90, 1990.

com es dedueix analitzant les igualtats estudiades en el capítol anterior.

3.3.3. Elasticitat de la corba

No és constant ja que depèn de la funció acumulació de probabilitat:

Figura 3-14

N.C. Kakwani i N. Podder proposen l'any 1976[56] una corba de concentració amb un sistema de coordenades diferent a l'emprat fins ara.

Pretenen obtenir una corba que s'adeqüi a les dades reals (en la publicació, la variable estudiada és l'ingrés), ja que la funció de densitat de la distribució no es coneix. Mitjançant aquesta corba de concentració es pot obtenir la funció de densitat de la variable subjacent en la mateixa corba.

El canvi de coordenades proposat és:

Figura 3-15

La funció de densitat subjacent es calcula:

Figura 3-16

La proposta en concret de funció de concentració amb les noves coordenades és:

Figura 3-17

3.4. CORBES DE LORENZ QUADRÀTIQUES

3.4.1. Tipus de corbes quadràtiques

Partint d'una forma quadràtica[57] del tipus:

Figura 3-18

es tracta d'analitzar si pot ajustar-se a una corba de Lorenz. Per això es fa necessari obtenir una funció q que sigui funció de p (prenent q com la funció de concentració i p com la funció d'acumulació de probabilitat), i, a més, que aquesta compleixi les propietats d'una corba de concentració. Es dedueix que no pot ser-ho ja que la segona derivada de q respecte de p val zero.

Així, continuant amb aquesta línia de recerca, afegim a la forma anterior un altre membre, obtenint:

Figura 3-19

[56] Kakwani, N.C. i Podder, N.," Efficient estimation of the Lorenz curve and associated inequality measures from grouped observations", Econometrica, vol. 44, pàgs. 137-149, 1976.
[57] Villasenor, J.A. i Arnold, B.C., "Elliptical Lorenz curves", Journal of Econometrics, núm. 40, pàgs. 327-338, 1989.

A més, seran necessàries les restriccions en els paràmetres per assolir les propietats de la corba. Aquesta tasca resulta molt enutjosa i llarga i es poden presentar diferents alternatives, per la qual cosa les restriccions següents faran que la corba sigui una corba de concentració el.líptica.

L'estudi d'aquesta nova forma quadràtica porta a les següents conclusions:

a) Considerant el paràmetre c=0, no obtenim cap corba de Lorenz ja que s'arriba a la mateixa problemàtica anterior.

b) Considerant el paràmetre c≠0, i el cas més adequat és c=1, la possible corba de concentració seria:

Figura 3-20

S'ha considerat el valor negatiu de l'arrel ja que és el més indicat per obtenir les conclusions a les quals es vol arribar.

Perquè la funció quadràtica sigui una funció de concentració serà necessari que passi pels punts (0,0) i (1,1) i per això cal que 1+b+a+d=0.

A més, seran necessàries les següents restriccions en les paràmetres per assolir les propietats de la corba:

Figura 3-21

restriccions que faran de la corba una veritable funció de concentració.

Si a la forma quadràtica del començament, hi afegim un membre diferent a l'anterior s'obté la forma quadràtica:

Figura 3-22

i les següents conclusions:

a) Suposant c=0, la funció és:

Figura 3-23

que passarà pels punts (0,0) i (1,1) si e = -a-b, i prenent els paràmetres les restriccions:

Figura 3-24

s'obté una nova corba de concentració.

b) Suposant c=1, la funció a estudiar serà:

Figura 3-25

que passarà pels punts (0,0) i (1,1) si e = -a-b-1, i serà una funció de concentració si els paràmetres prenen els valors:

Figura 3-26

Un cop analitzades aquestes formes quadràtiques se n'analitza una de més general que engloba tots els paràmetres ja estudiats:

Figura 3-27

Com en els casos anteriors, si suposem c=0, la funció q serà:

Figura 3-28

i, en concret, el tram de funció serà aquell que passi pels punts (0,0) i (1,1) per la qual cosa es farà necessari que e = -a-b-d.

Complirà les propietats d'una corba de Lorenz si:

Figura 3-29

De manera que, continuant amb el mateix raonament, per a ser una corba de concentració:

Figura 3-30

per complir les propietats desitjades.

3.4.2. Càlcul de les densitats derivades de les formes quadràtiques

Donat que el càlcul de les densitats de les formes quadràtiques que són corbes de concentració és molt complicat i no s'arriba a resultats concrets s'analitzen casos particulars.

1 De la corba:

Figura 3-31

La funció d'acumulació de probabilitat (calculada segons s'ha indicat al començament) serà:

Figura 3-32

que correspon a una densitat Uniforme.

2 Partint de la corba quadràtica més general i suposant a=b=0 i c=1:

Figura 3-33

3 Continuant amb la mateixa corba però suposant d=b=0 i c=1:

Figura 3-34

4 Si la corba és:

Figura 3-35

5 Tornant a la corba quadràtica més general i considerant b^2-4a=0, s'obté:

Figura 3-36

3.4.3. Màxim en les corbes quadràtiques particulars

El valor que pren la màxima diferència entre la funció d'acumulació de probabilitat (p) i la corba de concentració (q(p)) on aquesta última presenta un màxim i seguint amb el mateix ordre de deducció de les corbes quadràtiques particulars, serà per a cada una d'elles:

Figura 3-37

3.4.4. Simetria i elasticitat de les corbes quadràtiques particulars

Segons l'estudi de la simetria i elasticitat de la corba de concentració ja presentat en capítols anteriors s'arriba a la conclusió que cap de les corbes quadràtiques particulars no és simètrica i, a més, cap presenta una elasticitat constant llevat de la primera corba de concentració particular, elasticitat que, en aquest cas, és igual a 2.

CAPÍTOL 4. MESURES DE CONCENTRACIÓ

4.1. INTRODUCCIÓ

Existeixen una gran quantitat d'índexs capaços d'avaluar la desigualtat d'una variable econòmica i no tots ofereixen la mateixa quantificació, sinó que, en alguns casos, presenten resultats oposats. És per aquest motiu que s'ha intentat buscar una sèrie de propietats per poder axiomatitzar els índexs i saber quin triar a l'hora de mesurar la concentració, en funció de la naturalesa i els objectius de la investigació empírica.

Entre la gran varietat de propietats es pot distingir[58]:

a.- Aquelles compatibles amb el criteri de Lorenz[59] segons el qual,

Figura 4-1

- Són sensibles davant transferències en la pròpia distribució. (Principi de transferències de Pigou-Dalton).

- Si una distribució és permutació d'una altra, els índexs coincideixen. (Condició de simetria).

- Són exhaustius que aprofiten totes les observacions efectuades, encara que a vegades interessa analitzar una part de la distribució i/o prescindir de dades estadísticament no representatives.

- Han de permetre comparacions en el temps i en l'espai. Les mesures absolutes no ho permeten però si les relatives les quals s'expressen en unitats abstractes i són invariables davant canvis d'escala.

Cal remarcar que si es volen comparar distribucions és necessari que les corbes de Lorenz no tinguin cap intersecció.

b.- Propietats ordinals normatives, marcades per Atkinson (1970) i Kolm (1976)[60],

- Principi de decreixement de l'impacte de transferències regressives.
- Homoteticitat distributiva.

Propietats que no es tracten en profunditat, ja que com s'ha indicat en capítols anteriors, interessa el càlcul de la desigualtat des del punt de vista quantitatiu i no normatiu.

En definitiva, l'indicador ha de ser senzill, de càlcul ràpid i de fàcil interpretació,

---

[58] Champernowne, D.G., "A comparison of measures of inequality of income distribution", The Economic Journal, núm. 84, vol. 2, pàgs. 787-816, desembre 1974.
[59] RuízCastillo, J.,"Problemas conceptuales en la medición de la desigualdad", Hacienda Pública Española, núm. 101, pàgs. 17-31, 1986.
[60] Atkinson, A.,"On the measurement of inequality", Journal of Economic Theory, vol. 2, pàgs. 244-263, 1970.
Kolm, S.,"Unequal inequalities", Journal of Economic Theory, vol. 12 i 13, pàgs. 416-442 i 82-111, 1976.
Ruiz-Castillo, J.,"La medición de la pobreza y de la desigualdad en España, 1980-81", Banco de España, Servicio de Estudios Económicos, núm. 42, pàgs. 60-99, 1987.

entenent que no variï davant una situació aïllada i ha de ser continu i diferenciable, és a dir, canviant en el mateix sentit i direcció que ho fa el fet econòmic.

Per tant, com que la concentració, la qual indica el grau de desigualtat en el repartiment de la variable entre els individus, s'interpreta de manera fàcil i ràpida utilitzant la corba de Lorenz, qualsevol expressió que utilitzi la superfície entre la recta igualitària i la corba indicarà la concentració de la variable. És a dir, la distància existent entre la recta igualitària i la funció de concentració serà una mesura de la concentració.

La primera distància a estudiar serà la "màxima", que tal com ja s'ha vist en el capítol 1, serà quan el pendent de la corba de concentració valgui 1.

Altres distàncies d'interès seran[61]:

Figura 4-2

entenent que:

p (Ml) és l'acumulació de probabilitat quan la funció de concentració val 0,5,

q (p(Mi)) és el valor que pren la funció de concentració quan l'acumulació de probabilitat és 0,5,

q ($p(Q_1)$) i q ($p(Q_3)$) és, respectivament, el valor que pren la funció de concentració quan l'acumulació de probabilitat val 0,25 i 0,75.

La distància representada per ð indica el doble del promig de les distàncies que separen les funcions de distribució i la massa de variable en el primer i en el tercer quartil:

Figura 4-3

La representació gràfica de les dues distàncies anteriors és:

Figura 4-4

Figura 4-5

I per últim l'índex de Gini, sobre el qual es parlarà extensament a continuació, que s'expressa com el doble existent entre la línia d'equidistribució i la corba de concentració,

Figura 4-6

4.2. FORMES ALTERNATIVES DE L'ÍNDEX DE GINI

És un indicador molt adequat per mesurar la superfície que separa la recta d'equidistribució de la corba, ja que proporciona un promig de totes les distàncies existents entre tots els punts de la recta i la corba.

A més a més, la seva senzillesa de càlcul i la varietat d'interpretacions que se'n deriva,

[61] Baró, J.,"Distribución personal de la renta. Medidas y leyes de desigualdad", Tesis Doctoral, Fac. CC.EE., Barcelona, pàgs. 207-213, 1982.

fan de l'índex un dels instruments més emprats.

Moltes són les opinions respecte a l'índex. Així aquells autors que estan a favor del seu ús indiquen que:

- és independent de la funció de concentració i de les unitats triades,

- és sensible davant transferències en la pròpia distribució,

- és simple i neutral.

Per altra banda, els seus detractors opinen que:

- medeix límits ficticis ja que la recta i la corba són fronteres utòpiques,

- és inestable si s'utilitzen poques dades,

- pot oferir el mateix grau de concentració si es comparen corbes que indiquen situacions diferents si es tallen en un punt.

Deixant de cantó totes aquestes opinions, la corba de Lorenz és encara la millor representació gràfica de la desigualtat de les variables de tipus econòmic, i l'índex de Gini és el més popular dels índexs de desigualtat.

Tradicionalment l'índex es defineix com el doble de l'àrea compresa entre la corba i la recta igualitària:

Figura 4-7

Ara bé, aquest índex pot pendre diferents formes i diferents interpretacions com veurem a continuació.

4.2.1. En funció de q

Índex que està en funció del valor mig de la massa acumulada de variable. Gràficament l'àrea de concentració serà:

Figura 4-8

El doble de l'àrea, doncs, és:

Figura 4-9

4.2.2. En funció de la distància mínima existent entre la recta igualitària i la corba

Una altra interpretació considerant la discrepància entre la corba i la recta igualitària.

Figura 4-10

seria el doble del valor mig de la discrepància, o bé, √8 vegades el valor mig de la distància mínima. De forma gràfica:

Figura 4-11

4.2.3. En funció dels triangles que s'inscriuen dins la corba i la recta igualitària

Per una altra banda, si l'àrea del triangle que s'inscriu dins la corba (és a dir, el format per la línia igualitària amb vèrtex (q(p), p)) és:

Figura 4-12

L'índex serà[62]el quàdruple del valor mig de l'àrea dels triangles inscrits dins la corba amb vèrtex en cada punt de la mateixa corba.

4.2.4. L'índex com la desviació mitja relativa ponderada

Aquesta nova forma d'interpretar l'índex es deu als autors Sen (1973) i Mehran (1976), els quals parteixen de la definició originària de l'índex (el doble de l'àrea compresa entre la corba de concentració i la recta igualitària)[63],

Figura 4-13

interpretant l'índex com la desviació mitja relativa ponderada amb 2p,

Figura 4-14

4.2.5. L'índex com la meitat de la diferència mitja relativa

Kendall i Stuart (1963)[64] i Gastwirth (1972)[65] presenten una nova forma de l'índex demostrant que aquest és la meitat de la diferència mitja relativa:

Figura 4-15

Considerant l'índex com el doble de l'àrea:
Figura 4-16

A partir d'aquí, Kendall i Stuart (1963)[66] continuen:

---

[62] Esteban, J.M.,"Algunos resultados sobre la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini", Cuadernos de Economía, núm. 22, pàgs. 191-224, 1980.
[63] Sen, A.,"On Economic Inequality", Oxford University Press. London, 1973.
Mehran, F.,"Linear Measures of Income Inequality", Econometrica, vol. 44, pàgs.805-809, 1976.
Gastwirth, J.L.,"A general definition of the Lorenz curve", Econometrica, vol. 39, pàgs. 1037-1039, 1971.
[64] Kendall, M. i Stuart, A.,"The advanced Theory of Statistics", vol. 1, C. Griffin, London, 1963.
[65] Gastwirth, J.,"The estimation of the Lorenz Curve and Gini Index", Review of Economics and Statistics, vol. 54, pàgs. 306-316, 1972.
Yitzhaki, S. "On an extension of the Gini inequality index", International Economic Review, vol. 24, pàgs. 617-628, 1983.
[66] Kendall, M.G. i Stuart, A.,"The advancend Theory of Statistics", vol. 1, C. Griffin, London, 1963.

Figura 4-17

4.2.6. L'índex en termes d'una nova funció.

D. Zagier (1983)[67] introdueix una nova expressió de l'índex en termes d'una nova funció $\xi(t)$ definida com:

Figura 4-18

4.3. L'ÍNDEX DE GINI D'UNA DISTRIBUCIÓ TRUNCADA

En estudiar la concentració de la distribució quan la variable es trunca en dos nous extrems, $\omega_1 < \xi_T \leq \omega_2$, l'àrea de concentració passarà a ser:

(nova àrea de concentració)

Figura 4-19

De manera que si:

Figura 4-20

Si els truncaments són unilaterals, llavors l'índex es calcula com:

Figura 4-21

Exemples en punts remarcables són:

Figura 4-22

En aquest apartat és interessant fer palès que per a la corba de concentració de Pareto o de Zipf, el grau de desigualtat és el mateix tant si s'analitza tota la població, com si s'analitza la meitat superior de la distribució.

Altres corbes corresponents al tipus Beta d'Euler presenten l'efecte oposat, l'índex de concentració és el mateix per a la cua inferior de la distribució que per al total de la població.

4.4. ELS ÍNDEXS DE POBRESA

Si la variable econòmica que s'estudia és la renda, és molt interessant introduir els índexs de pobresa que, d'alguna manera, tindran una relació directa amb l'índex de Gini truncat. Encara que, el terme pobresa sigui molt discutible, és una cota espacial i temporal que, a més a més, s'ha de revisar constantment ja que les magnituds econòmiques varien contínuament[68]. Els índexs més utilitzats són els definits per Sen (1976) i el definit per Takayama (1979)[69].

[67] Zagier,D."Inequalities for the Gini Coefficient of Composite Populations", J.Mathematical Economics, núm. 12, pàgs. 103-118, 1983.
[68] Flik, R.,"Definiciones de límites subjetivos de pobreza", Información Comercial Española, Revista de Economía, pàgs. 9-21, octubre 1990.
[69] Sen, P.K., "The Gini Coefficient and Poverty Indexes: Some Reconciliations", Journal of the American

Sen, va suggerir un índex simple:

Figura 4-23

on, $\alpha = p_\omega$ és la proporció d'individus per davall de la cota ω, considerada la línia de pobresa i,

Figura 4-24

serà la ratio de l'escletxa de la renda dels individus pobres, on,

Figura 4-25

Posteriorment, Sen va redefinir aquest índex de la següent manera:

Figura 4-26

G_α és el coeficient de Gini de la distribució de la renda entre els individus més pobres, és a dir, la distribució truncada en ω,

Figura 4-27

Per la seva part, Takayama, introdueix un nou índex basat en la funció de distribució censurada en ω, que defineix com

Figura 4-28

4.5. COTES DEL COEFICIENT DE GINI

Com ja s'ha indicat en el primer capítol l'índex de Gini presenta dos límits:

G=0 si existeix equidistribució.
G=1 si existeix màxima concentració.

Però es crea la necessitat d'obtenir uns extrems més viables ja que els límits d'equidistribució i de concentració total són fronteres utòpiques[70].

4.5.1. Cota inferior de l'índex

Una primera idea de cota inferior per a l'índex prové d'estimar l'índex mitjançant el mètode estàndard, tal i com es desenvolupa en el primer capítol, és a dir, aproximant l'àrea de

Statistical Association, vol. 81, núm.396, pàgs. 1050-1057, 1976.
Sen, P.K. "Poverty: an ordinal approach to measurement", Econometrica, vol, 44, núm. 2, pàgs. 219-231, 1976.
Takayama, N. "Poverty, income inequality and their measures: Professor Sen's axiomatic approach reconsidered", Econometrica, vol. 47, num. 3, 1979.
[70] Mehran, F.,"Bounds on the Gini Index Based on Observed Points of the Lorenz Curve", Journal of the American Statistical Association, vol. 70, núm. 349, març 1975.
Giorgi, G. i Pallini, A.,"Di Talune soglie inferiori e superiori del rapporto di concentrazione", Metron, vol. 64, núm. 1-4, 1986.
Giorgi, G. i Pallini, A. "About a General method for the lower and upper distribution-free bounds on Gini's concentration ratio from grouped data", Statistica, vol. 47, núm. 2, 1987

concentració elegint K fraccions,

Figura 4-29

aconseguint així una baixa estimació de l'índex, ja que el polígon està situat damunt la corba de concentració,

Figura 4-30

Si es considera com a cota inferior de l'índex el doble de l'àrea del major triangle inscrit dins la corba de concentració i la recta igualitària[71]:

Figura 4-31

El major triangle tindrà el seu vèrtex en el punt $(p_\mu, q(p_\mu))$ ja que en aquest punt es troba la màxima discrepància entre la recta i la corba, és a dir, l'altura del triangle és la màxima ja que es tracta de la màxima distància mínima entre la corba i la recta (distància mínima: longitud del segment perpendicular a la recta d'igualtat que uneix la recta i la corba). L'àrea d'aquest triangle serà:

Figura 4-32

numerador que coincideix amb la diferència mitja relativa, i àrea que coincideix amb l'índex de Pietra:

Figura 4-33

Per tant, es pot afirmar que la cota mínima és l'índex de Pietra, o bé, la meitat de la diferència mitja relativa: $(DMR/2) \leq G$

Serà la millor distribució possible, compatible amb la informació de què es disposa, donada la diferència mitja relativa.

Una altra possibilitat per al càlcul del màxim triangle inscrit en la corba i per tant per al càlcul de la cota mínima de l'índex seria mitjançant un càlcul geomètric:

Figura 4-34

Figura 4-35

on la cota mínima és igual a 2A.

4.5.2. Cota superior del coeficient de Gini.

Es considera en un primer pas, el doble de l'àrea del menor triangle en què es pot inscriure la corba de concentració[72]

[71] Kondor, Y.,"An old-New Measure of Income Inequality", Econometrica, vol. 39, pàgs. 1041-1042, 1971. Gastwirth, J.L.,"A general definition of the Lorenz curve and Gini Index", Review of Economics and Statistics, núm. 54, pàgs. 306-316, 1972.

[72] Gastwirth, J.L.,"The estimation of the Lorenz Curve and Gini Index", Review of Economics and Statistics,

Figura 4-36

Per obtenir aquest triangle és necessari calcular el punt de trobada de les dues rectes pendents, (una en el vèrtex inferior i l'altra en el vèrtex superior de la corba de concentració), punt que determina el vèrtex del triangle:

Figura 4-37

Assignant valors als pendents:

Figura 4-38

El doble de l'àrea del triangle es determina com:

Figura 4-39

Aquest interessant resultat comporta que quan la funció de distribució està definida sobre $(0, \infty)$, 2T val 1. Per la qual cosa es fa necessari buscar una altra cota superior.

La cota superior es pot obtenir afinant una mica més[73] de manera que es divideix la població en tres subgrups (en funció dels punts de tall dels tres pendents):

Figura 4-40

Els punts (p_1, q_1) i (p_2, q_2) que determinen dos vèrtexs del trapezi seran:

Figura 4-41

Així doncs, el doble de l'àrea, o la cota superior serà:

Figura 4-42

Coneixent la diferència mitja relativa, la cota superior es considera la pitjor distribució possible, compatible amb la informació disponible quan la població es divideix en dos grups iguals, un amb un volum de la variable $\leq$ mitja i l'altre amb un volum de la variable $\geq$ mitja. Alhora cada grup es divideix en dos, el primer amb un valor mínim igual a a i un valor màxim igual a μ, i el segon amb un valor mínim igual a μ i un de màxim igual a b. De manera que s'obté una cota superior per al valor real de l'índex de Gini.

En particular, quan la funció de distribució està definida sobre $(0, \infty)$ tenim:

Figura 4-43

La conclusió a la qual s'arriba és la determinació de dues cotes per l'índex, les quals són menys utòpiques que les originals i que determinen la pitjor i la millor distribució compatible amb la informació disponible:
Figura 4-44

vol. 64, núm. 3, pàgs. 306-316, 1972.
[73] Esteban. J.M.,"Algunos resultados sobre la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini", Cuadernos de Economía, núm. 22, pàgs. 191-224, 1980.

4.6. CÀLCUL DE L'ÍNDEX DE GINI

A continuació es presenta el càlcul de l'índex en aquelles corbes que s'han deduït en el segon capítol i també el càlcul de les cotes inferior i superior.

4.6.1. Distribució Beta Biparamètrica

Figura 4-45

4.6.2. Distribució Beta Uniparamètrica

Figura 4-46

4.6.3. Distribució Gamma

Figura 4-47

4.6.4. Distribució Exponencial

Figura 4-48

4.6.5. Distribució de Weilbull

Figura 4-49

4.6.6. Distribució Log-normal

Figura 4-50

4.6.7. Distribució de Pareto

Figura 4-51

4.6.8. Distribució de Rasche...,Obst

Figura 4-52

4.6.9. Distribució de Zipf

Figura 4-53

4.6.10. Distribució Uniforme

Figura 4-54

4.6.11. Distribució de Gupta

Figura 4-55

4.6.12. Distribució de Kakwani i Podder

Figura 4-56

4.6.13. Distribució de Kakwani

Figura 4-57

4.6.14. Corba quadràtica general

Figura 4-58

4.7. DESCOMPOSICIÓO DE L'ÍNDEX DE GINI

És evident que si s'uneixen dos grups d'una mateixa població amb un mateix grau de desigualtat, la desigualtat de la unió no és la mateixa que per als grups separats. L'heterogeneïtat ha augmentat en ajuntar-se els dos grups i, per tant, la concentració ha variat.

Així doncs, si es divideix una població en grups homogenis (en funció de la raça, sexe, zona geogràfica...) la desigualtat total no pot ser mai igual a la suma de les desigualtats de cada grup. Serà la suma entre la desigualtat dins dels grups més la desigualtat entre els diferents grups. I per tant, una mesura de desigualtat és additivament descomponible si és la suma de dos termes[74]:

$$I = I_W + I_B$$

a.- $I_W = \sum_{j=1}^{k} W_j I_j$

Indica la suma ponderada dels valors de l'índex dins de cada grup.

b.- $I_B = g(\mu_j)\ j = 1 \cdots K$

Indica la desigualtat entre els grups generada per la diferència de mitjanes.

En aquesta línia, Shorrocks[75] prova que un índex és descomponible additivament si és un índex cardinal i diferenciable si i solament si és un múltiple positiu d'alguns dels membres de la família d'índex de Theil definida com:

Figura 4-59

on una població de n individus es divideix en m grups i $x = (x^1 \cdots x^m)$ és la distribució objecte d'estudi, i x^j és la distribució en el subgrup j amb n_j individus.

Això implica que l'índex de Gini no és descomponible additivament, és a dir, en la suma de la desigualtat dins dels grups i la desigualtat entre grups generada per la diferència de mitjanes.

[74] Bourguignon, F.,"Decomposable income inequality measures", Econometrica, vol. 47, núm. 4, 1979.
[75] Shorrocks,A.,"The class of additively decomposable inequality measurements", Econometrica, núm. 48, pàgs. 613-625, 1980.

Mehran[76], per la seva part, va mostrar que l'índex de Gini és descomponible en la suma de la desigualtat dins dels grups i la desigualtat a través dels grups. Així proposa mesurar la desigualtat entre dos grups mitjançant l'índex relatiu, que deriva de la diferència mitja absoluta de tots els valors que pren la variable en els dos grups, dividit per la suma de les mitges dels dos grups:

Figura 4-60

Aquest raonament l'estén als K grups en què es pot dividir una població, de manera que, defineix $R_A$com la desigualtat a través dels grups,

Figura 4-61

I R, l'índex de concentració descompost en dos termes: la desigualtat dins més la desigualtat a través,

Figura 4-62

A partir d'aquí proposa descompondre el terme R_A, arribant a la conclusió final segons la qual

Figura 4-63

4.8. CÀLCUL DE G EN FUNCIÓ DELS ÍNDEXS D'UNA PARTICIÓ DE LA POBLACIÓ

Tal i com Mehran (1975) i posteriorment J.Baró (1989) estudien, és possible descompondre l'índex de Gini en funció dels índexs corresponents a una partició de la població en K grups determinats pels límits: ω_1,•••, ω_K= max K.

Suposem una població en la qual s'ha efectuat una partició en dos grups, gràficament,

Figura 4-64

i geomètricament l'índex seria:

Figura 4-65

Generalitzant a K grups:

Figura 4-66

D'altra banda, resulten interessants les particions en K grups -que posteriorment s'aplicaran- ordenats de manera que tots els grups tinguin la mateixa massa de probabilitat,

Figura 4-67

Per exemple:

[76] Mehran, F.,"Bounds on the Gini Index Based on observed Points of the Lorenz Curve", Journal of the American Statistical Association, vol. 70, núm. 349, pàgs. 64-67, 1975.

Figura 4-68

Alternativament es poden considerar altres particions, per exemple:

Figura 4-69

S'han mostrat algunes de les particions interessants ja que la llista podria ser interminable. En el capítol 6 es veurà una aplicació pràctica d'aquestes descomposicions.

PART PRÁCTICA

CAPÍTOL 5. APLICACIÓ AL VOLUM EMPRESARIAL DE LLEIDA

5.1. INTRODUCCIÓ

S'han assajat tots els models de concentració que s'estudien en el capítol 2, per estimar una corba de concentració que s'adapti al volum de vendes d'una mostra de les empreses lleidatanes de major grossària en la xifra de negocis dels anys 1985 al 1991.

Aquestes empreses en condicions habituals superen els 1.000 milions de pessetes de volum de vendes, encara que, com les dades reflecteixen, els anys amb menor activitat econòmica, algunes de les empreses no superen aquesta cota. L'única excepció és l'empresa número quatre[77] que cap any supera els 1.000 milions de pessetes en vendes, però que s'ha inclòs en l'estudi donada la seva importància econòmica dins el sector agroalimentari de la província de Lleida, i que en cap cas es podia considerar com una empresa de segona línia.

Aproximadament, un 75% de les empreses que es presenten pertanyen al sector agroalimentari dedicat a la producció i distribució dels seus productes, i l'altre 25% al sector industrial en general.

El motiu pel qual s'ha triat aquest sector és l'enorme importància que pren davant el conjunt de l'economia lleidatana. A grans trets, es pot afirmar que la base econòmica lleidatana es recolza actualment en tres grans sectors: agroalimentari, industrial i turístic.

En un primer pas, si es desitja analitzar l'economia[78] lleidatana a partir de magnituds macroeconòmiques i en concret el VAB, les dades que s'obtenen més recents fan referència als sectors productius: agrari, industrial, construcció i terciari;

Any	Sector agrari	Indústria	Construcció	Serveis
1975	25,8	24,1	8	42,1
1977	23,4	23,7	7,6	45,3
1985	15,9	22,8	6,9	54,4
1997	12,4	23,8	8,3	55,5
1999	11,8	2Z8	10	55,4

Tabla 5-1. Distribució sectorial del VAB (1975-1989).
Font: "Renta Nacional de España". Banc de Bilbao

Amb un coneixement més profund de l'economia lleidatana es veu que es tracta d'una economia agroindustrial ja que al VAB estricte del sector agrari cal afegir-hi el de les activitats industrials i terciàries que planegen als voltants de l'activitat agrària o que es recolzen en la millora del nivell de renda dels actius agraris. També, si s'analitza la implantació industrial dels últims anys es detecta que aquesta s'ha efectuat en el sector agroalimentari.

[77] Es manté en l'anonimat el nom de les empreses ja que no té cap interès per a l'estudi.
[78] Aldomà, I. i altres,"L'economia lleidatana i el mercat interior europeu de 1993", Patronat Català Pro-Europa, 1992.

Així, es pot afirmar que LLeida aplega aproximadament un 20% del valor afegit i un 25% de l'ocupació de l'economia agroalimentària catalana, un 2,5% del valor afegit i un 2% de l'ocupació de l'economia agroalimentària espanyola i per últim un 0,25% del valor afegit i un 0,4% de l'ocupació de l'economia agroalimentària comunitària.

Cal remarcar també, el pes enorme que el sector agroalimentari representa en el conjunt del comerç exterior lleidatà: aproximadament la meitat de les importacions i dues terceres parts de les exportacions. És en aquest sector on es concentren una gran part de les esperances del comerç exterior lleidatà malgrat les dificultats per exportar.

És, doncs, el desenvolupament de l'economia agroalimentària la principal contribució a l'augment del nivell de vida a les comarques lleidatanes. Però és necessari que s'adapti a les exigències d'una economia cada cop més internacionalitzada.

En un primer intent de modelització, els models que s'han assajat no han resultat tots bons, uns han proporcionat paràmetres que donen lloc a funcions que no compleixen les propietats per ser considerades corbes de concentració i altres no proporcionen ajustaments de qualitat.

Finalment descartades les funcions que no responien a la realitat empírica observada s'ha optat per dos grups de models:

Primer grup

Model Log-normal
Model Gamma.

Segon grup

Model Quadràtic
Model especificat per Kakwani
Model especificat per Kakwani i Podder
Model de Pareto.

Aquesta divisió està basada en la metodologia emprada en el càlcul dels paràmetres, ja sigui des del model de prova o des del model de concentració. Pel que fa al **primer grup** s'han estimat els coeficients mitjançant la funció de densitat aplicant tot seguit dues proves d'adherència: test de KolmogorovSmirnov i test Khi-quadrat per contrastar llur validesa.

En diferents estudis efectuats[79], són models que s'han adaptat força bé a la distribució de la renda, variable considerada de grandària econòmica, i, per tant, s'ha cregut oportú adaptar-los a una altra variable econòmica com és el cas del volum de vendes.

En el **segon grup** els paràmetres s'han estimat a partir de les corbes de concentració. Els models que hi figuren són aquells que han presentat una millor bondat en l'ajustament,

[79] Salem, A. i Mount, T.,"A convenient descriptive model of income distribution: The gamma density", Econometrica, vol. 42, núm. 6, pàgs. 1115-1127, 1974.
McDonald, J. i Ransom, M.,"Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution on Income",Econometrica, vol. 47, núm. 6, pàgs. 1513-1526, 1979.

qüestió òbvia ja que són models dissenyats per a ser corbes de concentració.

5.2. LLISTAT DE LA MOSTRA

A continuació es presenten els valors corresponents al volum de vendes expressat en 10^6 pessetes, dels anys 1985 al 1991 per les 55 empreses estudiades.[80]

Empresa	1985	1986	1987	1988
01	37858	28290	30287	35060
02	2597	2772	3085	4143
03	966	1245	1100	1209
04	430	701	527	524
05	1743	859	1441	1701
06	1235	1305	2231	2100
07	925	764	1021	1427
08	872	1745	1457	1309
09	905	1227	1754	2023
10	1616	1536	1623	1750
11	7467	8159	11891	8834
12	157	835	1090	1492
13	1458	3136	3906	4733
14	3735	4978	5389	5134
15	1420	1532	1630	1780
16	620	1090	1226	1261
17	944	1194	1210	855
18	1549	1359	1555	1756
19	2657	3217	3061	3268
20	20500	21317	20624	21907
21	623	861	1245	1649
22	64	984	1151	1309
23	1797	1886	2163	2022
24	1035	1339	1392	1595
25	874	992	1533	1964
26	1205	1250	1453	1570
27	5164	10683	11007	12289
28	1285	1268	1295	1568
29	1475	1422	1594	1567
30	3643	4106	4756	4945
31	3612	3565	3697	3639
32	1379	1146	1386	1208
33	13147	12435	8268	7341

[80] Font de les dades: Revista de Fomento de la Producción. España 25.000.
España 20.000, Ed. 1987.
España 20.000, Ed. 1988.
España 20.000, Ed. 1989.
España 25.000, Ed. 1990.
España 25.000, Ed. 1991.
Actualidad Económica, núm. 1743
Registre Mercantil de Lleida.

34	5215	6640	7991	9139
35	1960	2091	2787	3246
36	2446	3080	2946	2525
37	935	1118	1362	1443
38	10855	12539	12321	12157
39	808	1602	1996	2533
40	1907	2048	1929	1949
41	813	4384	4222	4375
42	600	920	1183	1403
43	813	954	1135	1505
44	1669	1907	1750	1876
45	2800	3060	3300	3760
46	2250	2204	2295	2223
47	1719	1922	1719	1627
48	4186	5120	5524	6612
49	2022	2550	3079	3538
50	1370	1193	1198	1229
51	919	1180	1455	1459
52	1944	1832	2048	2227
53	2875	2841	2865	3136
54	16607	21650	21236	20792
55	923	975	1153	1591

Tabla 5-2.

Empresa	1989	1990	1991
01	42653	44737	45075
02	4822	4712	4823
03	1232	2426	2200
04	594	656	713
05	1464	1393	1934
06	2038	1105	1305
07	1457	1376	1295
08	1287	1145	1172
09	2195	2073	2078
10	1861	1760	2188
11	7476	9234	9526
12	1433	1119	857
13	5775	3246	936
14	4632	4281	3843
15	1863	2142	2828
16	1562	1774	2021
17	667	833	638
18	1853	1997	2101
19	3971	4134	4265
20	23476	23822	23806
21	2059	1789	1681
22	1610	1631	1782
23	2148	2501	3416

24	1764	1686	1771
25	1814	1742	1426
26	1789	2257	2052
27	13678	14145	14905
28	1538	1519	1900
29	1415	1669	2012
30	5231	5753	1640
31	3687	3732	3277
32	1825	1794	1645
33	8581	8009	8063
34	9197	11116	10125
35	3236	2908	2652
36	3329	3433	3699
37	1619	1678	1865
38	15331	16614	16787
39	3359	3350	3283
40	1998	2084	2025
41	4918	3529	1195
42	1772	1913	1946
43	1632	1520	1379
44	2046	2160	2270
45	4040	4194	4705
46	2837	2723	2809
47	1800	1697	1426
48	9281	9174	10289
49	5103	6196	7174
50	1321	1346	1372
51	1743	1229	1065
52	2155	2727	4056
53	3807	4115	4569
54	24614	27179	7486
55	1785	1584	1487

Tabla 5-3.

5.3. MODEL LOG-NORMAL

En principi, és un model que s'hauria d'adaptar a les característiques de la variable en estudi, el volum de vendes, ja que està especificada per valors positius, i la distribució empírica presenta una asimetria a la dreta.

El mètode que s'ha considerat més adequat per estimar els paràmetres que determinen la corba de concentració originada per una funció log-normal, és l'estimació màximo-versemblant dels paràmetres de la funció de densitat, obtenint uns estimadors consistents, eficients i suficients.

Després s'han efectuat dues proves d'adherència per determinar si les diferències entre la distribució empírica i la llei teòrica de probabilitat ajustada són o no significatives.

En l'annex 1 es presenta una taula amb els valors estimats de la funció de distribució que segueix la llei log-normal per cada any considerat.

L'índex de Gini, com que està en funció del paràmetre s, s'ha calculat substituint el seu valor estimat en[81]:

Figura 5-1

5.3.1. Estimacions dels parámetres

Any	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1985	3169.49	4795.11
1986	3395.12	3889.28
1987	3226.51	3870.61
1988	3839.57	3983.19
1989	4342.39	4740.41
1990	4407.74	4915.01
1991	4099.55	4497.10

Tabla 5-4.

5.3.2. L'índex de Gini

Any	Index de Gini
1985	0.559564
1986	0.482566
1987	0.462400
1988	0.454536
1989	0.469014
1990	0.475024
1991	0.470404

Tabla 5-5.

5.3.3. Prova de Kolmogorov-Smirnov

Any 1985

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.11958
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.13067
Estimated overall statistic DN = 0.13067
Aproximate significance level = 0.304632.

Any 1986

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.146828

[81] McDonald, J. i Ransom, M.,"Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution on Income", Econometrica, vol. 47, núm. 6, pàgs. 1513-1526, 1979

Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.104988
Estimated overall statistic DN = 0.146828
Aproximate significance level = 0.186543.

Any 1987

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.1634
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.136599
Estimated overall statistic DN = 0.1634
Aproximate significance level = 0.10604.

Any 1988

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.183142
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.140964
Estimated overall statistic DN = 0.183142
Aproximate significance level = 0.0499678.

Any 1989

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.210086
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.127364
Estimated overall statistic DN = 0.210086
Aproximate significance level = 0.0155788.

Any 1990

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.143685
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.101559
Estimated overall statistic DN = 0.143685
Aproximate significance level = 0.206194.

Any 1991

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.169134
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.0765103
Estimated overall statistic DN = 0.169134
Aproximate significance level = 0.08598.

5.3.4. Prova x^2

Chisquare Test 1985

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	777.78	6	12.6	3.4550
777.78	3555.56	37	28.2	2.7193
3555.56	6333.33	6	7.6	0.3446
6333.33		6	6.3	0.0454

Chisquare = 6.56429 with 1 d.f. Sig. level = 0.0104045

Tabla 5-6.

Chisquare Test 1986

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	1222.22	16	14.0	0.2744
1222.22	3444.44	26	23.5	0.2711
3444.44	5666.67	5	9.0	1.7691
5666.67		8	8.5	0.0292

Chisquare = 2.34376 with 1 d.f. Sig. level = 0.125785

Tabla 5-7.

Chisquare Test 1987

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	1222.22	10	11.5	0.189
1222.22	3444.44	31	24.1	1.972
3444.44	5666.67	6	10.0	1.589
5666.67		8	9.4	0.219

Chisquare = 3.96968 with 1 d.f. Sig. level = 0.0463265

Tabla 5-8.

Chisquare Test 1988

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	2444.44	33	25.3	2.3513
2444.44	4666.67	10	15.6	2.0273
4666.67	6888.89	4	6.8	1.1234
6888.89		8	7.3	0.0617

Chisquare = 5.56374 with 1 d.f. Sig. level = 0.0183362

Tabla 5-9.

Chisquare Test 1989

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	3555.56	36	32.2	0.441
3555.56	6333.33	10	12.2	0.392
6333.33	9111.1	2	5.1	1.854
9111.11		7	5.5	0.397

Chisquare = 3.08439 with 1 d.f. Sig. level = 0.0790469

Tabla 5-10.

Chisquare Test 1990

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	3555.56	38	32.1	1.091
3555.56	6333.33	8	12.1	1.381
6333.33	9111.1	1	5.1	3.289
9111.11		8	5.7	0.892

Chisquare = 6.65279 with 1 d.f. Sig. level = 0.00990005

Tabla 5-11.

Chisquare Test 1991

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	1333.33	9	11.3	0.485
1333.33	4666.67	34	28.4	1.109
4666.67	8000.00	4	8.9	2.697
8000.00		8	6.4	0.420

Chisquare = 4.71145 with 1 d.f. Sig. level = 0.0299623

Tabla 5-12.

D'aquests resultats s'extreu en conclusió que aquest model pot funcionar els anys 1985 i 1986 però per a la resta les diferències de les distribucions teòrica i empírica són prou grans com per no poder-les imputar a l'atzar i, per tant, es rebutja la hipòtesi que la distribució del volum de vendes de les empreses estudiades segueixi una llei logarítmico-normal per a tot el període.

Una vegada més, es fa palès, que una llei no sempre s'adapta a una distribució empírica per un seguit d'anys, fet que ja ha estat comentat anteriorment en analitzar altres treballs similars.

5.4. MODEL GAMMA

Arguments similars als utilitzats per justificar la llei log-normal permeten considerar a priori el model gamma, car s'adapta a les característiques de la variable objecte d'anàlisi i és una funció que en determinats estudis s'ha considerat com un model descriptiu per a la distribució de la renda[82] i altres variables de naturalesa econòmica.

S'han estimat els paràmetres a partir de la funció de densitat obtenint estimadors consistents, eficients i suficients.

A l'igual que pel l'anterior model es presenta en l'annex 2 una taula amb els valors de la distribució estimada per cada any considerat.

L'índex de Gini s'ha obtingut substituint en l'expressió:

Figura 5-2

el paràmetre estimat ©.

5.4.1. Estimacions dels paràmetres

Any	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
1985	0.859071	0.000247905
1986	1.059210	0.000276087
1987	1.159400	0.000286540
1988	1.195630	0.000279498
1989	1.121300	0.000229976
1990	1.081170	0.000216435
1991	1.118630	0.000243336

Tabla 5-13.

5.4.2. L'índex de Gini

Any	Index de Gini
1985	0.5296045
1986	0.4889304
1987	0.4717507
1988	0.4659610
1989	0.4780721
1990	0.4850092
1991	0.4785226

Tabla 5-14.

5.4.3. Prova de Kolmogorov-Smirnov

Any 1985

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.205731
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.13711

82 Salem, A. i Mount, T.,"A convenient descriptive model of income distribution: The gamma density", Econometrica, vol. 42, núm. 6, pàgs. 1115-1127, 1974.

Estimated overall statistic DN = 0.205731
Aproximate significance level = 0.0190133.

Any 1986

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.209026
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.155102
Estimated overall statistic DN = 0.209026
Aproximate significance level = 0.0163596.

Any 1987

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.211452
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.1731
Estimated overall statistic DN = 0.211452
Aproximate significance level = 0.0146231.

Any 1988

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.226644
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.17123
Estimated overall statistic DN = 0.226644
Aproximate significance level = 0.0070322.

Any 1989

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.241892
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.162218
Estimated overall statistic DN = 0.241892
Aproximate significance level = 0.0032046.

Any 1990

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.213709
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.1454
Estimated overall statistic DN = 0.213709
Aproximate significance level = 0.0131581.

Any 1991

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.213172
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.110755
Estimated overall statistic DN = 0.213172
Aproximate significance level = 0.0134938.

5.4.4. Prova x^2

Chisquare Test 1985

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	777.78	6	12.9	3.70
777.78	3555.56	37	22.9	8.74
3555.56	6333.33	6	10	1.63
6333.33		6	9.2	1.10

Chisquare = 15.1715 with 1 d.f. Sig. level = 9.81743E-5

Tabla 5-15.

Chisquare Test 1986

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	1222.22	16	14.3	0.19731
1222.22	3444.44	26	18.0	3.55668
3444.44	5666.67	5	10.2	2.63004
5666.67	7888.89	1	5.6	3.82095
7888.89		7	6.9	0.00263

Chisquare = 10.2076 with 2 d.f. Sig. level = 6.0736E-3

Tabla 5-16.

Chisquare Test 1987

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	1222.22	10	12.6	0.5305
1222.22	3444.44	31	18.2	9.0936
3444.44	5666.67	6	10.8	2.1150
5666.67	7888.89	0	6.1	6.0853
7888.89		8	7.4	0.0477

Chisquare = 17.8721 with 2 d.f. Sig. level = 1.31558E-4

Tabla 5-17.

Chisquare Test 1988

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	2444.44	33	22.3	5.163
2444.44	4666.67	10	13.8	1.063
4666.67	6888.89	4	8.2	2.159
6888.89		8	10.7	0.672

Chisquare = 9.05661 with 1 d.f. Sig. level = 2.61747E-3

Tabla 5-18.

Chisquare Test 1989

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	777.78	2	6.9	3.459
777.78	3555.56	34	20.8	8.392
3555.56	6333.33	10	12.3	0.424
6333.33	9111.11	2	6.9	3.443
9111.11		7	8.2	0.173

Chisquare = 15.8915 with 2 d.f. Sig. level = 3.54162E-4

Tabla 5-19.

Chisquare Test 1990

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	777.78	1	7.1	5.2280
777.78	3555.56	37	20.4	13.6182
3555.56	6333.33	8	12.0	1.3492
6333.33	9111.11	1	6.8	4.9927
9111.11		8	8.7	0.0542

Chisquare = 25.2423 with 2 d.f. Sig. level = 3.30152E-6

Tabla 5-20.

Chisquare Test 1991

Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
	777.78	2	7.3	3.87710
777.78	3555.56	36	21.6	9.64996
3555.56	6333.33	7	12.3	2.25235
6333.33	9111.11	3	6.6	1.95329
9111.11		7	7.3	0.00904

Chisquare = 17.7417 with 2 d.f. Sig. level = 1.4042E-4

Tabla 5-21.

En funció de les proves d'adherència efectuades es pot concloure que el nivell de significació és massa baix per confirmar amb suficient garantia la validesa del model i, per tant, es rebutja la hipòtesi que la distribució del volum de vendes segueixi una llei Gamma, en el període estudiat.

5.5. MODELS ESTIMATS DES DE LA CORBA DE CONCENTRACIÓ

Els models que a continuació es presenten s'han estimat a partir de la corba de concentració, ja que són models que no deriven de cap llei coneguda o bé el seu càlcul és poc operatiu, tret del Model de Pareto la importància del qual el fa ineludible en qualsevol estudi d'aquest tipus.

El mètode d'estimació utilitzat és el de mínims quadrats prèvia linealització i transformació. Tots els models proposats per cadascun dels anys són vàlids, ja que efectuada la prova F són significatius a nivells alts i la R^2en el pitjor dels casos supera el 0.95, qüestió important si es té en compte la dimensió de la mostra.

En termes de variable aleatòria, s'identifica p com la funció de distribució i, més concretament, com la fracció d'empreses acumulades fins un nivell x, i q(p) com la massa acumulada relativa de variable i, en el nostre cas, com la fracció de xifra de negocis acumulada fins un nivell x.

5.6. MODEL ESPECIFICAT PER KAKWANI

El model que especifica Kakwani(1980)[83] com a corba de concentració és:

Figura 5-3

on els paràmetres A, α i β determinaran mesures de desigualtat en el repartiment de la variable.

5.6.1. Resultats de l'estimació

Estimat el model s'arriba als següents resultats per a tots els anys objecte d'estudi:
1985

Multiple R	0.99588
R Square	0.99178
Ajusted R Square	0.99146
Standard Error	0.06688

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	27.52337	13.76169
Residual	51	0.22815	0.00447

F= 3076.21758

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
Constant	-0.046665	0.028212	-1.654
V1	1.016121	0.014909	68.153
V2	0.337409	0.014909	22.631

Tabla 5-22.

1986

Multiple R	0.99280
R Square	0.98566

[83] Kakwani, N.C.,"On a class of Poverty Measure", Econometrica, vol. 48, núm. 4, pàgs. 437-446, 1980.

Ajusted R Square	0.98509
Standard Error	0.09222

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	29.80366	14.90183
Residual	51	0.43374	0.00850

F= 1752.18318

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
Constant	0.049645	0.038899	1.276
V1	1.102133	0.020557	53.613
V2	0.443097	0.020557	21.555

Tabla 5-23.

1987

Multiple R	0.99290
R Square	0.98585
Ajusted R Square	0.98529
Standard Error	0.09004

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	28.79649	14.39825
Residual	51	0.41343	0.00811

F= 1776.12970

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
Constant	-0.026465	0.037977	-0.697
V1	1.080101	0.020070	53.817
V2	0.428448	0.020070	21.348

Tabla 5-24.

1988

Multiple R	0.99425
R Square	0.98853
Ajusted R Square	0.98808
Standard Error	0.07970

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	27.92409	13.96204
Residual	51	0.32392	0.00635

F= 2198.24873

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
Constant	-0.092520	0.033616	-2.752
V1	1.052483	0.017765	59.245
V2	0.398161	0.017765	22.413

Tabla 5-25.

1989

Multiple R	0.99483
R Square	0.98968
Ajusted R Square	0.98928
Standard Error	0.07563

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	27.98412	13.99206
Residual	51	0.29174	0.00572

F= 2445.98754

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
Constant	-0.081654	0.031902	-2.560
V1	1.046666	0.016859	62.082
V2	0.384180	0.016859	22.787

Tabla 5-26.

1990

Multiple R	0.99515
R Square	0.99033
Ajusted R Square	0.98995
Standard Error	0.07375

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	28.40191	14.20095
Residual	51	0.27738	0.00544

F= 2610.98909

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
Constant	-0.053453	0.031107	-1.718
V1	1.053958	0.016439	64.112
V2	0.386027	0.016439	23.482

Tabla 5-27.

1991

Multiple R	0.99735
R Square	0.99470
Ajusted R Square	0.99450
Standard Error	0.05356

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	27.48333	13.74166
Residual	51	0.14632	0.00287

F= 4789.58955

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
Constant	-0.092234	0.022593	-4.082
V1	1.034707	0.011940	86.659
V2	0.375508	0.011940	31.450

Tabla 5-28.

Els valors estimats mitjançant aquest model del volum de vendes pels anys 1985 al 1991 es presenten en la taula de l'annex 3.

5.6.2. Càlcul de l'índex de Gini

L'expressió de l'índex per a aquest model serà:

Figura 5-4

amb un resultat pels anys considerats de:

Any	Index de Gini
1985	0.6045020
1986	0.5580700
1987	0.5332340
1988	0.5258420
1989	0.5422200
1990	0.5539860
1991	0.5460006

Tabla 5-29.

S'observa que l'any 1988 presenta menor concentració seguit dels anys 1987 i 1989, tal i com ja apuntaven els càlculs en els models anteriors.

5.7. MODEL ESPECIFICAT PER KAKWANI I PODDER

Kakwani i Podder (1973)[84] van especificar una forma funcional de corba de concentració com:

Figura 5-5

Més tard, Bassman, Hayes, Slotlje i Johnson (1990)[85] van generalitzar aquesta forma:

[84] Kakwani, N.C. i Podder, N.,"On estimation of Lorenz from grouped observations", International Economic Review, núm. 14, pàgs. 278-292, 1973.
[85] Basmann, R.L., Hayes, K., Slottje, D. i Johnson, J.,"A general function from for approximating the Lorenz curve", Journal of Econometrics, núm. 43, pàgs. 77-90, 1990.

Figura 5-6

En el present estudi s'han estimat tres formes derivades de l'anterior:

Primera corba: la més general
Segona corba: la general quan g=0
Tercera corba: la general quan g=0 i a=0, coincidint amb la de Kakwani i Podder.

El resultat de l'estimació dóna lloc al fet que la corba amb una bondat d'ajustament més elevada és la primera, després la segona i per últim la tercera, qüestió que cabia esperar atès el nombre de coeficients que contenen cadascuna, de manera que en afegir paràmetres, lògicament, l'estimació millora per a la mostra estudiada.

La distribució de vendes així estimada es presenta en la taula de l'annex 4.

5.7.1. Resultats de l'estimació

Es presenten els resultats de l'estimació per a les tres corbes.

Primera corba.

1985

Multiple R	0.99951
R Square	0.99901
Ajusted R Square	0.99893
Standard Error	0.09222

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	4	430.31342	107.57835
Residual	50	0.42525	0.00851

F= 12648.82557

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-5.831138	1.665050	-3.502
V2	1.851423	0.187318	9.884
V3	-9.495653	1.226481	-7.742
V4	8.641274	0.570879	15.137

Tabla 5-30.

1986

Multiple R	0.99975
R Square	0.99950
Ajusted R Square	0.99946
Standard Error	0.05586

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	4	313.61943	78.40486
Residual	50	0.15602	0.00312

F= 20450.00009

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-9.083679	1.008529	-9.007
V2	0.389568	0.113460	3.434
V3	-9.964919	0.742886	-13.414
V4	5.325302	0.345784	15.401

Tabla 5-31.

1987

Multiple R	0.99969
R Square	0.99939
Ajusted R Square	0.99934
Standard Error	0.06021

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	4	296.58366	74.14591
Residual	50	0.18129	0.00363

F= 25127.29662

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-4.955432	1.087143	-4.558
V2	1.055088	0.122304	8.627
V3	-7.375968	0.800793	-9.211
V4	5.399950	0.372738	14.487

Tabla 5-32.

1988

Multiple R	0.99976
R Square	0.99952
Ajusted R Square	0.99948
Standard Error	0.05348

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	4	294.86997	73.71749
Residual	50	0.14299	0.00286

F= 25777.96398

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-6.125440	0.965497	-6.344
V2	1.011931	0.108619	9.316
V3	-8.218121	0.711188	-11.555
V4	5.887017	0.331030	17.784

Tabla 5-33.

1989

Multiple R	0.99977
R Square	0.99955
Ajusted R Square	0.99951
Standard Error	0.05309

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	4	310.45320	77.61330
Residual	50	0.14092	0.00282

F= 27538.26868

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-8.430898	0.958494	-8.796
V2	0.780592	0.107831	7.239
V3	-9.933976	0.706030	-14.070
V4	6.454229	0.328630	19.640

Tabla 5-34.

1990

Multiple R	0.99973
R Square	0.99946
Ajusted R Square	0.99941
Standard Error	0.05881

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	4	317.86788	79.46697
Residual	50	0.17292	0.00346

F= 22977.57216

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-9.473677	1.061772	-8.923
V2	0.548410	0.119449	4.591
V3	-10.431904	0.782104	-13.338
V4	6.075499	0.364039	16.689

Tabla 5-35.

1991

Multiple R	0.99977
R Square	0.99955
Ajusted R Square	0.99951
Standard Error	0.05360

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	4	318.15783	79.53946
Residual	50	0.14366	0.00287

F= 27684.06575

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-10.475747	0.967757	-10.825
V2	0.369064	0.108873	3.390
V3	-10.665149	0.712853	-14.961
V4	5.553077	0.331805	16.736

Tabla 5-36.

Segona corba

1985

Multiple R	0.99891
R Square	0.99783
Ajusted R Square	0.99770
Standard Error	0.13540

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	429.80362	143.26787
Residual	51	0.93505	0.01833

F= 7814.15914

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	6.848903	0.440606	15.544
V2	3.145455	0.124171	25.332
V3	4.911801	0.449820	10.919

Tabla 5-37.

1986

Multiple R	0.99886
R Square	0.99771
Ajusted R Square	0.99758
Standard Error	0.11861

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	313.05799	104.35266
Residual	51	0.71745	0.014074

F= 7417.89736

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	4.222998	0.385948	10.942
V2	1.747550	0.108767	16.067
V3	1.411522	0.394019	3.582

Tabla 5-38.

1987

Multiple R	0.99918
R Square	0.99835
Ajusted R Square	0.99826
Standard Error	0.09791

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	296.27605	98.75868
Residual	51	0.48889	0.00959

F= 10302.31541

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	4.894083	0.318594	15.361
V2	2.060257	0.089786	22.946
V3	2.502996	0.325256	7.695

Tabla 5-39.

1988

Multiple R	0.99911
R Square	0.99822
Ajusted R Square	0.99812
Standard Error	0.10144

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	294.48811	98.16270
Residual	51	0.52484	0.01029

F= 9538.70485

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	4.848647	0.330100	14.688
V2	2.131866	0.093028	22.916
V3	2.659302	0.337003	7.891

Tabla 5-40.

1989

Multiple R	0.99887
R Square	0.99775
Ajusted R Square	0.99762
Standard Error	0.11706

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	309.89525	103.29842
Residual	51	0.69887	0.01370

F= 7538.14826

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	4.834459	0.380918	12.692
V2	2.134357	0.107350	19.882
V3	2.552602	0.388884	6.564

Tabla 5-41.

1990

Multiple R	0.99876
R Square	0.99752
Ajusted R Square	0.99738
Standard Error	0.12432

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	317.25259	105.75086
Residual	51	0.78821	0.01546

F= 6842.42571

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	4.456589	0.404533	11.017
V2	1.970030	0.114005	17.280
V3	1.978308	0.412993	4.790

Tabla 5-42.

1991

Multiple R	0.99876
R Square	0.99753
Ajusted R Square	0.99738
Standard Error	0.12420

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	317.51472	105.83824
Residual	51	0.78677	0.01543

F= 6860.65929

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	3.765983	0.404162	9.318
V2	1.822470	0.113900	16.001
V3	1.364278	0.412614	3.306

Tabla 5-43.

Tercera corba

1985

Multiple R	0.99375
R Square	0.98754
Ajusted R Square	0.98707
Standard Error	0.32121

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	425.37358	212.68679
Residual	52	5.36509	0.10370

F= 2061.42246

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	1.331292	0.100569	13.238
V2	-1.917198	0.229148	-8.367

Tabla 5-44.

1986

Multiple R	0.99617
R Square	0.99235
Ajusted R Square	0.99205
Standard Error	0.21491

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	311.37374	155.68687
Residual	52	2.40170	0.04619

F= 3370.82439

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.628947	0.067288	9.347
V2	-2.799202	0.153316	-18.258

Tabla 5-45.

1987

Multiple R	0.99535
R Square	0.99073
Ajusted R Square	0.99037
Standard Error	0.23001

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	294.01397	147.00699
Residual	52	2.75097	0.05290

F= 2778.79041

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.763894	0.072014	10.608
V2	-2.376864	0.164085	-14.486

Tabla 5-46.

1988

Multiple R	0.99534
R Square	0.99069
Ajusted R Square	0.99034
Standard Error	0.22976

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	292.26784	146.13392
Residual	52	2.74511	0.05279

F= 2768.17986

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.847538	0.071938	11.782
V2	-2.175253	0.163911	-13.271

Tabla 5-47.

1989

Multiple R	0.99531
R Square	0.99064
Ajusted R Square	0.99028
Standard Error	0.23641

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	307.68795	153.84398
Residual	52	2.90617	0.05589

F= 2752.72385

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.853787	0.074018	11.535
V2	-2.267807	0.168650	-13.447

Tabla 5-48.

1990

Multiple R	0.99580
R Square	0.99162
Ajusted R Square	0.99130
Standard Error	0.22634

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	315.37686	157.68843
Residual	52	2.66394	0.05123

F= 3078.06812

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.789552	0.070866	11.141
V2	-2.465329	0.161469	-15.268

Tabla 5-49.

1991

Multiple R	0.99665
R Square	0.99332
Ajusted R Square	0.99306
Standard Error	0.20221

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	316.17528	158.08764
Residual	52	2.12620	0.04089

F= 3866.30752

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.824923	0.063311	13.030
V2	-2.390760	0.144254	-16.573

Tabla 5-50.

5.7.2. Càlcul de l'índex de Gini

A continuació es presenta l'índex de Gini per a la millor estimació, és a dir, per a la corba més general, encara que, si es calculen els índexs per a les altres corbes, s'obté la mateixa ordenació dels anys.

L'índex s'ha obtingut utilitzant tècniques d'integració numèriques, ja que no és possible una expressió que doni un càlcul directe.

Any	Index de Gini
1985	0.582030
1986	0.547946
1987	0.521852
1988	0.513490
1989	0.529726
1990	0.539506
1991	0.529974

Tabla 5-51.

S'observa que el resultat referent a l'ordenació de menor a major concentració és el mateix que l'obtingut amb la corba estimada anteriorment. Així l'any amb una menor concentració en el volum de vendes és 1988, seguit de 1987 i de 1989.

5.8. MODEL QUADRÀTIC

El model quadràtic que s'ajusta segueix a Villaseñor i Arnold (1988)[86]:

Figura 5-7

corba que en el cas present, serà un segment d'una hipèrbola ja que b^2-4a > 0.

L'ajustament s'ha efectuat amb els següents canvis:

Figura 5-8

El resultat de l'estimació no és bo per l'any 1985 ni pel 1991, és a dir, els paràmetres obtinguts no donen lloc a una corba de concentració. La resta d'anys, els paràmetres estimats sí que fan que la funció sigui una corba de concentració, de manera que substituint en:

Figura 5-9

A l'igual que les funcions anteriors, els paràmetres determinaran la concentració de la distribució del volum de vendes dels anys 1985 al 1991.

Els valors ajustats a aquesta funció es presenten en la taula de l'annex 5.

5.8.1. Resultats de l'estimació

1986

Multiple R	0.99523
R Square	0.99048
Ajusted R Square	0.98993
Standard Error	0.01488

[86] Villaseñor, J. i Arnold, B.,"Elliptical Lorenz Curves", Journal of Econometrics, vol. 40, pàgs. 327-338, 1989.
Arnold, B.,"A class of hyperbolic Lorenz curves", Sankhya, 48 B, pàgs. 427-436, 1986.
Villaseñor, J. i Arnold, B.,"Some examples of fitted general quadratic Lorenz curves", Technical report, núm. 130, University of California, 1984.

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	1.19826	0.39942
Residual	51	0.01152	0.00022

F= 1803.52166

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-0.155577	0.176823	-0.880
V2	4.225384	0.180300	3.580
V3	1.318578	0.301358	4.375

Tabla 5-52.

1987

Multiple	R 0.99601
R Square	0.99203
Ajusted R Square	0.99157
Standard Error	0.01407

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	1.28072	0.42691
Residual	51	0.01029	0.00020

F= 2157.40576

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-0.348110	0.227617	-1.529
V2	4.256147	1.244366	3.420
V3	1.551195	0.362105	4.284

Tabla 5-53.

1988

Multiple R	0.99699
R Square	0.99398
Ajusted R Square	0.99363
Standard Error	0.01254

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	1.32582	0.44194
Residual	51	0.00803	0.00016

F= 2808.19290

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-0.197575	0.159203	-1.241
V2	3.086640	0.800268	3.857
V3	1.287710	0.245149	5.253

Tabla 5-54.

1989

Multiple R	0.99668
R Square	0.99338
Ajusted R Square	0.99299
Standard Error	0.01296

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	1.28568	0.42856
Residual	51	0.00857	0.00017

F= 2551.07525

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-0.012647	0.125916	-0.100
V2	2.497249	0.688501	3.627
V3	1.014345	0.197216	5.143

Tabla 5-55.

1990

Multiple R	0.99701
R Square	0.99403
Ajusted R Square	0.99368
Standard Error	0.01215

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	1.25271	0.41757
Residual	51	0.00753	0.00015

F= 2829.88641

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	-0.004400	0.100837	-0.044
V2	2.713136	0.590334	4.596
V3	1.007482	0.160467	6.278

Tabla 5-56.

5.8.2. Càlcul de l'índex de Gini

L'índex de Gini, calculat en funció dels paràmetres obtinguts és:

Figura 5-10

Amb uns resultats,

Any	Index de Gini
1986	0.571246
1987	0.545224
1988	0.536282
1989	0.553362
1990	0.564722

Tabla 5-57.

resultats que segueixen la mateixa tendència que els obtinguts en les funcions anteriorment estimades. L'any de menor concentració en el volum de vendes és 1988, seguit de 1987 i de 1989.

5.9. MODEL DE PARETO

Aquest és el model per excel.lència d'una corba de concentració que s'adapti a una variable de grandària econòmica a partir d'un valor mínim. Com que és una funció que s'adhereix molt bé als valors més alts de la variable, s'ha cregut oportú efectuar l'estimació de la corba a partir d'un valor mínim, la mitjanera, és a dir, l'estimació d'una corba truncada en aquest valor cosa que permet posteriorment comparar la concentració del 50% de les empreses de major volum de vendes en les funcions que s'estudiaran més en profunditat.

La corba de concentració de Pareto que s'ajusta és:

Figura 5-11

En la taula de l'annex 6 es presenten els valors de la distribució de Pareto estimada.

5.9.1. Resultats de l'estimació

1985

Multiple R	0.98274
R Square	0.96577
Ajusted R Square	0.96445
Standard Error	0.08515

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	5.31926	5.31926
Residual	26	0.18853	0.00725

F= 733.56854

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.354540	0.013090	27.084

Tabla 5-58.

1986

Multiple R	0.97516
R Square	0.95094
Ajusted R Square	0.94905
Standard Error	0.12381

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	7.72499	7.72499
Residual	26	0.39853	0.01533

F= 503.97975

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.427256	0.019032	22.449

Tabla 5-59.

1987

Multiple R	0.98069
R Square	0.96175
Ajusted R Square	0.96028
Standard Error	0.11038

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	7.96390	7.96390
Residual	26	0.31675	0.01218

F= 653.70409

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.433812	0.016967	25.568

Tabla 5-60.

1988

Multiple R	0.98575
R Square	0.97170
Ajusted R Square	0.97062
Standard Error	0.09196

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	7.55059	7.55059
Residual	26	0.21988	0.00846

F= 892.84615

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.422405	0.014136	29.881

Tabla 5-61.

1989

Multiple R	0.98592
R Square	0.97204
Ajusted R Square	0.97097
Standard Error	0.08820

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	7.03120	7.03120
Residual	26	0.20224	0.00778

F= 903.92172

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.407618	0.013558	30.065

Tabla 5-62.

1990

Multiple R	0.98416
R Square	0.96857
Ajusted R Square	0.96737
Standard Error	0.09207

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	6.79270	6.79270
Residual	26	0.22039	0.00848

F= 801.35968

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.400645	0.014153	28.308

Tabla 5-63.

1991

Multiple R	0.99115
R Square	0.98237
Ajusted R Square	0.98170
Standard Error	0.06816

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	6.73242	6.73242
Residual	26	0.12079	0.00465

F= 1449.17523

Variables in the equation

Variable	B	SEB	T
V1	0.398864	0.010478	38.068

Tabla 5-64.

5.9.2. Càlcul de l'índex de Gini

L'índex de Gini està en relació inversa al paràmetre α, de manera que a major valor pel paràmetre, menor és la concentració. L'expressió de l'índex és:

Figura 5-12

i el resultat pels diferentes anys, recordant que fa referència al 50% de les empreses de major volum de vendes, és:

Any	Index de Gini
1985	0.4765160
1986	0.4012902
1987	0.3948830
1988	0.4060693
1989	0.4208402
1990	0.4279135
1991	0.4297315

Tabla 5-65.

CAPÍTOL 6. APLICACIÓ DE LES MESURES DE CONCENTRACIÓ

6.1. INTRODUCCIÓ

En aquest estudi, les mesures de concentració que es calculen intentaran únicament destacar les diferències en el volum de vendes de les empreses triades. Es tracta d'efectuar un càlcul quantitatiu de la desigualtat sense entrar en subjectivitats; això és, una anàlisi de la mesura estadística.

Seran mesures positives que es poden aplicar a qualsevol distribució sense disposar d'informació addicional, és a dir, no es tindran en compte valors ètics subjacents en l'anàlisi del volum de vendes.

Els indicadors que aquí es presenten[87] seran mesures derivades de la pròpia corba de concentració, ja que el diagrama de Lorenz permet veure en una primera aproximació gràfica l'existència de més o menys concentració segons el grau de convexitat de la corba.

Així, d'aquesta representació gràfica sorgiran distàncies d'interès entre la recta d'equidistribució i la corba, les quals reflecteixen la desigualtat de la variable en l'acumulació dels seus diferents valors, alhora que la superfície que separa la recta de la corba serà una bona mesura de concentració de la variable.

Els models que a continuació s'analitzen amb més profunditat són el model especificat per Kakwani i el model quadràtic, els quals s'han escollit perquè oferint uns bons ajustaments són els que permeten amb una major facilitat efectuar els càlculs de les mesures que s'estudiaran.

6.2. MODEL ESPECIFICAT PER KAKWANI

6.2.1. Primera mesura

Figura 6-1

Aquesta distància indica la desigualtat que presenta la massa de variable continguda en la meitat de la població, és a dir, quan el total d'empreses s'ha dividit en dos grups amb el mateix número d'elements.

A l'igual que totes les mesures indicatives de desigualtat, serà major quant major sigui la concentració, o altrament dit, en augmentar la desigualtat.

En primer lloc, cal interpretar q(p(Mi)) com el valor del volum de vendes de les empreses que estan per damunt o per davall de la mitjanera[88], així:

---

[87] Baró, J. i Torrelles, E., "Sobre las medidas de concentración", Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, Universitat de Barcelona, març 1989.
Baró, J.,"Aplicaciones del modelo de concentración de Kakwani al análisis de la distribución de la renta", Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, Universitat de Barcelona, març 1991.
[88] La mitjanera és el valor que divideix la distribució d'empreses en dos grups iguals.

q(p)	1985	1986	1987
Del primer grup	0.1265	0.1399	0.1577
Del segon grup	0.8735	0.8601	0.8424
1988	1989	1990	1991
0.1664	0.1581	0.15061	0.15689
0.8336	0.8419	0.84939	0.84311

Tabla 6-1.

L'any de menor concentració, 1988, reflecteix una gran disparitat entre el volum de vendes que s'emporta un grup d'empreses i l'altre: el primer aproximadament un 17% i el segon un 83% de les vendes totals.

Pel que fa a la mesura de desigualtat, s'obtenen els següents resultats:

Any	D= 0.5-q(p(Mi))
1985	0.37350
1986	0.36010
1987	0.34230
1988	0.33360
1989	0.34190
1990	0.34939
1991	0.34311

Tabla 6-2

on la tendència de la concentració segueix indicant que l'any de menor concentració és 1988 i el de major 1985, tal i com l'índex de Gini presenta.

Seguint J.Baró i Moratal (1984), es poden calcular relacions entre el volum de vendes mig de tota la mostra i el volum de vendes mig de cadascun dels dos grups en què es divideix la mostra. Així:

Figura 6-2

	1985	1986	1987	
1.-	1/[2 q(p(Mi))]	3.9525	3.5739	3.1705
2.-	2 (1- q(p(Mi)))	1.747	1.7202	1.6846

	1998	1989	1990	1991
1.-	3.0048	3.1625	3.31983	3.186946
2.-	1.6672	1.6838	1.69878	1.68622

Tabla 6-3.

El volum de vendes mig de les grans empreses lleidatanes triplica o més el volum de vendes mig d'una empresa situada en el 50% del grup de les menys afavorides, i el volum de vendes mig de les empreses amb major quota de mercat gairebé duplica el volum de vendes mig del conjunt.

6.2.2. Segona mesura

Figura 6-3

És la distància existent entre la corba i la situació d'equidistribució quan es divideix en dues parts iguals la massa acumulada de la variable. En cas d'equidistribució la distància és 0.

Considerant p(Ml) com el valor que divideix el total d'empreses en dos grups, on cada grup acumularà el 50% del volum de vendes total s'obté:

Volum d'empreses	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Ingressos < Ml	0.8945	0.8621	0.8525	0.8519	0.8611	0.86668	0.863224
Ingressos > Ml	0.1055	0.1379	0.1475	0.1481	0.1389	0.13332	0.136776

Tabla 6-4.

Tal com es preveia, la diferència entre els dos grups d'empreses és significativa. Així l'any 1988 el percentatge d'empreses que acumulen el 50% primer de les vendes és gairebé sis vegades superior al de la resta que acumula l'altre 50%.

La desigualtat entesa com la distància entre p i q(p) en la mitjala és:

Any	D= p(Ml)-0.5
1985	0.3945
1986	0.3621
1987	0.3525
1988	0.3519
1989	0.3611
1990	0.3666
1991	0.3632

Tabla 6-5

la qual manté l'ordre de les anteriors mesures.

6.2.3. Tercera mesura

És una mesura similar a la primera però efectuant l'anàlisi en el primer i en el tercer quartil. Tal com proposen Baró i Torrelles (1989)[89] serà la suma de les distàncies entre la funció de distribució i la massa acumulada de volum de vendes, en el primer i tercer quartil:

Figura 6-4

En primer lloc s'analitzarà el volum de vendes de cada grup en què s'ha dividit la

[89] Baró, J. i Torrelles, E.,"Sobre las medidas de concentración", Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, Universitat de Barcelona, març 1989.

distribució de les empreses:

	q(p)	1985	1986	1987
1.-	si $p< Q_1$	0.0382	0.0492	0.0570
2.-	si $Q_1 \leq p < Q_2$	0.0883	0.0907	0.1007
3.-	si $Q_2 \leq p < Q_3$	0.1772	0.1960	0.1981
4.-	si $p \geq Q_3$	0.6963	0.6641	0.6441

	1988	1989	1990	1991
1.-	0.0610	0.0566	0.0332	0.0549
2.-	0.1054	0.1015	0.0974	0.1019
3.-	0.1958	0.1915	0.1894	0.1907
4.-	0.6377	0.6503	0.6599	0.6523

Tabla 6-6.

Tal com era d'esperar els anys 88-87 i 89, que són els de menor concentració, presenten majors valors de $q(p(Q_1))$ i menors valors per l'últim grup.

La mesura de la desigualtat serà:

Any	$D= 1-q(p(Q_3))-q(p(Q_1))$
1985	0.6581
1986	0.6149
1987	0.5871
1988	0.5767
1989	0.5937
1990	0.6067
1991	0.5974

Tabla 6-7

De manera que manté l'ordre establert amb les altres mesures.

6.2.4. Quarta mesura. L'índex de PIETRA

Es correspon amb la màxima distància existent entre la corba i la funció de distribució, distància que s'observa en el valor mig, és a dir, en el volum de vendes esperat.

Com ja s'ha explicat en el capítol 1, és en aquest punt on la corba presenta un pendent unitari:

Figura 6-5

i, a més, aquest índex és equivalent a la desviació mitja relativa de la variable, mesura, doncs, dotada de significació com a mesura de dispersió i en últim extrem com a mesura idònia de desigualtat.

En primer lloc, es presenta un quadre on es descomponen les empreses en dos grups, de manera que en el primer no arriben al volum de vendes mig de la mostra i en el segon el superen:

	Volum d'empreses	1985	1986	1987
1.-	si vendes< μ	0.7507	0.7132	0.7159
2.-	si vendes > μ	0.2493	0.2868	0.2841
	1988	1989	1990	1991
1.-	0.7255	0.7315	0.7319	0.7337
2.-	0.2745	0.2685	0.2681	0.2663

Tabla 6-8.

I l'índex de Pietra:

Any	$D= p_\mu - q(p_\mu)$
1985	0.4464000
1986	0.4145000
1987	0.3959000
1988	0.3887000
1989	0.4009000
1990	0.4104220
1991	0.4027325

Tabla 6-9.

Es comprova que, fins al valor esperat, l'acumulació d'empreses i el volum de vendes es distancien en un 44.64% l'any 1985, sent la menor diferència la corresponent a l'any 1988, tal i com ja s'ha indicat.

Prenent la mitja com a punt divisori dels grups es poden establir relacions entre el volum de vendes esperat en cada grup i el volum de vendes de tota la mostra[90]. Com que

Figura 6-6

		1985	1986	1987
1.-	$(1-q(p_\mu))/(1-p_\mu)$	2.7906	2.4452	2.3934
2.-	$(p_\mu/[q(p_\mu))$	2.4669	2.3876	2.2371
3.-	$[(1-q(p_\mu))/(q(p_\mu))][p_\mu/1-p_\mu]$	6.8841	5.8381	5.3542
	1988	1989	1990	1991
1.-	2.4160	2.4931	2.5309	2.5124
2.-	2.1541	2.2126	2.2765	2.2167
3.-	5.2043	5.5162	5.7619	5.5694

Tabla 6-10.

Aquests càlculs proporcionen la mateixa ordenació que els anteriors coeficients. L'any 1988 el volum de vendes mig de les empreses del grup de major volum supera en 5.2043 vegades la del grup de menor volum i presenta un volum de vendes mig superior en 2.4160 vegades al de la mostra. Per altra banda, la xifra de negocis mig de la mostra supera en 2.4160 vegades la del grup de menor volum.

[90] Baró, J. i Moratal, J.,"Concentración y distribuciones truncadas", Qüestió, vol. 8, núm. 3, setembre 1984.

6.2.5. Cinquena mesura. L'índex de GINI

Proporciona un promig de totes les distàncies existents entre tots els punts de p i q(p), fet que el converteix en una bona mesura de concentració,

Figura 6-7

En aquest model en concret l'expressió de l'índex és[91]:

Figura 6-8

amb un resultat per cadascun dels anys de:

Any	Index de Gini
1985	0.6045020
1986	0.5580700
1987	0.5332340
1988	0.5258420
1989	0.5422200
1990	0.5539860
1991	0.5460006

Tabla 6-11.

L'anàlisi amb l'índex de Gini s'amplia si es calcula l'índex truncat en punts remarcables de la distribució del volum de vendes de les empreses estudiades,

Figura 6-9

[91] Kakwani, N.C.,"On a class of Poverty Measures", Econometrica, vol. 48, núm. 4, pàgs. 437-446, 1980.

	ω_1	ω_2	1985	1986	1987
1.-	0	Mi	0.2626	0.1876	0.1750
2.-	Mi	∞	0.4909	0.4298	0.4206
3.-	0	Q_1	0.1490	0.0220	0.0073
4.-	Q_3	∞	0.4566	0.3717	3727
5.-	0	μ	0.3456	0.3127	0.2807
6.-	μ	∞	0.4564	0.3825	0.3780
7.-	0	Ml	0.4146	0.4027	0.3575
8.-	Ml	∞	0.4655	0.3869	0.3839

	1988	1989	1990	1991
1.-	0.1741	0.1857	0.19113	0.19689
2.-	0.4266	0.4411	0.44788	0.44468
3.-	0.0458	0.0554	0.04764	0.07658
4.-	0.3897	0.4047	0.40775	0.41063
5.-	0.2690	0.2822	0.29331	0.28769
6.-	0.3921	0.4064	0.40992	0.41213
7.-	0.3379	0.3528	0.36751	0.35584
8.-	0.4048	0.4202	0.42107	0.42701

Tabla 6-12.

El primer punt a considerar i, per altra banda, allò més lògic si es tenen en compte els resultats d'altres mesures, és que els índex majors es troben en els extrems superiors donada l'asimetria cap a la dreta de la distribució.

Un altre aspecte a tenir en compte és l'ordenació que presenta l'índex quan la distribució es trunca en la Mi, μ, i Ml, la qual coincideix amb el truncament efectuat amb el model de Pareto també en la Mi. L'any que presenta menor concentració és 1987, en la cua superior, efectuats els truncaments ja esmentats.

Sense voler entrar en detall, aquest resultat podria anar en la línia marcada en la publicació del Departament d'Economia i Finances[92], "Estudi econòmicofinancer de l'empresa catalana", segons la qual des de 1985 a 1987 hi van haver importants augments de l'activitat amb una clara contenció dels costos salarials i financers, i, per tant, un augment dels nivells de rendibilitat per a les empreses catalanes, i ja durant el transcurs del 1987 i de forma clara a partir del 1988 es trenquen aquestes tendències. Això fa pensar que la disminució de la concentració l'any 1987 per a les empreses amb major volum de vendes és imputable a una major equitat en el repartiment de la xifra de negocis donada la contenció dels costos salarials i financers, qüestió que afavoreix aquest tipus d'empreses.

[92] "Estudi Econòmico-financer de l'empresa catalana. Exercicis 1988-1989 i anàlisi de tendències. Període 1986-1989". Departament d'Economia i Finances. Direcció General de Programació Econòmica, núm. 1, maig 1991.

Molt interessant és el treball efectuat per S. Gil (1985)[93] respecte l'organització industrial, on estudia la corba de Lorenz i el coeficient de Gini en relació al tamany de les empreses.

6.2.6. Cotes Inferior i Superior de l'índex de Gini

A continuació es calculen les cotes inferior i superior de l'índex de Gini, expressions ja descrites en el capítol 4, les quals presenten una difícil interpretació econòmica, encara que la cota inferior coincideix amb l'índex de Pietra. La cota superior s'entén com el doble de l'àrea que formen la recta d'equidistribució i les tangents en els punts (0,0), (1,1) i (p_μ, $q(p_\mu)$).

Cota Inferior = $p_\mu - q(p_\mu)$
Cota Superior = $2\,(p_\mu - q(p_\mu) - (p_\mu - q(p_\mu)^2)$

Any	Cota Inferior	Cota Superior
1985	0.4464	0.69352
1986	0.4145	0.65718
1987	0.3959	0.63506
1988	0.3887	0.62631
1989	0.4009	0.64107
1990	0.4104	0.65239
1991	0.4027	0.64327

Tabla 6-13.

6.2.7. Descomposició de l'índex de Gini

La descomposició de l'índex es farà per una estratificació en K grups de la mostra d'empreses determinats pels límits: ω_1, ω_2,..., ω_k= max K.

Seguint l'equació de descomposició proposada per J.Baró (1989)[94],

Figura 6-10

El primer sumatori s'interpreta com la variació que experimentaria l'índex global G davant canvis correctors de G_i, és a dir, el canvi en el grau de concentració de tota la població a causa d'una redistribució amb variació unitària en l'índex del grup ièssim. Seria la suma de la concentració existent dins de cada grup.

La resta de l'equació indica la desigualtat existent entre els diferents grups.

Les equacions particulars, quan la mostra es divideix en grups en funció dels punts discriminadors (mitjanera, mitja i en la mitjala) seran:
a.- Quan el punt discriminador és la mitjanera:

[93] Gil, S.,"Organización Industrial. Aspectos metodológicos y aportaciones empíricas", Publicació interna, 1985
[94] Baró, J.,"Descomposición del índice de Gini", Comunicación III, Reunión Asepelt-España, Sevilla, juny 1989.
Baró, J.,"Descomposición del índice de concentración de los ingresos en España", Comunicación, IV Reunión Asepelt-España, juny 1990.
Mehran, F.,"A Statistical Analysis of Income Inequality Based on a Descomposition of the Gini Index", Proceedings International Statistical Institute, 40 th. session, Warsaw, 1975.

$$G_1 = G(\xi/\xi \leq Mi)$$
$$G_2 = G(\xi/\xi > Mi)$$

$G = 0.5\ q(p(Mi))\ G_1 + 0.5\ (1-q(p(Mi)))\ G_2 + 0.5 - q(p(Mi))$

1985	$= 0.06325\ G_1$	$+ 0.43675\ G_2$	+0.3735
1986	$= 0.06995\ G_1$	$+ 0.43005\ G_2$	+0.3601
1987	$= 0.07885\ G_1$	$+ 0.42115\ G_2$	+0.3423
1988	$= 0.08320\ G_1$	$+ 0.41680\ G_2$	+0.3336
1989	$= 0.07905\ G_1$	$+ 0.42095\ G_2$	+0.3419
1990	$= 0.07531\ G_1$	$+ 0.42469\ G_2$	+0.3493
1991	$= 0.07844\ G_1$	$+ 0.42155\ G_2$	+0.3431

Tabla 6-14.

on el terme independent és la desigualtat existent entre els dos grups i la resta, la desigualtat dins de cada grup, observant que el major efecte marginal dins del primer grup es produeix al 1988 i el major per al segon grup al 1985.

b.- Quan el punt discriminador és la mitja:

$$G_1 = G(\xi/\xi \leq \mu)$$
$$G_2 = G(\xi/\xi > \mu)$$

$G = p_\mu\ q(p_\mu)G_1 + (1-p_\mu)\ (1-q(p_\mu))G_2 + p_\mu - q(p_\mu))$

1985	$= 0.2284\ G_1$	$+ 0.1734\ G_2$	+0.4464
1986	$= 0.2130\ G_1$	$+ 0.2011\ G_2$	+0.4145
1987	$= 0.2290\ G_1$	$+ 0.1931\ G_2$	+0.3959
1988	$= 0.2443\ G_1$	$+ 0.1820\ G_2$	+0.3887
1989	$= 0.2418\ G_1$	$+ 0.1797\ G_2$	+0.4009
1990	$= 0.2353\ G_1$	$+ 0.1818\ G_2$	+0.4104
1991	$= 0.2428\ G_1$	$+ 0.1781\ G_2$	+0.4027

Tabla 6-15.

observant que l'índex global és més sensible ara a les variacions dins del primer grup que dins les del segon.

c.- Quan el punt discriminador és la mitjala:

$$G_1 = G(\xi/\xi \leq Ml)$$
$$G_2 = G(\xi/\xi > Ml)$$

$G = 0.5\ p(Ml)G_1+0.5\ (1-p(Ml))G_2+p(Ml)-0.5$

1985	$= 0.44720\ G_1$	$+ 0.0527\ G_2$	+0.3945
1986	$= 0.43105\ G_1$	$+ 0.0689\ G_2$	+0.3621
1987	$= 0.42620\ G_1$	$+ 0.0737\ G_2$	+0.3525
1988	$= 0.42590\ G_1$	$+ 0.0740\ G_2$	+0.3519
1989	$= 0.43050\ G_1$	$+ 0.0694\ G_2$	+0.3611
1990	$= 0.43330\ G_1$	$+ 0.0666\ G_2$	+0.3666
1991	$= 0.43160\ G_1$	$+ 0.0683\ G_2$	+0.3632

Tabla 6-16.

Ara, l'índex global és més sensible a les variacions dins del primer grup i molt menys a les variacions dins del segon grup.

6.3. MODEL QUADRÀTIC

L'esquema que se seguirà en l'estudi d'aquest model és el mateix que per al model especificat per Kakwani, i, per tant, els comentaris faran només referència als resultats obtinguts en les diferents mesures de concentració.

6.3.1. Primera mesura

$$D= p(Mi) - q(p(Mi))$$

Volum de vendes de les empreses quan es divideixen en dos grups amb el mateix nombre d'empreses:

q(p)	1986	1987	1989
Del primer grup	0.15038	0.16528	0.17172
Del segon grup	0.84962	0.83472	0.82828

	1989	1990
	0.16326	0.15694
	0.83674	0.84305

Tabla 6-17.

La tendència que s'observa és la mateixa: el segon grup conté un volum de vendes molt superior al del primer grup, aproximadament 4.8 vegades superior.

La desigualtat en aquest punt, s'observa que presenta la mateixa ordenació que l'índex de Gini:

Any	D= 0.5 - q(p(Mi))
1986	0.34962
1987	0.33472
1988	0.32828
1989	0.33674
1990	0.34305

Tabla 6-18.

Quant a les relacions entre el valor mig de la mostra i el valor mig en cadascun dels dos grups d'empreses,

	1986	1987	1988
1/ (2 q(p(Mi)))	3.3249	3.02516	2.9117
2 (1- q(p(Mi)))	1.69924	1.66944	1.65656

	1989	1990
	3.06259	3.18593
	1.67348	1.68612

Tabla 6-19.

indica que el volum de vendes mig de les majors empreses triplica o més el volum de vendes mig de les empreses restants.

6.3.2. Segona mesura

$$D= p(Ml) - q(p(Ml))$$

La diferència que presenta el volum d'empreses que agrupen el primer 50% del volum de vendes totals amb el volum d'empreses que agrupa el segon 50% també és significativa: aproximadament el primer estrat d'empreses aglutina 8 vegades més que el segon estrat. Poques empreses s'emporten més de la meitat del volum de vendes totals.

Volum d'empreses	1986	1987	1988
Ingressos < Ml	0.8943	0.8837	0.88003
Ingressos > Ml	0.1057	0.1163	0.11997

	1989	1990
	0.8879	0.8932
	0.1121	0.1067

Tabla 6-20.

La mesura de concentració presenta la mateixa ordenació que l'anterior:

Any	D= p(Ml)- 0.5
1986	0.39430
1987	0.38370
1988	0.38003
1989	0.38790
1990	0.39320

Tabla 6-21.

6.3.3. Tercera mesura

Figura 6-11

El volum de vendes corresponent a cadascun dels quatre grups en què s'ha dividit el nombre d'empreses serà:

q(p)	1986	1987	1988
si $p< Q_1$	0.06069	0.06872	0.06638
si $Q_1 \leq p < Q_2$	0.08969	0.09656	0.10029
si $Q_2 \leq p < Q_3$	0.15943	0.16408	0.16701
si $p \geq Q_3$	0.69019	0.67064	0.66126

	1989	1990
	0.06638	0.06331
	0.10640	0.09363
	0.16468	0.16183
	0.67205	0.68122

Tabla 6-22.

on el volum de vendes de l'any 1988 és el menor per a l'últim grup i el major per al primer grup.

I la mesura de la desigualtat serà:

Any	$D= 1-q(p(Q_3))-q(p(Q_1))$
1986	0.6295
1987	0.6019
1988	0.5898
1989	0.6151
1990	0.6179

Tabla 6-23.

De manera que manté l'ordre establert en les altres mesures.

6.3.4. Quarta mesura. L'índex de PIETRA

Figura 6-12

En primer lloc es presenta la divisió del volum d'empreses en dos grups prenent com a punt discriminador la mitja,

Volum d'empreses	1986	1987	1988
si vendes$< \mu$	0.7707	0.7684	0.7693
si vendes$> \mu$	0.2293	0.2316	0.2307

	1989	1990
	0.7729	0.7747
	0.2271	0.2253

Tabla 6-24.

Any	$D = p_\mu - q(p_\mu)$
1986	0.4411
1987	0.4213
1988	0.4120
1989	0.4230
1990	0.4323

Tabla 6-25.

Amb uns valors que segueixen la línia de les mesures anteriors. Per a l'any 1988, la diferència mitja relativa és la menor.

Les relacions entre el volum de vendes mig i el volum de vendes mig de cada grup s'indica en el quadre següent:

	1986	1987	1988
$1- q(p_\mu) / 1- p_\mu$	2.9236	2.8190	2.7858
$p_\mu / q(p_\mu)$	2.3382	2.2137	2.1530
$(1-q(p_\mu)/q(p_\mu))(p_\mu/1-p_\mu)$	6.8359	6.2404	5.9978

	1989	1990
$1- q(p_\mu) / 1- p_\mu$	2.8626	2.9189
$p_\mu / q(p_\mu)$	2.2089	2.2627
$(1-q(p_\mu)/q(p_\mu))(p_\mu/1-p_\mu)$	6.3231	6.6049

Tabla 6-26.

La interpretació d'aquestes dades és la mateixa que l' efectuada en el model de Kakwani, però constatant que els valors són lleugerament superiors en tots els casos, tal com ja ha anat succeint anteriorment.

6.3.5. Cinquena mesura. L'índex de GINI

En aquest model l'expressió de l'índex és:

Figura 6-13

amb uns resultats:

Any	Index de Gini
1986	0.571246
1987	0.545224
1988	0.536282
1989	0.553362
1990	0.564722

Tabla 6-27.

A continuació es presenten els resultats de l'índex truncat en els punts: la mitjanera, primera quartila, tercera quartila, mitjana i mitjala.

	ω_1	ω_2	1986	1987	1988
1.-	0	Mi	0.13007	0.11355	0.11304
2.-	Mi	∞	0.49869	0.47880	0.48187
3.-	0	Q_1	0.05517	0.04640	0.04679
4.-	Q_3	∞	0.43159	0.41699	0.42544
5.-	0	μ	0.25598	0.23213	0.22586
6.-	μ	∞	0.42366	0.41006	0.41956
7.-	0	Ml	0.35323	0.31935	0.30253
8.-	Ml	∞	0.35957	0.35098	0.37645

	1989	1990
1.-	0.12564	0.13037
2.-	0.49327	0.50159
3.-	0.05466	0.057703
4.-	0.44713	0.45289
5.-	0.24091	0.24957
6.-	0.44173	0.44675
7.-	0.32104	0.33499
8.-	0.4092	0.41049

Tabla 6-28.

Cal destacar que l'índex de Gini per a les cues superiors, fa que l'any amb una menor concentració sigui l'any 1987, tal i com la distribució de Pareto truncada en la mitjanera ja indica, i el model de Kakwani en la mitjanera, mitjana i mitjala també.

6.3.6. Cotes Inferior i Superior de l'índex de Gini

Cota Inferior = $p_\mu - q(p_\mu)$

Cota Superior = $2(p_\mu - q(p_\mu)) - (p_\mu - q(p_\mu))^2$

Any	Cota Inferior	Cota Superior
1986	0.4411	0.68763
1987	0.4213	0.66510
1988	0.4120	0.65425
1989	0.4230	0.66707
1990	0.4313	0.67775

Tabla 6-29.

En cap cas el recorregut de l'índex supera 0.25 tal i com es dedueix de l'expressió de la cota superior.

6.3.7. Descomposició de l'índex de Gini

Seguint el mateix ordre i procediment que en el model de Kakwani, es presenten les equacions particulars de descomposició de l'índex quan es parteix en grups el volum d'empreses segons els punts: mitjanera, mitjana i mitjala.

Figura 6-14

El primer sumatori s'interpreta com la variació que experimentaria l'índex global G davant canvis correctors de G_i, és a dir, el canvi en el grau de concentració de tota la població a causa d'una redistribució amb variació unitària en l'índex del grup ièssim. Seria la suma de la concentració existent dins de cada grup.

La resta de l'equació indica la desigualtat existent entre els diferents grups.

a.- Quan el punt discriminador és la mitjanera:

$$G_1 = G(\xi/\xi \leq Mi)$$
$$G_2 = G(\xi/\xi > Mi)$$

$G = 0.5\ q(p(Mi))\ G_1 + 0.5\ (1 – q(p(Mi)))\ G_2 + 0.5 - q(p(Mi))$

1986	$= 0.07519\ G_1$	$+ 0.42481\ G_2$	+0.34962
1987	$= 0.08264\ G_1$	$+ 0.41736\ G_2$	+ 0.33962
1988	$= 0.08586\ G_1$	$+ 0.41414\ G_2$	+ 0.32828
1989	$= 0.08163\ G_1$	$+ 0.41837\ G_2$	+0.33674
1990	$= 0.07947\ G_1$	$+ 0.42152\ G_2$	+0.34305

Tabla 6-30.

El major efecte marginal dins del primer grup es troba l'any 1988, i dins del segon grup l'any 1986.

b.- Quan el punt discriminador és la mitjana:

$$G_1 = G(\xi/\xi \leq \mu)$$
$$G_2 = G(\xi/\xi > \mu)$$

$G = p_\mu\ q(p_\mu)\ G_1 + (1-p_\mu)(1-q(p_\mu))\ G_2 + p_\mu – q(p_\mu))$

1986	$= 0.25402\ G_1$	$+ 0.15372\ G_2$	+0.4411
1987	$= 0.26671\ G_1$	$+ 0.15121\ G_2$	+ 0.4213
1988	$= 0.27487\ G_1$	$+ 0.14827\ G_2$	+ 0.4120
1989	$= 0.27043\ G_1$	$+ 0.14763\ G_2$	+0.4230
1990	$= 0.26523\ G_1$	$+ 0.14816\ G_2$	+0.4323

Tabla 6-31

L'efecte marginal és major en el primer grup que en el segon grup, tal i com succeeix en el model de Kakwani.

c.- Quan el punt discriminador és la mitjala:

$$G_1 = G(\xi/\xi \leq Ml)$$
$$G_2 = G(\xi/\xi > Ml)$$

$G = 0.5p(Ml)G_1+0.5(1-p(Ml))G_2+p(Ml)-0.5$

1986	$= 0.44715\ G_1$	$+ 0.05285\ G_2$	$+0.39430$
1987	$= 0.44185\ G_1$	$+ 0.05815\ G_2$	$+ 0.38370$
1988	$= 0.44001\ G_1$	$+ 0.05998\ G_2$	$+ 0.38003$
1989	$= 0.44395\ G_1$	$+ 0.05605\ G_2$	$+ 0.38790$
1990	$= 0.44661\ G_1$	$+ 0.05342\ G_2$	$+ 0.39320$

Tabla 6-32.

on es veu que l'efecte marginal és molt més elevat en el primer que en el segon grup.

CAPÍTOL 7. CONCLUSIONS

7.1. CONCLUSIONS DE LA PART TEÓRICA

El primer objectiu d'aquest treball ha estat **l'estudi de la corba de Lorenz com a instrument per mesurar la desigualtat de la variable objecte d'estudi**, és a dir, l'instrument per destacar les diferències del volum de variable posseïda pels diferents elements de la població, per la qual cosa s'ha estudiat només la mesura estadística sense entrar en criteris ètics sobre la desigualtat.

Mantenint la línia en què s'ha estructurat aquest treball, s'agruparan les conclusions que se'n desprenen en dues categories:

a.- Conclusions relatives a la part teòrica i que fan referència a les característiques dels models teòrics i a la validesa dels principals indicadors.

b.- Conclusions relatives a la part aplicada, relatives a la distribució empírica de la xifra de vendes d'una mostra d'empreses que pertanyen bàsicament al sector agroalimentari de LLeida, i que en condicions habituals superen els 1.000 milions de pessetes de volum de vendes.

7.1.1. Característiques Generals

Un cop definida la corba de concentració i les seves propietats s'han donat dos camins per a l'obtenció de la corba, camins que fins ara no s'han estipulat com a tals malgrat el seu ús:

Expressió de la corba quan la variable és la pròpia variable aleatòria:

Figura 7-1

Expressió de la corba quan la variable és la funció de distribució:

Figura 7-2

S'ha definit també **la corba de concentració truncada**, com la corba de concentració d'una variable aleatòria a la qual se li acota el recorregut en punts considerats econòmicament interessants,

Figura 7-3

Cinc han estat les **característiques** que s'han analitzat de la corba de concentració:

1.- La seva invariabilitat davant canvis d'escala de la variable aleatòria.

Prenent com a exemple la corba derivada del model de Pareto i efectuant un canvi d'escala,

Figura 7-4

2.- La sensibilitat als canvis d'origen de la variable aleatòria.

Un exemple clar es troba quan el model Exponencial es desplaça de l'origen de forma que la nova funció és,

Figura 7-5

3.- El "màxim" de la funció de concentració, és a dir, aquell punt en què la distància entre la corba i la recta igualitària és màxima, i,

Figura 7-6

Per tant, en el punt μ, la distància esmentada és màxima,

Figura 7-7

que correspon amb:

- el vèrtex del major triangle que es pot inscriure dins la corba, el qual es considera com la cota inferior de l'índex de Gini,

- l'índex de Pietra, índex que posteriorment es considera com una bona mesura de concentració.

4.- La simetria de la corba respecte a la bisectriu secundària. De manera que si,

Figura 7-8

I, per altra banda, es pot calcular una corba simètrica en una altra, qüestió que pot ser útil si s'estudien dues corbes provinents de dues distribucions diferents amb concentracions iguals. Així partint de la corba originària:

Figura 7-9

5.- L'elasticitat de la corba. Veiem davant els canvis que presenta p, la variació que sofreix la corba de concentració, i, per tant, el grau de concentració de la distribució objecte d'estudi, característica que pot ajudar a analitzar les variacions en la concentració davant una redistribució dels elements que s'estudien.

7.1.2. Models Teòrics

D'altra banda, a partir de models de probabilitat teòrics amb un interès econòmic o empresarial, **s'han calculat les corbes de concentració que se'n deriven.** També s'han estudiat **aquelles corbes de concentració proposades per diferents autors que no provenen de densitats conegudes**.

El criteri que s'ha considerat en estudiar els models de probabilitat teòrics és analitzar-los a mesura que es dedueixen de la funcó Gamma Generalitzada i la funció Beta de 1r i 2n ordre. D'aquesta manera s'han obtingut corbes de concentració amb densitats conegudes, que en alguns casos resulten poc operatives, però que són resultats interessants.

Distribució Beta biparamètrica.

S'ha expressat la corba quan la variable és la pròpia variable aleatòria, Figura 7-10

Distribució Beta uniparamètrica.

La funció de concentració s'ha calculat a partir de la funció inversa, Figura 7-11

Distribució Log-logística.

La corba es calcula utilitzant la via anterior, Figura 7-12

Distribució Gamma.

S'ha obtingut a l'igual que per a la distribució Beta bi-paramètrica, Figura 7-13

Distribució Exponencial.

S'ha utilitzat la via de la funció inversa, Figura 7-14

Distribució de Weilbull.

També s'ha expressat la corba quan la variable és la variable aleatòria, Figura 7-15

Distribució Log-normal.

S'ha calculat com l'anterior, Figura 7-16

Distribució de Pareto.

S'ha expressat la corba quan la variable és la funció de distribució, Figura 7-17

Distribució de Zipf.

Igual que l'anterior,

Figura 7-18

Distribució Uniforme.

Segueix en la mateixa línia que les dues anteriors,

Figura 7-19

7.1.3. Índex de Gini

Les mesures de concentració que s'analitzen són aquelles que deriven directament de la corba de concentració, és a dir, expressions que utilitzen la superfície o distància entre la recta igualitària i la pròpia corba o altres expressions equivalents. Un cop discutits els indicadors comunament utilitzats, l'estudi s'ha centrat en l'Índex de Gini perquè proporciona un promig entre totes les distàncies existents entre tots els punts de la recta d'equidistribució i la corba de concentració i a més la varietat d'interpretacions que se'n deriven el fan un dels instruments més emprats.

a.- L'índex en funció del valor mig de la massa acumulada de variable.

Figura 7-20

b.- L'índex com el doble del valor mig de la discrepància o bé √8 vegades el valor mig de la distància mínima,

Figura 7-21

c.- L'índex és el quadruple del valor mig de l'àrea dels triangles inscrits dins la corba amb vèrtex en cada punt de la mateix corba,

Figura 7-22

d.- L'índex s'interpreta com la desviació mitja relativa ponderada amb 2p,

Figura 7-23

e.- L'índex és la meitat de la diferència mitja relativa,

Figura 7-24

f.- L'índex en termes d'una nova funció,

Figura 7-25

g.- L'índex de Gini d'una distribució truncada, és a dir, càlcul de la concentració en acotar el recorregut de la variable en dos nous extrems,

Figura 7-26

que, aplicat en els punts considerats anteriorment, es particulatiza en:

Figura 7-27

A més a més, per l'Índex de Gini s'han analitzat les cotes inferior i superior davant la necessitat de trobar uns extrems més viables, cotes que s'han calculat per les diferents corbes de concentració estudiades.

La cota inferior es calcula a partir del major triangle que es pot inscriure dins la corba de concentració amb vèrtex en el punt, $(p_\mu, q(p_\mu))$, arribant a la conclusió que és igual a l'índex de Pietra, o bé, a la meitat de la diferència mitja relativa,

Figura 7-28

Una primera cota superior esdevé de considerar el doble de l'àrea del menor triangle en què es pot inscriure la corba de concentració, però el resultat comporta que quan la funció de distribució està definida en $(0, \infty)$, la cota valgui 1. Això obliga a afinar una mica més i per aquest motiu es divideix la població en tres subgrups, obtenint una cota superior que determina la pitjor distribució compatible amb la informació disponible,

Figura 7-29

7.1.4. LListat de l'Índex de Gini i de les Cotes Superior i Inferior corresponents als models teòrics obtinguts

Tot seguit es presenta l'índex de Gini amb les seves cotes corresponents de les distribucions teòriques estudiades anteriorment,

Distribució Beta biparamètrica.

Figura 7-30

Distribució Beta uniparamètrica.

Figura 7-31

Distribució Gamma.

Figura 7-32

Distribució Exponencial.

Figura 7-33

Distribució de Weilbull.

Figura 7-34

Distribució Log-normal.

Figura 7-35

Distribució de Pareto.

Figura 7-36

Distribució de Rasche...Obst.

Figura 7-37

Distribució de Zipf.

Figura 7-38

Distribució Uniforme.

Figura 7-39

Distribució de Gupta.

Figura 7-40

Distribució de Kakwani i Podder.

Figura 7-41

Distribució de Kakwani.

Figura 7-42

Distribució Quadràtica.

Figura 7-43

7.2. CONCLUSIONS DE LA PART PRÁCTICA

Des que es va engegar aquest treball, s'ha cregut en la necessitat d'aplicar empíricament els coneixements teòrics sobre concentració, és a dir, buscar un model de concentració d'una variable de tipus econòmic que s'adapti a una mostra donada per estudiar posteriorment el grau de desigualtat.

En primer lloc, la variable econòmica triada és **el volum de vendes** d'empreses localitzades a la província de LLeida[95].

En segon lloc, el sector al qual pertanyen les 55 empreses és majoritàriament el sector agroalimentari, el qual es considera el sector amb major importància davant el conjunt de l'economia lleidatana.

I en tercer lloc, les 55 empreses en condicions habituals superen els 1.000 milions de pessetes de volum de vendes, i s'han considerat les vendes fins l'any 1991 ja que en aquests

[95] S'ha cregut oportú estudiar la província de Lleida, ja que és la zona en la qual s'ha efectuat el treball i sobre la qual no s'ha fet encara un treball de concentració.

moments no es disposa encara de les dades de l'any 1992.

En un primer intent de modelització, no tots els models responien a la realitat empírica observada, per la qual cosa finalment s'ha optat per dos grups de models:

a.- Model Log-normal i Model Gamma.
b.- Model Quadràtic, Model especificat per Kakwani, Model especificat per Kakwani i Podder i Model de Pareto.

Aquests grups responen a la metodologia utilitzada en el càlcul dels paràmetres, així pel primer grup s'han estimat els coeficients des de la funció de densitat i pel segon grup des de la corba de concentració.
Model Log-normal i Model Gamma.

7.2.1. Model Log-normal

Com que l'objectiu és veure si la distribució empírica s'adapta a un model de concentració derivat de la llei log-normal i posteriorment analitzar la desigualtat utilitzant l'índex de Gini, i com que el model i l'índex depenen d'uns paràmetres, s'han estimat aquests paràmetres des de la funció de densitat pel mètode màximo-versemblant. El motiu pel qual s'ha cregut oportú ferho així, ha estat la dificultat d'estimar els coeficients des de la corba de concentració que s'ha obtingut en el capítol 2.

En un principi, és un model que s'adapta prou bé a les característiques de la variable objecte d'estudi i a la mostra donada: les vendes estan acotades pel valor 0 i la distribució empírica presenta una asimetria a la dreta. Però l'estimació i les dues proves d'adherència revelen que les diferències entre la distribució empírica i la llei teòrica de probabilitat ajustada són significatives.

Malgrat tot això, l'índex de Gini indica que l'any amb una menor concentració és 1988,

Figura 7-44

i l'any amb una major concentració és 1985, dades que coincideixen amb les obtingudes de distribucions que s'ajusten posteriorment.

Model Gamma.

El raonament que s'ha seguit a l'hora d'ajustar la distribució empírica al model de concentració derivat de la llei Gamma, ha estat el mateix que per al model Log-normal.

L'estimació dels paràmetres i les dues proves d'adherència fan rebutjar la hipòtesi que la distribució del volum de vendes de les empreses estudiades segueixi una llei Gamma.

A l'igual que en el model anterior, l'índex de Gini,

Figura 7-45

també indica els mateixos anys de menor i major concentració.

7.2.2. Model Quadràtic, Model de Kakwani, Model de Kakwani i Podder, i Model de Pareto

L'objectiu segueix sent el mateix, però aquests models s'han estimat directament ja que no deriven de cap llei coneguda i són models que s'han dissenyat per ser corbes de concentració.

Per a la seva estimació s'utilitza el mètode de mínims quadrats prèvia linealització i transformació. Els resultats d'aquesta estimació indiquen que són models que s'adapten a la distribució empírica, ja que la prova F és significativa i R^2és suficientment elevat.

Cal esmentar que el model quadràtic no ha funcionat pels anys 1985 i 1991, però per la resta d'anys sí, qüestió que reafirma el fet que els models no han de funcionar per a tot un seguit d'anys i per a una mateixa mostra.

Per a tots els models, exceptuant el model de Pareto, l'índex de Gini presenta una mateixa tendència de la concentració de forma que l'any amb menor desigualtat és 1988 i l'any de major desigualtat 1985:

Any	Kabyani	Kalavani i Podder	Quadratie
1985	0.6045	0.5820	--
1986	0.5580	0.5479	0.5712
1987	0.5332	0.5218	0.5452
1988	0.5258	0.5134	0.5362
1989	0.5422	0.5297	0.5533
1990	0.5539	0.5395	0.5647
1991	0.5460	0.5299	--

Tabla 7-1.

En concret, per al model de Pareto s'ha estimat una corba truncada en la mitjanera ja que és una funció que s'adapta molt bé als valors més alts de la variable. Cal remarcar que per a aquest model, l'índex de Gini pren el menor valor l'any 1987, a diferència de quan s'analitza l'índex per al total de la mostra i en els models restants. Però quan s'estudia l'índex de Gini més profundament en el model quadràtic i en el model de Kakwani i Podder i, en concret, es calcula l'índex del 50% de les empreses de major volum de vendes (i d'altres cues superiors de la distribució) el resultat que s'obté és el mateix que en el model de Pareto truncat,

Any	$G_T = [\xi/Mi<\xi<\infty$
1985	0.4765
1986	0.4012
1987	0.3948
1988	0.4060
1989	0.4208
1990	0.4279
1991	0.4297

Tabla 7-2.

A partir de l'estimació d'aquests models, se n'han triat dos per aprofundir en l'estudi de la concentració, és a dir, en el càlcul de mesures directament relacionades amb la corba de

Lorenz, en les relacions entre valors mitjos, en el càlcul de l'índex de Gini, en l'índex truncat, en les cotes de l'índex de Gini i en la seva descomposició.

Els dos models triats han estat el model especificat per Kakwani i el model Quadràtic i s'han escollit perquè han ofert bons ajustaments i, a més, permeten amb més fluidesa els càlculs necessaris per obtenir totes les mesures i relacions ja esmentades[96].

En els dos models es desprèn que l'any de menor concentració és 1988 i amb totes les mesures i relacions utilitzades, l'ordenació dels anys en funció de la concentració és la mateixa. Tanmateix es veu com les mesures indicatives de distàncies entre la corba i la recta d'equidistribució en un punt en concret donen valors inferiors a 0.5 i, en canvi, aquelles mesures que són promig de més d'un punt donen valors superiors a 0.5.

Cal destacar també, que els índexs majors es troben en els extrems superiors, és a dir, aquesIls grups d'empreses que acaparen la major part del volum de vendes.

Si s'analitza la relació existent entre la concentració referent a l'any 1988 i l'Índex de Producció Industrial[97] es detecta un lligam entre els dos paràmetres. L'IPI és un índex elaborat per l'Institut Nacional d'Estadística que té per objectiu indicar l'evolució en volum de la part del PIB que té el seu origen en la indústria i el qual es considera com el més útil per al seguiment de l'activitat industrial.

En l'estudi efectuat per E.Morales i A.Espasa, l'IPI mostra una evolució creixent des de l'any 1985 fins l'any 1989 moment en el qual experimenta un canvi radical. És l'any 1988 on l'IPI presenta el seu major valor (considerant el període 81-91) indicant doncs, que a ser l'any amb un major creixement de l'activitat industrial, qüestió que afavoreix una disminució de la concentració en el volum de vendes, ja que en augmentar l'activitat econòmica, moltes més empreses tenen cabuda en l'economia i no es concentra tant la producció en poques empreses, mentre que en disminuir la producció, les empreses més febles cauen i, per tant, la producció es concentra en les més fortes, augmentant la concentració econòmica.

Les mesures i relacions que s'han calculat són:

a.- $D= p_{Mi}- q(p_{Mi})$

Any	Model Kakwani	Model Quadratic
1985	0.37	--
1986	0.36	0.34
1987	0.34	0.33
1988	0.33	0.32
1989	0.34	0.33
1990	0.34	0.34
1991	0.34	--

Tabla 7-3.

Tal i com ja s'ha afirmat, l'any de menor concentració és 1988 i, per tant, quan

96 Per exemple amb el model especificat per Kakwani i Podder són necessaris mètodes numèrics d'integració.
97 Espasa, A. i Cancedo, J.R.,"Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica", Alianza Editorial, Madrid 1993".

s'analitza el valor del volum de vendes de les empreses que estan per damunt i davall de la mitjanera, es detecta com les empreses situades per damunt prenen en més d'un 80% el volum de vendes de la mostra i en concret per l'any de menor concentració un 83.36% pel model de Kakwani i un 82.82% pel quadràtic, xifra que lògicament si es compara amb la resta d'anys és la menor en els dos models.

Pel que fa a les relacions entre el volum de vendes mig de tota la mostra i el volum de vendes mig de cadascun dels dos grups si es divideix la mostra en la mitjanera, cal destacar com és óbvi que l'any de menor concentració el valor de les relacions disminueix.

Any	Model K $E[\xi] / E[\xi/\xi \geq Mi]$	Model Q	Model K $E[\xi/\xi > Mi]\ E[\xi]$	Model Q
1985	3.95	--	1.74	--
1986	3.57	3.32	1.72	1.69
1987	3.17	3.02	1.68	1.66
1988	3.00	2.91	1.66	1.65
1989	3.16	3.06	1.68	1.67
1990	3.31	3.18	1.69	1.68
1991	3.18	--	1.68	--

Tabla 7-4.

En aquesta primera mesura i en aquestes relacions entre valors migs el model de Kakwani ofereix valors més alts que el model Quadràtic encara que l'ordenació dels anys és la mateixa.

b.- $D= p_{M1} - q\ (p_{M1})$

Aquesta mesura equival a la distància entre la corba i la recta d'equidistribució quan la massa acumulada de la variable es divideix en dues parts iguals,

Any	Model Kakwani	Model Quadratic
1985	0.39	--
1986	0.36	0.39
1987	0.35	0.38
1988	0.35	0.38
1989	0.36	0.39
1990	0.36	0.39
1991	0.36	--

Tabla 7-5.

L'any de menor concentració continua essent 1988 i els valors que s'obtenen amb la corba de Kakwani són inferiors als de la Quadràtica.

S'observa com amb les dues corbes, aproximadament un 11% de les empreses acumulen el 50% de les vendes totals de la mostra.

c.- $D= 1- q(p_{Q1}) - q(p_{q3})$

Aquesta mesura segueix la línia de l'anterior, però divideix en quatre grups iguals el total d'empreses i s'arriba a les conclusions que fins ara s'han exposat,

Any	Model Kakwani	Model Quadratic
1985	0.65	----
1986	0.61	0.62
1987	0.58	0.60
1988	0.57	0.58
1989	0.59	0.61
1990	0.60	0.61
1991	0.59	----

Tabla 7-6.

d.- Index de Pietra = p_{μ}- $q(p_{\mu})$

Es correspon amb la distància de la corba a la recta en el punt en el qual la primera presenta un pendent unitari i, a més, equivalent a la desviació mitja relativa de la variable,

Any	Model Kakwani	Model Quadratic
1985	0.44	--
1986	0.41	0.44
1987	0.39	0.42
1988	0.38	0.41
1989	0.40	0.42
1990	0.41	0.43
1991	0.40	--

Tabla 7-7.

El grup d'empreses que superen el volum de vendes mig de la mostra l'any 88 suposa un 27.45% en el model de Kakwani i un 23.07% en el quadràtic del total d'empreses, valor superior si es considera el grup amb més del 50% del volum de vendes (14.81% Kakwani i 11.99% Quadràtica).

Prenent com a punt divisori el volum de vendes mig de la mostra, les relacions entre el volum de vendes esperat de cada grup i el volum de vendes de tota la mostra, indiquen que l'any 1988 el grup d'empreses que supera aquest punt presenta un volum de vendes mig, respectivament per a cada model, superior en 5.20 i 5.99 vegades el de l'altre grup i supera en 2.41 i 2.78 vegades al de la mostra total.

e.- Index de Gini= 1- 2 E[q(p)]

És una mesura que proporciona un promig de totes les distàncies existents entre tots els punts de la corba, fet que el converteix en una bona mesura de concentració.

Any	Model Kakwani	Model Quadratic
1985	0.60	--
1986	0.55	0.57
1987	0.53	0.54
1988	0.52	0.53
1989	0.54	0.55
1990	0.55	0.56
1991	0.54	--

Tabla 7-8.

Analitzant l'índex de Gini truncat en uns determinats punts (mitjanera, mitjana, mitjala i quartils) de la distribució del volum de vendes es veu clarament com els índexs majors es localitzen en els extrems superiors.

Amb el càlcul de les cotes de l'índex de Gini, s'han obtingut els següents resultats,

$CI = p_{\mu} - q(p_{\mu})$
$CS = 2CI-(CI)^2$

Any	Model Kakwani Cota Inferior	Cota Superior	Model Quadratic Cota Inferior	Cota Superior
1985	0.45	0.69	--	--
1986	0.41	0.65	0.44	0.68
1987	0.39	0.63	0.42	0.66
1988	0.38	0.62	0.41	0.65
1989	0.40	0.64	0.42	0.66
1990	0.41	0.65	0.43	0.67
1991	0.40	0.64	--	--

Tabla 7-9.

En cap cas el recorregut de l'índex supera 0.25 tal i com es dedueix si es calcula el recorregut màxim de l'índex especificat en el capítol 4.

I per últim s'ha efectuat una descomposició de l'índex estratificant en K grups la mostra d'empreses,

Figura 7-46

Els punts que han delimitat els diferents grups són: mitjanera, mitjana i mitjala:

Figura 7-47

En aquest cas particular i en els dos models, el major efecte marginal dins del primer grup es produeix per a 1988 i dins el segon grup per al 1985 (per al model Quadràtic 1986, ja que 1985 no s'ha analitzat), i la desigualtat existent entre els grups és menor l'any 1988. L'índex global és més sensible a les variacions del segon grup.

Figura 7-48

El major efecte marginal dins del primer gruup es produeix també l'any 1988 i dins del segon, l'any 1986, tant en el model de Kakwani com en el quadràtic. En aquest cas l'índex de Gini global és més sensible a les variacions del primer grup amb una desigualtat menor entre grups per a l'any 1988.

Figura 7-49

L'índex global en els dos models és més sensible a les variacions del primer grup (molt més que en el cas particular anterior), on l'efecte marginal menor es produeix l'any 1988. Aquest mateix any, la desigualtat entre els dos grups segueix sent menor, tal i com succeeix en estratificar la mostra en els punts ja estudiats.

BIBLIOGRAFIA

ACTUALIDAD ECONÓMICA (1991)
Las mayores empresas españolas.
Núm. 1743, del 18 al 24 de novembre del 1991.

AITCHISON, J. i BROWN, J. (1957)
"The Lognormal Distribution with Special Reference to its Uses in Economics".
Cambridge University Press.

ALCAIDE, A. (1979)
Estadística aplicada a las Ciencies Sociales.
Editorial Pirámide. Madrid.

ALDOMÀ, I. i altres (1992)
L'economia lleidatana i el mercat interior europeu de 1993.
Patronat Català Pro-Europa.

ALEGRE, A. (1980)
"Sobre las distintas medidas de la distribución estadística".
Anales del Instituto de Actuarios Españoles, núm. 21, Madrid.

AMOROSO, L. (1925)
"Ricerche in torno alla curva dei redditti".
Annali di Matematica pura ed applicata. Serie 6, núm. 2.

ARNOLD, B. (1986)
"A class of hyperbolic Lorenz curves".
Sankhya, 48 B, pàgs. 427-436.

ATKINSON, A.B. (1970)
"On the Measurement of Inequality".
Journal of Economic Theory, vol. 2, pàgs. 244-263.

BALCKBURN, L. (1989)
"Interpreting the magnitude of changes in measures of income inequality"
Journal of Econometrics, vol. 42, pàgs. 21-25.

BANCO DE BILBAO
Renta Nacional de España y su distribución provincial.
Bilbao. Anys 1975 al 1989.

BARÓ, J. (1982)
Distribución Personal de la renta. Medidas y leyes de desigualdad.
Tesis Doctoral. Fac. CC.EE. Barcelona.

BARÓ, J. (1983)
"El uso de los cuartiles en la medición de la desigualdad de la renta".
Cuadernos de Economía, vol. 2, núm. 30.

BARÓ, J. (1989)
"Descomposición del índice de Gini".
Comunicació. III Reunión ASEPELT-España, juny 1989. Sevilla.

BARÓ, J. (1990)
"Descomposición del índice de concentración de los ingresos en España"
Comunicació. IV Reunión ASEPELT-España, juny 1990. Murcia.

BARÓ, J. (1991)
Aplicaciones del modelo de concentración de Kakwani al análisis de la distribución de la renta.
Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, març 1991.
Universitat de Barcelona.

BARÓ, J. i MORATAL, J. (1984)
"Concentración y Distribuciones truncadas".
Qüestió, vol. 8, núm. 3.

BARÓ, J. i TORRELLES, E. (1989)
Sobre las medidas de concentración.
Monografia de l'Institut d'Estudis Laborals, març 1989.
Universitat de Barcelona.

BARTELS, C. (1977)
"Economic Aspects of regional Welfare: Income distribution and enemployment".
M. Nijhoff.

BASMANN, R.L. i altres (1990)
"A general function form for approximating the Lorenz curve".
Journal of Econometrics, núm. 43, pàgs. 77-90.

BEACH, C. i KALISKI, F. (1984)
"Lorenz Curve Inference with Sample Weights: an Application to the Distribution of Unemployment Experience".
Applied Statistics, núm. 1, pàgs. 38-45.

BEY, P. i HOWE, M. (1984)
"Gini's mean difference and portfolio selection: an empirical evaluation".
Journal of Financial and Quantitative analysis, vol. 19, núm. 3, pàgs. 329-337.

BOURGUIGNON, F. (1979)
"Decomposable income inequality measures".
Econometrica, vol. 47, núm. 4, pàgs. 901-920.

BUDD, E. (1970)
"Distribution Issues: Trends and Policies. Postwar Changes in the Size Distribution of Income in the U.S.".
American Economic Review, núm. 60, pàgs. 247-260.

CALOT, G. (1970)
Curso de Estadística Descriptiva.
Paraninfo. Madrid.

CHAKRAVARTY, S. (1988)
"Extended Gini indices of inequality".
International Economic Review, vol. 29, núm. 1, pàgs. 147-155.

CHAMPERNOWNE, D. (1953)
"A model of income distribution".
The Economic Journal, vol. 63, pàgs. 318-351.

CHAMPERNOWNE, D. (1974)
"A comparison of measures of inequality of income distribution".
The Economic Journal, vol. 2, pàgs. 787-816.

CRONIN, D. (1979)
"A Function for the Size Distribution of Income".
Econometrica, vol. 47, pàgs. 773-774.

DAGUM, C. (1977)
"El modelo log-logístico y la distribución del ingreso en Argentina".
El Trimestre económico, núm. 176, pàgs. 837-864.

DAGUM, C. (1979)
"The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio".
Economie Apliqueé, núm. 33, pàgs. 327-367.

DAGUM, C. (1980)
"Inequality Measures Between Income Distributions with applications".
Econometrica, vol. 48, pàgs. 1791-1803.

DAGUM, C. (1980)
"Sistemas generadores de distribución del ingreso y la ley de Pareto".
El Trimestre económico, vol. 37, núm. 188, pàgs. 877-917. México.

DAVIS, H. (1941)
"The Analysis of Economic Time Series".
The Principia Press. Bloomington, Indiana.

DEPARTAMENT D'ECONOMIA I FINANCES. (1991)
Estudi Econòmico-financer de l'empresa catalana. Exercicis 1988-1989. I anàlisi de tendències. Període 1986-1989.
Direcció General de Programació Econòmica, núm. 1.

ESCUDER, R. (1986)
Estadística Económica y Empresarial.
Tebar Flores.

ESCUDER, R. (1987)
Métodos estadísticos aplicados a la economia.
Ariel Economia.

ESPASA, A. i CANCEDO, J. (1993)
Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica.
Alianza Editorial, Madrid.

ESTEBAN, J. (1977)
"La medición de la desigualdad de rentas".
Revista Moneda y Crédito, núm. 141.

ESTEBAN, J. (1980)
"Algunos resultados sobre la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini".
Cuadernos de Economía, núm. 22, pàgs. 191-224.

FELLMAN, J. (1976)
"The effect of Transformations on Lorenz Curves".
Econometrica, vol. 44, pàgs. 823-824.

FERRER, R. i altres (1992)
Análisis de datos en ciencias del comportamiento. Introducción al paquete estadístico SPSS/PC+.

FISK, P. (1961)
"The Graduation of Income Distributions".
Econometrica, vol. 29, pàgs. 171-185.

FLIK, R. (1990)
"Definiciones de límites subjetivos de pobreza".
Información Comercial Española, Revista de Economía, pàgs. 9-21.

FRUDE, N. (1991)
SPSS/PC+
Editorial RA-MA.

GAIL, M. i GASTWIRTH, J. (1978)
"A Scale-Free Goodness-of-Fit Test for the Exponential Distribution Based on the Lorenz Curve".
Journal of the American Statistical Association, vol. 73, núm. 364, pàgs. 787-793.

GASTWIRTH, J. (1971)
"A general definition of the Lorenz curve".
Econometrica, vol. 39, núm. 6, pàgs. 1037-1039.

GASTWIRTH, J. (1972)
"The estimation of the Lorenz Curve and Gini Index".
The Review of Economics and Statistics, vol. 54, núm.3, pàgs. 306-316.

GASTWIRTH, J. i NAYAK, K. (1989)
"Statistical properties of measures of between-group income differentials".
Journal of Econometrics, vol. 42, pàgs. 5-19.

GIL, S. (1985)
Organización Industrial. Aspectos metodológicos y aportaciones empíricas. Publicació Interna.

GINI, C. (1932)
"Intorno alle curve di concentrazione".
Metron, vol. 9, núm. 3-4, pàgs. 3-76.

GINI, C. (1953)
Curso de Estadística.
Editorial Labor, segona edició.

GIORGI, G. (1984)
"Alcune considerazioni teoriche su di un vecchio ma pur sempre attuale indice: il rapporto di concentrazione del Gini".
Metron, vol. 42, núm. 3-4.

GIORGI, G. (1987)
"About a general method for the lower and upper distribution-free bounds on Gini's concentracion ratio from grouped data".
Statistica, núm. 2, pàgs. 171-183.

GIORGI, G. (1988)
Caratteristiche campionarie del rapporto di concentrazione".
Istituto di Statistica, núm. 67. Siena.

GIORGI, G. (1988)
Un'analisi teorica della scomponibilita del rapporto di concentrazione.
Istituto di Statistica, núm. 61. Siena.

GIORGI, G. i PALLINI, A. (1986)
"Di Talume soglie inferiori e superiori del rapporto di concentrazione".
Metron, vol. 64, núm. 1-4.

GIORGI, G. i PALLINI, A. (1987)
"About a General method for the lower and upper distribution-free bounds on Gini's concentration ratio from grouped data".
Statistica, vol. 47, núm. 2.

GUPTA, M.R. (1984)
"Functional form for estimating the Lorenz curve".
Econometrica, vol. 52, núm. 5, pàgs. 1313-1314.

HERFINDAHL, O. (1950)
"Concentration in the Steel Industry".

Disertación en la Universidad de Columbia.

HIRSELMAN, A. (1964)
"The Paternity of an Index".
American Economic Review, núm. 54, pàg. 761.

JOHNSON, N. i KOTZ, S. (1970)
"Continuous Univariate Distributions".
New York: John Wiley and Sons.

KAKWANI, N. (1977)
"Applications of Lorenz curves in economic analysis".
Econometrica, vol. 45, núm. 3, pàgs. 719-727.

KAKWANI, N. (1979)
"Issues in measuring poverty".
Advances in Econometrics, vol. 3, pàgs. 253-282.

KAKWANI, N. (1980)
"On a class of Poverty Measure".
Econometrica, vol. 48, núm. 4, pàgs. 437-446.

KAKWANI, N. (1980)
"Functional forms for estimating the Lorenz curve: a reply".
Econometrica, vol. 48, núm. 4, pàgs. 1063-1064.

KAKWANI, N. i PODDER, N. (1973)
"On the estimation of Lorenz curves from grouped observations".
International Economic Review, vol. 14, núm. 2, pàgs. 278-291.

KAKWANI, N. i PODDER, N. (1976)
"Efficient estimation of the Lorenz curve and associated inequality measures from grouped observations".
Econometrica, vol. 44, núm. 1, pàgs. 137-148.

KALIFA-ASSAD, S. (1978)
"La medición de la distribución del ingreso: Técnicas de investigación y problemas de información."
Journal of the Inter-American Statistical Institute, vol. 32, núm. 119, pàgs. 18-39.

KENDALL, M. i STUART, A. (1963)
"The advanced Theory of Statistics".
C. Griffin, vol. 1, London.

KENDALL, M. i STUART, A. (1977)
"Measures of location and dispersion".
The advanced Theory of Statistics, vol. 1, pàgs. 32-51.

KOLM, S. (1976)

"Unequal inequalities".
Journal of Economic Theory, vol. 12 i 13, pàgs. 416-442 i 82-111.

KOLM, S. (1985)
"Desigualdades desiguales I i II".
Hacienda Pública Española, núm. 95, pàgs. 318-355.

KONDOR, Y. (1971)
"An Old-New Measure of Income Inequality".
Econometrica, vol. 39, pàgs. 1041-1042.

LABROUSE, C. (1968)
Statistique.
Editorial Paraninfo. Madrid.

MANDELBROT, B. (1960)
"The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income".
International Economic Review, núm. 1, pàgs. 79-106.

McDONALD, J. (1984)
"Some generalized functions for the size distribution of income".
Econometrica, vol. 52, núm. 3, pàgs. 647-663.

McDONALD, J. (1990)
"Regression Models for positive random variables".
Journal of Econometrics, vol. 43, núm. 1/2.

McDONALD, B. i BUTLER, R. (1990)
"Regression models for positive random variables".
Journal of Econometrics, vol. 43, pàgs. 227-251.

McDONALD, J. i JENSEN, B. (1979)
"An Analysis of Estimatiors of Alternative Measures of Income Inequality Associated with the Gamma Distribution Function".
Journal of American Statistical Association, núm. 74, pàgs. 856-860.

McDONALD, J. i RAMSON, M. (1979)
"Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution of Income" Econometrica, vol. 47, núm. 6, pàgs. 1513-1526.

MEHRAN, F. (1975)
"Bounds on the Gini Index Based on Observed Points of the Lorenz Curve".
Journal of American Statistical Association, vol. 70, núm. 349, pàgs. 64-67.

MEHRAN, F. (1976)
"Linear Measures of Income Inequality".
Econometrica, vol. 44, pàgs. 805-809.

PARETO, V. (1896)

"Ecrits sur la courbe de la répartition de la richesse".
Librairie Droz.

PULIDO, A. (1972)
Estadística y técnicas de Investigación Social.
Editorial Anaya. Madrid.

RASCHE, R. i altres (1980)
"Functional forms for estimating the Lorenz curve".
Econometrica, vol. 48, núm. 4, pàgs. 1061-1062.

REVISTA DE FOMENTO DE LA PRODUCCIÓN.
ESPAÑA 25.000.
España 20.000, edició 1987.
España 20.000, edició 1988.
España 20.000, edició 1989.
España 25.000, edició 1990.
España 25.000, edició 1991.
Editor Ramon Carlos Baratech Sales.

RUIZ-CASTILLO, J. (1986)
"Problemas conceptuales en la medición de la desigualdad".
Hacienda Pública Española, núm. 101, pàgs. 17-31.

RUIZ-CASTILLO, J. (1987)
"La medición de la pobreza y de la desigualdad en España, 1980-81".
Banco de España, Servicio de Estudios Económicos, núm. 42, pàgs. 60-99.

RUIZ-MOYA, L. (1978)
"Sobre la metodologia del Indice de Gini".
Cuadernos de Economía, vol. 6, núm. 16.

SALEM, A. i MOUNT, T. (1974)
"A convenient descriptive model of income distribution: The gamma density".
Econometrica, vol. 42, núm. 6, pàgs. 1115-1127.

SCHUTZ, R. (1984)
"On the measurement of income inequality".
The American Economic Review, núm. 1, pàgs. 107-123.

SEN, P.K. (1973)
"On Economic Inequality".
Oxford University Press. London.

SEN, P.K. (1976)
"The Measurement of Poverty: An Axiomatic Approach".
Econometrica, vol. 44, núm. 2, pàgs. 219-232.

SEN, P.K. (1986)

"The Gini Coefficient and Poverty Indexes: Some reconciliations".
Journal of the American Statistical Association, vol. 81, núm. 396.

SHORROCKS, A.(1980)
"The class of additively decomposable inequality measurements".
Econometrica, vol. 48, pàgs. 613-625.

SHORROCKS, A.(1985)
"Descomposición de la desigualdad por factores componentes".
Hacienda Pública Española, núm. 95, pàgs. 357-379.

SINGH, S. i MADDALA, G. (1976)
"A Function for size Distribution of Incomes"
Econometrica, vol. 44, núm. 5, pàgs. 963-970.

STEINDL, J. (1965)
"Random Process and the growth of Firms".
Griffin.

TAKAYAMA, N. (1979)
"Poverty, Income Inequality and Their Measures: Professor Sen's Axiomatic Approach Reconsidered".
Econometrica, vol. 47, pàgs. 747-760.

THUROW, L. (1970)
"Analyzing the American Income Distribution".
American Economics Association, núm. 60, pàgs. 261-269.

VILLASEÑOR, J. i ARNOLD, B. (1984)
"Some examples of fitted general quadratic Lorenz curves".
Technical report, núm. 130, University of California.

VILLASEÑOR, J. i ARNOLD, B. (1989)
"Elliptical Lorenz curves".
Journal of Econometrics, vol. 40, pàgs. 327-338.

YITZHAKI, S. (1983)
"On an extension of the Gini inequality index".
International Economic Review, vol. 24, pàgs. 617-628.

ZAGIER, D. (1983)
"Inequalities for the Gini Coefficient of Composite Populations".
J. Mathematical Economics, núm. 12, pàgs. 103-118.

ZUBIRI, I. (1985)
"Una introducción al problema de la medición de la desigualdad".
Hacienda Pública Española, núm. 95, pàgs. 291-317.

ANNEXOS

ANNEX 1. MODEL LOG-NORMAL

1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
0.0012	0.0028	0.0739	0.0285	0.0357	0.0474	0.0496
0.0136	0.0207	0.2277	0.0917	0.0472	0.0801	0.0638
0.0993	0.0413	0.2491	0.1773	0.1637	0.1379	0.0939
0.1635	0.1484	0.2522	0.1775	0.1761	0.1410	0.1117
0.1711	0.1489	0.2629	0.1826	0.1839	0.1468	0.1418
0.1722	0.1664	0.2677	0.1906	0.2052	0.1656	0.1674
0.2397	0.1765	0.2684	0.2028	0.2093	0.1920	0.1729
0.2415	0.1827	0.2774	0.2264	0.2147	0.1988	0.1970
0.2415	0.1854	0.2819	0.2324	0.2163	0.2026	0.1994
0.2619	0.1877	0.2855	0.2364	0.2330	0.2311	0.2155
0.2626	0.2167	0.2902	0.2404	0.2384	0.2427	0.2172
0.2731	0.2249	0.2958	0.2487	0.2491	0.2453	0.2285
0.2778	0.2331	0.3104	0.2519	0.2511	0.2557	0.2285
0.2792	0.2430	0.3267	0.2672	0.2540	0.2640	0.2430
0.2799	0.2468	0.3362	0.2674	0.2784	0.2660	0.2788
0.2832	0.2470	0.3379	0.2679	0.2829	0.2677	0.2799
0.2862	0.2565	0.3514	0.2731	0.2847	0.2701	0.2882
0.2934	0.1617	0.3546	0.2741	0.2875	0.2798	0.3085
0.3155	0.2631	0.3552	0.2818	0.2883	0.2837	0.3110
0.3666	0.2682	0.3557	0.2872	0.2907	0.2966	0.3293
0.3751	0.2787	0.3760	0.2997	0.2937	0.2898	0.3369
0.3890	0.2882	0.3817	0.3113	0.2960	0.2909	0.3442
0.4117	0.2938	0.3917	0.3127	0.3020	0.3159	0.3468
0.4140	0.3110	0.3991	0.3184	0.3037	0.3331	0.3607
0.4245	0.3403	0.4009	0.3406	0.3041	0.3483	0.3626
0.4340	0.3414	0.4228	0.3572	0.3323	0.3505	0.3634
0.4382	0.3584	0.4302	0.3605	0.3405	0.3619	0.3690
0.4559	0.3938	0.4311	0.3737	0.3421	0.3654	0.3744
0.4713	0.4144	0.4710	0.3745	0.3447	0.3839	0.3791
0.4831	0.4268	0.4854	0.3902	0.3625	0.4149	0.3966
0.4939	0.4316	0.4963	0.4160	0.3639	0.4281	0.3990
0.4990	0.4349	0.5193	0.4168	0.3717	0.4655	0.4126
0.5101	0.4624	0.5324	0.4748	0.4849	0.4662	0.4817
0.5318	0.4714	0.5443	0.4763	0.5441	0.4947	0.5076
0.5388	0.4943	0.6244	0.5755	0.5568	0.5434	0.5106
0.5418	0.5576	0.6354	0.5912	0.5608	0.5573	0.5763
0.5531	0.5934	0.6464	0.5943	0.6018	0.5680	0.5771
0.5915	0.5997	0.6614	0.6299	0.6157	0.5800	0.5945
0.6209	0.6346	0.6636	0.6422	0.6338	0.6042	0.6288
0.6416	0.6373	0.6644	0.6564	0.6411	0.6454	0.6449
0.6494	0.6447	0.6900	0.6971	0.6962	0.6473	0.6672
0.6671	0.6550	0.7311	0.7190	0.7126	0.6532	0.6875
0.6758	0.6953	0.7500	0.7492	0.7202	0.6616	0.7144
0.7470	0.7471	0.7754	0.7652	0.7340	0.6997	0.7255

0.7495	0.7694	0.8113	0.7785	0.7431	0.7720	0.7347
0.7567	0.8094	0.8450	0.8561	0.7777	0.7962	0.8585
0.7882	0.8176	0.8511	0.8821	0.8545	0.8699	0.8690
0.8396	0.8830	0.9240	0.9195	0.8872	0.8970	0.8859
0.8418	0.9215	0.9290	0.9253	0.9014	0.8983	0.9181
0.9083	0.9563	0.9617	0.9621	0.9032	0.9303	0.9280
0.9529	0.9696	0.9680	0.9631	0.9589	0.9596	0.9305
0.9677	0.9702	0.9706	0.9918	0.9690	0.9729	0.9710
0.9804	0.9931	0.9925	0.9931	0.9905	0.9900	0.9788
0.9879	0.9934	0.9932	0.9952	0.9934	0.9933	0.9923
0.9975	0.9972	0.9977	0.9987	0.9987	0.9987	0.9991

Tabla 9-1.

ANNEX 2. MODEL GAMMA

1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
0.0297	0.0551	0.0956	0.0845	0.0944	0.1086	0.1086
0.0636	0.1684	0.1912	0.1445	0.1066	0.1379	0.1219
0.1467	0.1832	0.2042	0.2075	0.1985	0.1817	0.1471
0.1916	0.1882	0.2061	0.2077	0.2072	0.1839	0.1607
0.1966	0.1886	0.2126	0.2112	0.2125	0.1880	0.1828
0.1974	0.2007	0.2156	0.2168	0.2270	0.2012	0.2008
0.2418	0.2076	0.2160	0.2252	0.2298	0.2192	0.2046
0.2430	0.2118	0.2215	0.2252	0.2335	0.2237	0.2211
0.2430	0.2137	0.2243	0.2413	0.2345	0.2263	0.2228
0.2564	0.2153	0.2265	0.2454	0.2458	0.2453	0.2337
0.2568	0.2347	0.2294	0.2482	0.2494	0.2530	0.2348
0.2637	0.2402	0.2329	0.2509	0.2566	0.2548	0.2424
0.2668	0.2456	0.2420	0.2565	0.2579	0.2617	0.2424
0.2677	0.2522	0.2541	0.2587	0.2598	0.2672	0.2522
0.2681	0.2547	0.2584	0.2691	0.2762	0.2685	0.2762
0.2703	0.2549	0.2595	0.2692	0.2793	0.2696	0.2770
0.2723	0.2612	0.2682	0.2696	0.2804	0.2712	0.2825
0.2771	0.2646	0.2703	0.2730	0.2823	0.2777	0.2963
0.2918	0.2656	0.2707	0.2737	0.2829	0.2803	0.2979
0.3264	0.2690	0.2710	0.2790	0.2845	0.2822	0.3104
0.3323	0.2759	0.2844	0.2827	0.2865	0.2844	0.3156
0.3420	0.2823	0.2882	0.2912	0.2881	0.2851	0.3206
0.3580	0.2860	0.2949	0.2992	0.2922	0.3018	0.3224
0.3597	0.2975	0.2999	0.3001	0.2933	0.3134	0.3320
0.3673	0.3173	0.3011	0.3040	0.2936	0.3237	0.3333
0.3742	0.3180	0.3162	0.3194	0.3127	0.3252	0.3339
0.3772	0.3296	0.3214	0.3309	0.3183	0.3329	0.3378
0.3903	0.3541	0.3221	0.3332	0.3194	0.3353	0.3416
0.4019	0.3686	0.3508	0.3422	0.3212	0.3481	0.3448
0.4109	0.3775	0.3615	0.3424	0.3335	0.3699	0.3572
0.4193	0.3809	0.3698	0.3542	0.3344	0.3793	0.3589
0.4232	0.3833	0.3877	0.3727	0.3399	0.4065	0.3686
0.4320	0.4033	0.3980	0.3733	0.4220	0.4070	0.4195

0.4494	0.4100	0.4076	0.4164	0.4684	0.4283	0.4393
0.4551	0.4273	0.4773	0.4175	0.4787	0.4662	0.4417
0.4576	0.4772	0.4876	0.4968	0.4820	0.4774	0.4949
0.4669	0.5070	0.4981	0.5102	0.5167	0.4861	0.4956
0.4999	0.5159	0.5128	0.5129	0.5288	0.4961	0.5104
0.5265	0.5432	0.5150	0.5443	0.5449	0.5166	0.5405
0.5458	0.5456	0.5158	0.5555	0.5516	0.5531	0.5552
0.5333	0.5523	0.5419	0.5687	0.6041	0.5548	0.5761
0.5705	0.5618	0.5869	0.6081	0.6206	0.5603	0.5957
0.5793	0.6006	0.6088	0.6303	0.6284	0.5681	0.6227
0.6558	0.6543	0.6400	0.6622	0.6429	0.6047	0.6342
0.6587	0.6790	0.6873	0.6799	0.6526	0.6813	0.6439
0.6670	0.7263	0.7358	0.6949	0.6911	0.7094	0.7928
0.7051	0.7365	0.7451	0.7913	0.7867	0.8046	0.9072
0.7728	0.8250	0.8690	0.8273	0.8326	0.8441	0.8314
0.7758	0.8339	0.8785	0.8832	0.8539	0.8460	0.8802
0.8758	0.9415	0.9426	0.8922	0.8565	0.8964	0.8959
0.9480	0.9637	0.9551	0.9516	0.9460	0.9454	0.8999
0.9707	0.9647	0.9601	0.9533	0.9627	0.9677	0.9663
0.9873	0.9969	0.9962	0.9954	0.9941	0.9931	0.9785
0.9945	0.9972	0.9968	0.9966	0.9971	0.9967	0.9961
0.9981	0.9997	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 9-2.

ANNEX 3. MODEL ESPECIFICAT PER KAKWANI

1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
0.0020	0.0055	0.0054	0.0048	0.0043	0.0043	0.0038
0.0038	0.0095	0.0096	0.0089	0.0080	0.0079	0.0072
0.0058	0.0130	0.0134	0.0128	0.0115	0.0112	0.0105
0.0078	0.0161	0.0171	0.0166	0.0151	0.0145	0.0138
0.0100	0.0192	0.0207	0.0205	0.0186	0.0179	0.0173
0.0124	0.0222	0.0244	0.0245	0.0223	0.0213	0.0208
0.0150	0.0252	0.0281	0.0286	0.0261	0.0248	0.0246
0.0178	0.0283	0.0319	0.0328	0.0301	0.0285	0.0285
0.0208	0.0315	0.0359	0.0372	0.0342	0.0323	0.0325
0.0240	0.0349	0.0400	0.0418	0.0385	0.0363	0.0368
0.0274	0.0384	0.0443	0.0466	0.0430	0.0405	0.0413
0.0311	0.0421	0.0489	0.0516	0.0477	0.0449	0.0461
0.0351	0.0461	0.0536	0.0569	0.0527	0.0495	0.0510
0.0393	0.0503	0.0586	0.0624	0.0579	0.0544	0.0563
0.0437	0.0547	0.0639	0.0691	0.0634	0.0595	0.0617
0.0485	0.0594	0.0694	0.0741	0.0691	0.0649	0.0675
0.0535	0.0645	0.0752	0.0904	0.0751	0.0706	0.0735
0.0589	0.0698	0.0813	0.0869	0.0814	0.0766	0.0798
0.0645	0.0755	0.0877	0.0938	0.0880	0.0829	0.0865
0.0704	0.0815	0.0945	0.1010	0.0949	0.0894	0.0934
0.0767	0.0879	0.1016	0.1085	0.1021	0.0964	0.1007

0.0833	0.0947	0.1091	0.1164	0.1097	0.1036	0.1083
0.0903	0.1019	0.1170	0.1246	0.1176	0.1113	0.1162
0.0977	0.1095	0.1253	0.1332	0.1259	0.1193	0.1246
0.1054	0.1176	0.1340	0.1422	0.1346	0.1277	0.1333
0.1135	0.1261	0.1431	0.1515	0.1437	0.1365	0.1424
0.1220	0.1352	0.1527	0.1614	0.1532	0.1458	0.1519
0.1310	0.1447	0.1628	0.1716	0.1631	0.1555	0.1619
0.1404	0.1548	0.1733	0.1823	0.1736	0.1656	0.1723
0.1503	0.1655	0.1844	0.1935	0.1844	0.1763	0.1832
0.1607	0.1767	0.1961	0.2052	0.1958	0.1875	0.1946
0.1716	0.1886	0.2083	0.2174	0.2079	0.1992	0.2065
0.1830	0.2012	0.2212	0.2302	0.2202	0.2115	0.2189
0.1951	0.2144	0.2347	0.2436	0.2333	0.2244	0.2319
0.2077	0.2284	0.2488	0.2576	0.2470	0.2379	0.2456
0.2210	0.2432	0.2637	0.2723	0.2614	0.2521	0.2599
0.2350	0.2588	0.2794	0.2877	0.2764	0.2671	0.2749
0.2498	0.2753	0.2959	0.3038	0.2922	0.2828	0.2906
0.2653	0.2927	0.3132	0.3207	0.3089	0.2994	0.3072
0.2818	0.3112	0.3315	0.3385	0.3264	0.3168	0.3246
0.2991	0.3308	0.3508	0.3573	0.3448	0.3353	0.3429
0.3175	0.3516	0.3713	0.3771	0.3643	0.3548	0.3622
0.3371	0.3737	0.3929	0.3980	0.3849	0.3754	0.3827
0.3579	0.3972	0.4159	0.4202	0.4068	0.3974	0.4044
0.3802	0.4223	0.4404	0.4438	0.4301	0.4208	0.4275
0.4042	0.4493	0.4666	0.4689	0.4550	0.4459	0.4522
0.4300	0.4784	0.4947	0.4959	0.4817	0.4729	0.4787
0.4581	0.5098	0.5251	0.5250	0.5107	0.5021	0.5074
0.4890	0.5442	0.5582	0.5567	0.5422	0.5340	0.5387
0.5233	0.5821	0.5945	0.5916	0.5770	0.5693	0.5733
0.5622	0.6245	0.6352	0.6307	0.6161	0.6089	0.6120
0.6075	0.6732	0.6818	0.6755	0.6611	0.6547	0.6567
0.6632	0.7313	0.7374	0.7293	0.7154	0.7100	0.7108
0.7394	0.8073	0.8103	0.8004	0.7879	0.7838	0.7831
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 9-3.

ANNEX 4. MODEL ESPECIFICAT PER KAKWANI I PODDER

1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
0.0003	0.0035	0.0026	0.0023	0.0022	0.0025	0.0026
0.0013	0.0066	0.0063	0.0058	0.0051	0.0053	0.0051
0.0031	0.0101	0.0107	0.0100	0.0087	0.0086	0.0082
0.0056	0.0140	0.0157	0.0149	0.0130	0.0125	0.0119
0.0088	0.0184	0.0211	0.0204	0.0179	0.0170	0.0160
0.0125	0.0230	0.0268	0.0263	0.0233	0.0219	0.0207
0.0167	0.0279	0.0327	0.0325	0.0290	0.0271	0.0257
0.0213	0.0331	0.0387	0.0389	0.0351	0.0327	0.0311
0.0262	0.0384	0.0448	0.0454	0.0413	0.0384	0.0368
0.0314	0.0438	0.0509	0.0520	0.0477	0.0443	0.0427

0.0366	0.0493	0.0570	0.0586	0.0541	0.0504	0.0488
0.0420	0.0548	0.0630	0.0652	0.0606	0.0565	0.0551
0.0474	0.0604	0.0690	0.0717	0.0670	0.0626	0.0614
0.0528	0.0659	0.0749	0.0782	0.0734	0.0687	0.0678
0.0581	0.0714	0.0808	0.0846	0.0798	0.0747	0.0742
0.0635	0.0770	0.0866	0.0909	0.0861	0.0808	0.0806
0.0688	0.0825	0.0924	0.0972	0.0923	0.0868	0.0870
0.0741	0.0880	0.0982	0.1034	0.0984	0.0928	0.0934
0.0794	0.0935	0.1040	0.1096	0.1045	0.0988	0.0999
0.0846	0.0991	0.1098	0.1158	0.1106	0.1047	0.1063
0.0899	0.1047	0.1157	0.1220	0.1167	0.1107	0.1128
0.0952	0.1104	0.1216	0.1283	0.1228	0.1167	0.1193
0.1006	0.1162	0.1277	0.1346	0.1289	0.1228	0.1259
0.1062	0.1222	0.1340	0.1411	0.1351	0.1290	0.1326
0.1118	0.1283	0.1405	0.1478	0.1415	0.1353	0.1395
0.1177	0.1346	0.1472	0.1547	0.1481	0.1418	0.1466
0.1238	0.1413	0.1542	0.1618	0.1549	0.1486	0.1538
0.1302	0.1482	0.1616	0.1693	0.1619	0.1556	0.1614
0.1369	0.1555	0.1693	0.1771	0.1694	0.1630	0.1693
0.1441	0.1632	0.1776	0.1853	0.1772	0.1708	0.1776
0.1517	0.1714	0.1863	0.1941	0.1854	0.1791	0.1863
0.1599	0.1802	0.1957	0.2034	0.1943	0.1879	0.1956
0.1687	0.1896	0.2058	0.2134	0.2037	0.1973	0.2055
0.1783	0.1998	0.2166	0.2241	0.2139	0.2075	0.2161
0.1886	0.2108	0.2283	0.2357	0.2249	0.2184	0.2274
0.2000	0.2228	0.2410	0.2482	0.2368	0.2303	0.2398
0.2124	0.2358	0.2547	0.2618	0.2498	0.2433	0.2531
0.2260	0.2501	0.2697	0.2766	0.2639	0.2574	0.2676
0.2411	0.2658	0.2861	0.2928	0.2795	0.2729	0.2835
0.2578	0.2830	0.3941	0.3105	0.2966	0.2900	0.3009
0.2763	0.3020	0.3238	0.3300	0.3154	0.3088	0.3202
0.2969	0.3231	0.3456	0.3514	0.3362	0.3296	0.3410
0.3198	0.3464	0.3695	0.3750	0.3593	0.3527	0.3643
0.3456	0.3724	0.3960	0.4011	0.3849	0.3784	0.3901
0.3745	0.4014	0.4254	0.4301	0.4135	0.4071	0.4189
0.4070	0.4338	0.4580	0.4622	0.4455	0.4392	0.4509
0.4438	0.4702	0.4943	0.4981	0.4813	0.4752	0.4866
0.4854	0.5111	0.5349	0.5382	0.5215	0.5156	0.5268
0.5326	0.5572	0.5802	0.5830	0.5668	0.5612	0.5719
0.5864	0.6093	0.6310	0.6333	0.6180	0.6128	0.6227
0.6478	0.6684	0.6880	0.6898	0.6759	0.6713	0.6801
0.7182	0.7355	0.7523	0.7536	0.7417	0.7378	0.7452
0.7991	0.8121	0.8248	0.8256	0.8165	0.8137	0.8192
0.8922	0.8996	0.9069	0.9072	0.9020	0.9004	0.9035
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 9-4.

ANNEX 5. MODEL QUADRÀTIC

1986	1987	1988	1989	1990
0.0037	0.0044	0.0045	0.0041	0.0039
0.0076	0.0088	0.0092	0.0083	0.0079
0.0116	0.0134	0.0139	0.0127	0.0120
0.0156	0.0180	0.0187	0.0171	0.0162
0.0198	0.0228	0.0236	0.0216	0.0205
0.0240	0.0276	0.0287	0.0263	0.0249
0.0283	0.0325	0.0338	0.0310	0.0295
0.0328	0.0376	0.0390	0.0359	0.0341
0.0373	0.0427	0.0443	0.0409	0.0389
0.0420	0.0479	0.0498	0.0460	0.0437
0.0468	0.0533	0.0554	0.0512	0.0488
0.0517	0.0588	0.0611	0.0566	0.0539
0.0568	0.0644	0.0669	0.0621	0.0592
0.0620	0.0701	0.0729	0.0678	0.0646
0.0673	0.0760	0.0790	0.0736	0.0702
0.0728	0.0820	0.0853	0.0796	0.0760
0.0784	0.0882	0.0917	0.0857	0.0819
0.0843	0.0943	0.0983	0.0921	0.0880
0.0903	0.1011	0.1051	0.0986	0.0943
0.0965	0.1078	0.1121	0.1053	0.1007
0.1029	0.1147	0.1193	0.1122	0.1074
0.1095	0.1218	0.1267	0.1194	0.1143
0.1163	0.1291	0.1343	0.1267	0.1215
0.1234	0.1367	0.1421	0.1344	0.1289
0.1307	0.1445	0.1502	0.1423	0.1365
0.1384	0.1526	0.1586	0.1504	0.1444
0.1463	0.1609	0.1672	0.1589	0.1527
0.1545	0.1696	0.1762	0.1676	0.1612
0.1631	0.1786	0.1855	0.1767	0.1701
0.1720	0.1879	0.1951	0.1862	0.1793
0.1813	0.1977	0.2051	0.1960	0.1889
0.1911	0.2078	0.2155	0.2063	0.1989
0.2013	0.2184	0.2264	0.2179	0.2094
0.2120	0.2294	0.2377	0.2281	0.2203
0.2232	0.2410	0.2495	0.2398	0.2318
0.2350	0.2532	0.2619	0.2520	0.2438
0.2475	0.2660	0.2749	0.2649	0.2565
0.2608	0.2795	0.2886	0.2784	0.2698
0.2748	0.2938	0.3030	0.2927	0.2839
0.2897	0.3090	0.3183	0.3078	0.2988
0.3056	0.3251	0.3345	0.3237	0.3146
0.3227	0.3427	0.3517	0.3408	0.3315
0.3410	0.3608	0.3701	0.3589	0.3495
0.3608	0.3808	0.3899	0.3784	0.3689
0.3824	0.4024	0.4112	0.3994	0.3899
0.4059	0.4260	0.4344	0.4222	0.4126

0.4319	0.4520	0.4598	0.4471	0.4375
0.4608	0.4808	0.4878	0.4746	0.4650
0.4934	0.5132	0.5191	0.5051	0.4958
0.5307	0.5503	0.5547	0.5398	0.5306
0.5743	0.5935	0.5958	0.5797	0.5710
0.6270	0.6456	0.6451	0.6274	0.6192
0.6940	0.7116	0.7072	0.6871	0.6799
0.7888	0.8045	0.7942	0.7706	0.7651
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 9-5.

ANNEX 6. MODEL DE PARETO

1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
0.0128	0.0154	0.0156	0.0152	0.0147	0.0144	0.0144
0.0259	0.0311	0.0316	0.0308	0.0297	0.0292	0.0291
0.0393	0.0472	0.0479	0.0467	0.0451	0.0443	0.0441
0.0531	0.0637	0.0646	0.0630	0.0609	0.0598	0.0596
0.0673	0.0806	0.0817	0.0797	0.0770	0.0757	0.0754
0.0819	0.0979	0.0993	0.0968	0.0936	0.0929	0.0917
0.0969	0.1156	0.1173	0.1144	0.1106	0.1088	0.1084
0.1124	0.1339	0.1358	0.1324	0.1281	0.1261	0.1255
0.1284	0.1526	0.1548	0.1510	0.1462	0.1438	0.1432
0.1449	0.1720	0.1744	0.1702	0.1648	0.1622	0.1615
0.1621	0.1920	0.1946	0.1900	0.1840	0.1812	0.1804
0.1799	0.2126	0.2155	0.2105	0.2039	0.2008	0.2000
0.1985	0.2340	0.2372	0.2317	0.2246	0.2212	0.2203
0.2178	0.2563	0.2596	0.2538	0.2461	0.2424	0.2415
0.2381	0.2795	0.2831	0.2768	0.2685	0.2646	0.2636
0.2594	0.3037	0.3075	0.3008	0.2920	0.2878	0.2867
0.2819	0.3291	0.3332	0.3260	0.3167	0.3122	0.3111
0.3058	0.3559	0.3602	0.3526	0.3427	0.3380	0.3367
0.3312	0.3842	0.3888	0.3808	0.3703	0.3653	0.3640
0.3586	0.4144	0.4192	0.4109	0.3998	0.3946	0.3932
0.3882	0.4469	0.4519	0.4432	0.4316	0.4261	0.4247
0.4208	0.4821	0.4874	0.4783	0.4662	0.4605	0.4590
0.4570	0.5210	0.5263	0.5169	0.5045	0.4985	0.4969
0.4983	0.5645	0.5700	0.5604	0.5475	0.5414	0.5398
0.5470	0.6149	0.6205	0.6107	0.5976	0.5913	0.5897
0.6076	0.6761	0.6817	0.6720	0.6589	0.6526	0.6509
0.6931	0.7591	0.7643	0.7552	0.7428	0.7368	0.7352
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 9-6.